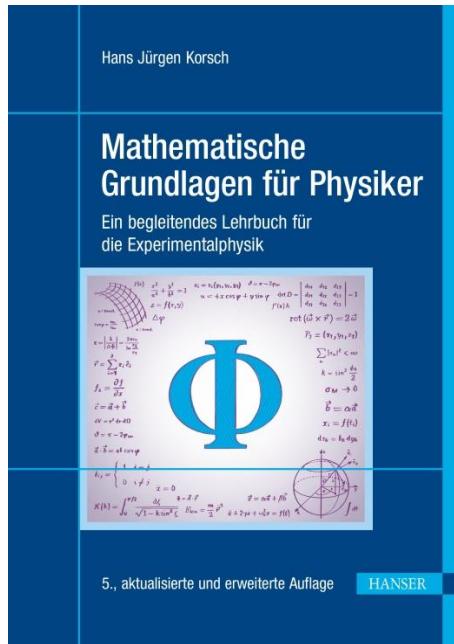


# HANSER



## Leseprobe

zu

# Mathematische Grundlagen für Physiker

von Hans Jürgen Korsch

Print-ISBN: 978-3-446-47134-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-47152-8

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471344>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

## Vorwort zur fünften Auflage

Dieses Buch mit dem Titel *Mathematische Grundlagen für Physiker – Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik* ist eine überarbeitete Neuauflage des Buches *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*, erschienen im Binomi Verlag. Ich möchte Herrn Gerhard Merziger vom Binomi Verlag für die langjährige Zusammenarbeit herzlich danken und auch für die Anregung zu einer neuen Auflage dieses Textes im Carl Hanser Verlag. Viele Dank auch an den Carl Hanser Verlag für die Bereitschaft, dieses Buch in ihr Verlagsprogramm zu übernehmen. Ganz besonders geholfen haben mir dabei Herr Frank Katzenmayer, Frau Christina Kubiak und Frau Anne Kurth vom Carl Hanser Verlag mit ihrer kompetenten Betreuung und vielen Verbesserungsvorschlägen.

Für diese fünfte Auflage wurde der Text erneut überarbeitet und ergänzt. Dabei waren die vielen Hinweise aus dem Leserkreis eine wertvolle Hilfe. Besonders zu erwähnen sind auch hier wieder die Anregungen von Stephan Bogendörfer.

Weitere Kommentare, kritische Bemerkungen und Hinweise auf Fehler bitte an die unten angegebene E-Mail Adresse. Eine von Zeit zu Zeit aktualisierte Korrekturliste findet man im Internet unter:

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch>

Dieses Buch wird im Fernstudiengang „Früheinstieg ins Physik-Studium“ (FiPS) der Technischen Universität Kaiserslautern als Lehrbuch benutzt. Weitere Informationen unter

<http://www.fernstudium-physik.de/>.

Für Anfänger im Studium der Physik (und teilweise auch in den anderen Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften) stellt die Mathematik ein großes Problem dar. Gute Kenntnisse der Schulmathematik werden dabei stillschweigend vorausgesetzt, aber nicht jeder bringt hier die gleichen Voraussetzungen mit. Zum Ausgleich unterschiedlicher mathematischer Vorkenntnisse dienen an vielen Universitäten Vorkurse für Studienanfänger. Ein Skript zu einem solchen Vorkurs in Mathematik, der an der Technischen Universität Kaiserslautern seit vielen Jahren für die Studienanfänger in Physik angeboten wird, ist als Buch erhältlich:

H. J. Korsch, „Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger der Physik und der Ingenieurwissenschaften“ (Binomi Verlag 2004), 119 Seiten  
<http://www.binomi.de>.

Dieses Buch ist als Brücke zwischen mathematischem Schulwissen und Anforderungen der Vorlesungen gedacht. Es eignet sich als Begleitliteratur zu einem Universitäts-Vorkurs oder zum Selbststudium und wird allen Studienanfängern der Physik oder der Ingenieurwissenschaften empfohlen.

