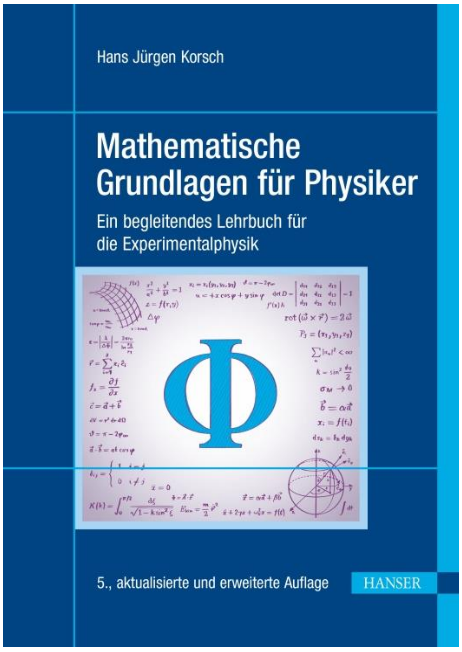
HANSER



Leseprobe

zu

Mathematische Grundlagen für Physiker

von Hans Jürgen Korsch

Print-ISBN: 978-3-446-47134-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-47152-8

Vorwort zur fünften Auflage

Dieses Buch mit dem Titel *Mathematische Grundlagen für Physiker – Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik* ist eine überarbeitete Neuauflage des Buches *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*, erschienen im Binomi Verlag. Ich möchte Herrn Gerhard Merziger vom Binomi Verlag für die langjährige Zusammenarbeit herzlich danken und auch für die Anregung zu einer neuen Auflage dieses Textes im Carl Hanser Verlag. Vielen Dank auch an den Carl Hanser Verlag für die Bereitschaft, dieses Buch in ihr Verlagsprogramm zu übernehmen. Ganz besonders geholfen haben mir dabei Herr Frank Katzenmayer, Frau Christina Kubiak und Frau Anne Kurth vom Carl Hanser Verlag mit ihrer kompetenten Betreuung und vielen Verbesserungsvorschlägen.

Für diese fünfte Auflage wurde der Text erneut überarbeitet und ergänzt. Dabei waren die vielen Hinweise aus dem Leserkreis eine wertvolle Hilfe. Besonders zu erwähnen sind auch hier wieder die Anregungen von Stephan Bogendörfer.

Weitere Kommentare, kritische Bemerkungen und Hinweise auf Fehler bitte an die unten angegebene E-Mail Adresse. Eine von Zeit zu Zeit aktualisierte Korrekturliste findet man im Internet unter:

`https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch`

Dieses Buch wird im Fernstudiengang „Frühinstieg ins Physik-Studium" (FiPS) der Technischen Universität Kaiserslautern als Lehrbuch benutzt. Weitere Informationen unter

`http://www.fernstudium-physik.de/`.

Für Anfänger im Studium der Physik (und teilweise auch in den anderen Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften) stellt die Mathematik ein großes Problem dar. Gute Kenntnisse der Schulmathematik werden dabei stillschweigend vorausgesetzt, aber nicht jeder bringt hier die gleichen Voraussetzungen mit. Zum Ausgleich unterschiedlicher mathematischer Vorkenntnisse dienen an vielen Universitäten Vorkurse für Studienanfänger. Ein Skript zu einem solchen Vorkurs in Mathematik, der an der Technischen Universität Kaiserslautern seit vielen Jahren für die Studienanfänger in Physik angeboten wird, ist als Buch erhältlich:

> H. J. Korsch, „Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger der Physik und der Ingenieurwissenschaften" (Binomi Verlag 2004), 119 Seiten `http://www.binomi.de`.

Dieses Buch ist als Brücke zwischen mathematischem Schulwissen und Anforderungen der Vorlesungen gedacht. Es eignet sich als Begleitliteratur zu einem Universitäts-Vorkurs oder zum Selbststudium und wird allen Studienanfängern der Physik oder der Ingenieurwissenschaften empfohlen.

Kaiserslautern,
August 2021

Hans Jürgen Korsch
E-Mail: h.j.korsch@gmail.com

Inhaltsverzeichnis

Die Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes, die diesen Vektorraum aufspannen, ist stets dieselbe und heißt *Dimension* dieses Vektorraums, und eine solche linear unabhängige Menge heißt *Basis* dieses Raumes.

Beispiele von Vektorräumen:

Die Translationen: Die Translationen oder Verschiebungen im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ bilden den wohl bekanntesten Vektorraum, der meist schon in der Schule behandelt wird. Eine solche Translation T_a verschiebt alle Punkte parallel. Insbesondere wird der Nullpunkt mit den Koordinaten $(0, 0, 0)$ in einem kartesischen Koordinatensystem in einen Punkt mit den Koordinaten (a_1, a_2, a_3) verschoben. Diese drei Zahlen a_i, $i = 1, 2, 3$, charakterisieren die Verschiebung in eindeutiger Weise. Ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten (r_1, r_2, r_3) wird durch T_a in den Punkt $(r_1 + a_1, r_2 + a_2, r_3 + a_3)$ verschoben.

Eine Addition zweier Verschiebungen T_a und T_b erklärt man durch die Hintereinanderschaltung der beiden Operationen. Dabei wird der Nullpunkt zuerst durch T_a nach (a_1, a_2, a_3) und dann durch T_b, beschrieben durch (b_1, b_2, b_3), nach $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ verschoben. Formal schreibt man das als

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,. \tag{1.17}$$

Eine Multiplikation einer Translation T_a mit einer Zahl α ist eine Verschiebung in die gleiche Richtung wie T_a, aber um den Faktor α skaliert. Dadurch entsteht eine Translation, die den Nullpunkt nach $(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$ verschiebt. Formal schreibt man das als

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)\,. \tag{1.18}$$

Es ist offensichtlich, dass diese Operationen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) erfüllen: Die Translationen bilden einen Vektorraum. Dieser Vektorraum ist dreidimensional: Die drei Translationen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sind linear unabhängig (Beweis?) und jede Translation (a_1, a_2, a_3) lässt sich durch eine Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen (Beweis?). Die drei Vektoren bilden also eine Basis.

Weiterhin kann man sich leicht davon überzeugen, dass man in genau der gleichen Weise Translationen in einem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ erklären kann, die man durch die n Koordinaten $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ beschreibt.

Die Polynome: Neben den Translationen erfüllen eine Reihe anderer mathematischer Strukturen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) und bilden folglich einen Vektorraum. Viele dieser Vektorräume sind in der Physik von Bedeutung. Ein Beispiel eines solchen abstrakten Vektorraums ist die Menge aller Polynome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad (1.19)$$

mit Grad $\leq n$. In Anhang A wird gezeigt, dass diese Menge eine Vektorraumstruktur besitzt. Sie bildet einen Vektorraum der Dimension $n+1$, und man kann daher mit diesen Polynomen rechnen wie mit Vektoren.

1.2.3 Das Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt*, das auch *inneres Produkt* genannt wird, ist ein Produkt zweier Vektoren, dessen Resultat eine Zahl ist, ein Skalar. Man kennzeichnet dieses Produkt durch einen Punkt. Es ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\varphi \,. \qquad (1.20)$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren (vgl. Bild 1.5). Zunächst sollten wir uns überlegen, dass das Resultat dieses Produkts wirklich einen Skalar liefert, denn sowohl die Beträge der beiden Vektoren als auch der Winkel zwischen ihnen bleiben bei einer Drehung des Koordinatensystems unverändert, und dies war ja die Forderung an eine skalare Größe (vgl. Seite 19).

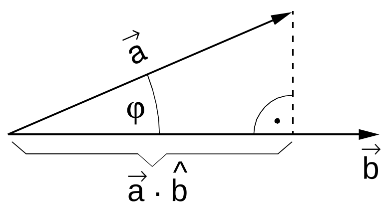


Bild 1.5: Skalarprodukt zweier Vektoren. Die Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b}$ hat die Länge $\vec{a} \cdot \hat{b} = a \cos\varphi$.

Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{(kommutativ)} \tag{1.21}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{(distributiv)} \tag{1.22}$$

$$\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) \quad \text{(homogen)}\,. \tag{1.23}$$

Einige Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b} &\Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \text{ parallel } \vec{b} &\Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \\ \vec{a} \text{ antiparallel } \vec{b} &\Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab \\ \vec{a} = \vec{b} &\Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \\ \vec{a} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \vec{0} &\Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Zwei Vektoren sind also *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Weiterhin gilt die *schwarzsche Ungleichung*

$$-ab \le \vec{a} \cdot \vec{b} \le ab\,. \tag{1.25}$$

Man kann mithilfe des Skalarprodukts sehr einfach die *Projektion* eines Vektors $\vec{a}$ auf eine Richtung (beschrieben durch einen Einheitsvektor $\hat{b}$) definieren. Für den Wert dieser Projektion gilt

$$a_{\mathrm{b}} = a \cos\varphi = \vec{a} \cdot \hat{b} \tag{1.26}$$

($|\hat{b}| = 1$). Um den projizierten Vektor zu erhalten, multipliziert man einfach den Einheitsvektor $\hat{b}$ mit dem Betrag a_{b}:

$$\vec{a}_{\mathrm{b}} = a_{\mathrm{b}}\,\hat{b} = \big(\vec{a} \cdot \hat{b}\big)\,\hat{b}\,. \tag{1.27}$$

Als Beispiel für eine Anwendung des Skalarprodukts beweisen wir den Kosinus-Satz: Für die Seitenlängen im Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,, \tag{1.28}$$

wobei der Winkel γ der Seite c gegenüberliegt (vgl. Bild 1.6). Der Beweis ist sehr einfach:

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,. \end{aligned} \tag{1.29}$$

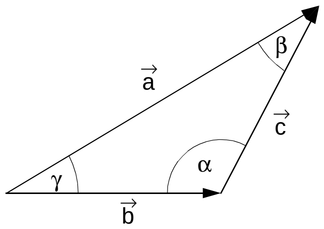


Bild 1.6: Dreieck aus den Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Man kann sogar sagen, dass man – sobald man das Skalarprodukt zur Verfügung hat – den Kosinus-Satz vergessen kann.

Hier sind wir bei der Definition des Skalarprodukts von der anschaulichen Bedeutung eines Vektors ausgegangen, der insbesondere eine Richtung im Raum besitzt. Der Winkel zwischen zwei solchen Vektoren ist dabei anschaulich klar. In einer abstrakteren Definition eines Vektorraums (vgl. Abschnitt 1.2.2) ist das aber nicht der Fall. Hier kann man das Skalarprodukt durch die Eigenschaften (1.21) – (1.23) sowie $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ *definieren*. Allerdings existiert ein solches Skalarprodukt nicht für jeden Vektorraum. Ein Beispiel für einen abstrakten Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist der Vektorraum der Polynome in Anhang A. Dort wird gezeigt, dass man sogar in abstrakter Weise einen „Winkel“ zwischen zwei Polynomen definieren kann.

1.2.4 Das Vektorprodukt

Neben dem Skalarprodukt zweier Vektoren existiert im dreidimensionalen Fall $\mathbb{R}^3$ noch ein zweites Produkt, dessen Resultat aber ein Vektor ist. Man nennt dieses *Vektorprodukt* auch *Kreuzprodukt* oder *äußeres Produkt*. Es ist definiert als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{mit} \quad c = ab\,|\sin\varphi|\ , \tag{1.30}$$

das heißt, der Betrag des Vektors $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Diese Fläche ist das Produkt der Länge der Grundseite a und der Höhe $h = b\,|\sin\varphi|$:

$$\text{Fläche} = ah = ab\,|\sin\varphi|\,. \tag{1.31}$$

Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht. Dabei wird diejenige der beiden dabei möglichen Richtungen von $\vec{c}$ durch die *Rechtsschraubenregel* festgelegt: Dreht man den ersten Vektor, $\vec{a}$, des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ auf dem

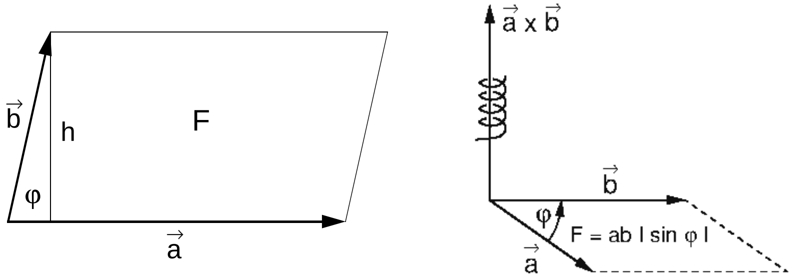


Bild 1.7: Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms, seine Richtung wird bestimmt durch die Rechtsschraubenregel.

kürzestem Weg in Richtung des zweiten Vektors, $\vec{b}$, so hat der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ die Richtung, in der sich eine Rechtsschraube bei dieser Drehung fortbewegen würde. Alternativ kann man sich diese Richtung auch mittels der „Daumenregel der rechten Hand“ merken: Orientiert man die rechte Hand so, dass die Finger der Richtung vom ersten Vektor zum zweiten folgen, so zeigt der Daumen in Richtung des Vektorprodukts.

Eigenschaften des Vektorprodukts:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{(antikommutativ)} && (1.32) \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{(distributiv)} && (1.33) \\ \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) &= (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) \quad \text{(homogen)}\,. && (1.34) \end{aligned}$$

Bis auf den Vorzeichenwechsel bei der Vertauschung der Reihenfolge stimmen alle diese Rechenregeln mit denen des Skalarprodukts überein.
Einige Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b} &\Longrightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \\ \vec{a} \text{ parallel } \vec{b} &\Longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \text{ antiparallel zu } \vec{b} &\Longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \qquad (1.35) \\ \vec{a} = \vec{b} &\Longrightarrow \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} &\Longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}\,. \end{aligned}$$

Als Beispiel für eine Anwendung des Vektorprodukts beweisen wir den Sinus-Satz: Für die Seitenlängen im Dreieck gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,, \tag{1.36}$$

wobei der Winkel α bzw. β der Seite a bzw. b gegenüberliegt (vgl. Bild 1.6). Entsprechendes gilt für die anderen Seiten und Winkel. Der Beweis ist wieder einfach:

$$\begin{aligned} 2\times\text{ Fläche des Dreiecks} &= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{c}\right| \\ &= ab\sin\gamma = cb\sin\alpha = ac\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Die letzte Gleichung liefert beispielsweise $cb\sin\alpha = ac\sin\beta$ und nach Division durch c die gesuchte Gleichung (1.36).

1.2.5 Komponentendarstellung

Wir definieren im dreidimensionalen Raum drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, die wir mit

$$\hat{x}\ ,\ \hat{y}\ ,\ \hat{z} \tag{1.38}$$

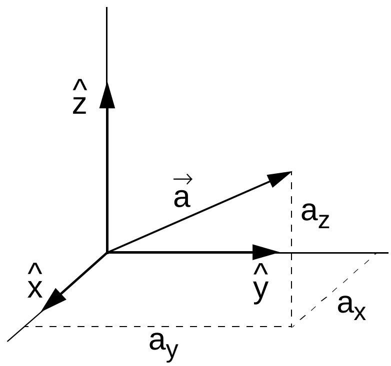


Bild 1.8: Die drei Einheitsvektoren $\hat{x}$, $\hat{y}$ und $\hat{z}$ stehen paarweise aufeinander senkrecht.

bezeichnen. Wie Bild 1.8 illustriert, wird dadurch das bekannte kartesische Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ erzeugt. Man sollte außerdem die Bezeichnungen so wählen, dass $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ gilt (ein so genanntes *Rechtssystem*). Es gilt also

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \\ \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \end{aligned} \tag{1.39}$$

und

$$\begin{aligned} &\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \ , \ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \ , \ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \\ &\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \ , \ \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} \ , \ \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y} \, . \end{aligned} \tag{1.40}$$

Man sollte sich auch an andere Schreibweisen dieser Einheitsvektoren gewöhnen, die oft benutzt werden, wie etwa

$$\vec{e}_x \ , \ \vec{e}_y \ , \ \vec{e}_z \quad \text{oder} \quad \vec{e}_1 \ , \ \vec{e}_2 \ , \ \vec{e}_3 \, , \quad \text{oder auch} \quad \hat{e}_1 \ , \ \hat{e}_2 \ , \ \hat{e}_3 \, . \tag{1.41}$$

Dabei steht das e für „Einheitsvektor“ (in der englischsprachigen Literatur erscheint dann entsprechend u für „unit vector“). Weiterhin findet man auch $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, oder allgemein $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

An dieser Stelle ist es angebracht, den dreidimensionalen Raum unserer Anschauung zu verallgemeinern. In einem Vektorraum der Dimension n (vgl. Seite 25) bildet ein System von n orthonormierten Vektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ eine orthonormierte *Basis*.

Wir notieren zur Übung einmal die Gleichungen (1.39) und (1.40) mithilfe der $\hat{e}_i$ als

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad = \quad \delta_{ij} \, , \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k \ \text{ für } \ i,j,k \ \in \{1,2,3\} \text{ zyklisch} \tag{1.42}$$

mit der zweckmäßigen Abkürzung

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \, , \tag{1.43}$$

dem *Kronecker-Symbol*. Dabei nennt man eine Reihenfolge $(i\,j\,k)$ zyklisch, wenn sie eine gerade Permutation[1] von $(1\,2\,3)$ darstellt, antizyklisch bei einer ungeraden Permutation; z.B. ist $(3\,1\,2)$ eine gerade (zyklisch) und $(2\,1\,3)$

[1] Eine Permutation ist eine Umordnung von Elementen. Man kann jede Permutation durch eine Folge von Vertauschungen zweier Elemente erzeugen. Ist deren Anzahl (un)gerade, nennt man die Permutation (un)gerade.

eine ungerade Permutation (antizyklisch); die Kombination (2 3 2) ist keines von beiden. Es gilt dann also auch

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = -\hat{e}_k \quad \text{für} \quad i,j,k \; \in \{1,2,3\} \text{ antizyklisch}\,. \tag{1.44}$$

Man kann nun jeden Vektor durch seine Komponenten bezüglich der orthogonalen Basis darstellen:

$$\vec{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z} \tag{1.45}$$

mit

$$a_x = \vec{a}\cdot\hat{x}\ ,\ a_y = \vec{a}\cdot\hat{y}\ ,\ a_z = \vec{a}\cdot\hat{z}\,. \tag{1.46}$$

In einer abgekürzten Schreibweise notiert man nur die Komponenten in der Form

$$\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)\ . \tag{1.47}$$

Man rechnet mit solchen Vektoren in der verkürzten Schreibweise wie

$$\begin{aligned} \alpha\vec{a} &= \alpha\,(a_x,\, a_y,\, a_z) = \alpha(a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z}) \\ &= (\alpha a_x)\,\hat{x} + (\alpha a_y)\,\hat{y} + (\alpha a_z)\,\hat{z} = (\alpha a_x,\, \alpha a_y,\, \alpha a_z) \end{aligned} \tag{1.48}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b} &= (a_x,\, a_y,\, a_z) + (b_x,\, b_y,\, b_z) \\ &= a_x\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z} + b_x\hat{x} + b_y\,\hat{y} + b_z\,\hat{z} \\ &= (a_x+b_x)\hat{x} + (a_y+b_y)\,\hat{y} + (a_z+b_z)\,\hat{z} = (a_x+b_x,\, a_y+b_y,\, a_z+b_z)\,. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden Operationen für die Translationen im $\mathbb{R}^3$ in (1.17) und (1.18) zeigt die Verwandtschaft dieser Darstellungen.

Die Komponentendarstellung des Skalarprodukts ist

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z})\cdot(b_x\,\hat{x} + b_y\,\hat{y} + b_z\,\hat{z}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.50}$$

und speziell

$$a^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{1.51}$$

oder

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.52}$$

Index