Kaiserslautern,  
August 2021

Hans Jürgen Korsch  
E-Mail: h.j.korsch@gmail.com



# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Vektoren</b>   | <b>17</b> |
| 1.1 Vektoren und Tensoren in der Physik . . . . .         | 17        |
| 1.2 Vektorrechnung . . . . .                              | 20        |
| 1.2.1 Rechnen mit Vektoren . . . . .                      | 21        |
| 1.2.2 Abstraktion des Vektorbegriffs . . . . .            | 23        |
| 1.2.3 Das Skalarprodukt . . . . .                         | 26        |
| 1.2.4 Das Vektorprodukt . . . . .                         | 28        |
| 1.2.5 Komponentendarstellung . . . . .                    | 30        |
| 1.2.6 Das Spatprodukt . . . . .                           | 34        |
| 1.2.7 Das doppelte Vektorprodukt . . . . .                | 37        |
| 1.3 Differentiation . . . . .                             | 39        |
| 1.3.1 Differentiation von Vektorfunktionen . . . . .      | 43        |
| 1.3.2 Die partielle Ableitung . . . . .                   | 46        |
| 1.4 Krummlinige Koordinaten I . . . . .                   | 50        |
| 1.4.1 Ebene Polarkoordinaten . . . . .                    | 51        |
| 1.4.2 Zylinderkoordinaten . . . . .                       | 55        |
| 1.4.3 Kugelkoordinaten . . . . .                          | 56        |
| 1.4.4 Allgemeine orthogonale Koordinatensysteme . . . . . | 61        |
| 1.5 Aufgaben . . . . .                                    | 62        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>2 Datenanalyse und Fehlerrechnung*</b>                | <b>65</b>  |
| 2.1 Messungen und Messfehler . . . . .                   | 66         |
| 2.1.1 Die Normalverteilung . . . . .                     | 68         |
| 2.1.2 Die Lorentz-Verteilung . . . . .                   | 70         |
| 2.1.3 Statistische Maße einer Messreihe . . . . .        | 71         |
| 2.2 Fehlerfortpflanzung . . . . .                        | 73         |
| 2.3 Ausgleichsrechnung . . . . .                         | 75         |
| 2.4 Aufgaben . . . . .                                   | 78         |
| <b>3 Vektoranalysis I</b>                                | <b>79</b>  |
| 3.1 Der Gradient . . . . .                               | 80         |
| 3.2 Die Divergenz . . . . .                              | 85         |
| 3.3 Die Rotation . . . . .                               | 88         |
| 3.4 Divergenz und Rotation . . . . .                     | 89         |
| 3.5 Aufgaben . . . . .                                   | 91         |
| <b>4 Grundprobleme der Dynamik</b>                       | <b>93</b>  |
| 4.1 Gradientenfelder und Energieerhaltung . . . . .      | 97         |
| 4.1.1 Der schräge Wurf . . . . .                         | 98         |
| 4.1.2 Das Federpendel . . . . .                          | 101        |
| 4.1.3 Das mathematische Pendel . . . . .                 | 103        |
| 4.1.4 Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten . . . . . | 108        |
| 4.2 Impulssatz und Drehimpulssatz . . . . .              | 111        |
| 4.3 Das Zweiteilchensystem . . . . .                     | 113        |
| 4.4 Zentralkraftfelder und Drehimpulserhaltung . . . . . | 115        |
| 4.5 Aufgaben . . . . .                                   | 131        |
| <b>5 Matrizen und Tensoren</b>                           | <b>133</b> |
| 5.1 Rechnen mit Matrizen . . . . .                       | 134        |
| 5.2 Quadratische Matrizen . . . . .                      | 136        |
| 5.2.1 Taylor-Entwicklung im $\mathbb{R}^n$ . . . . .     | 140        |
| 5.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .             | 141        |
| 5.2.3 Der Trägheitstensor . . . . .                      | 145        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.3      | Drehung des Koordinatensystems . . . . .                | 145        |
| 5.3.1    | Transformation von Vektoren . . . . .                   | 148        |
| 5.3.2    | Transformation von Matrizen* . . . . .                  | 150        |
| 5.3.3    | Drehungen* . . . . .                                    | 152        |
| 5.4      | Diagonalisierung und Matrix-Funktionen* . . . . .       | 157        |
| 5.4.1    | Transformation auf Diagonalform . . . . .               | 158        |
| 5.4.2    | Matrix-Funktionen . . . . .                             | 161        |
| 5.5      | Aufgaben . . . . .                                      | 165        |
| <b>6</b> | <b>Lineare Differentialgleichungen*</b>                 | <b>167</b> |
| 6.1      | Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .                   | 168        |
| 6.2      | Systeme erster Ordnung . . . . .                        | 172        |
| 6.3      | Aufgaben . . . . .                                      | 176        |
| <b>7</b> | <b>Lineare Schwingungen</b>                             | <b>177</b> |
| 7.1      | Der harmonische Oszillator . . . . .                    | 178        |
| 7.1.1    | Die freie Schwingung . . . . .                          | 179        |
| 7.1.2    | Erzwungene Schwingungen . . . . .                       | 185        |
| 7.1.3    | Energiebilanz . . . . .                                 | 189        |
| 7.1.4    | Dynamik im Phasenraum* . . . . .                        | 190        |
| 7.2      | Gekoppelte Schwingungen . . . . .                       | 193        |
| 7.3      | Aufgaben . . . . .                                      | 200        |
| <b>8</b> | <b>Nichtlineare Dynamik und Chaos</b>                   | <b>203</b> |
| 8.1      | Numerische Lösung von Differentialgleichungen . . . . . | 203        |
| 8.2      | Der Duffing-Oszillator . . . . .                        | 206        |
| 8.3      | Die logistische Differentialgleichung . . . . .         | 211        |
| 8.4      | Iterierte Abbildungen . . . . .                         | 214        |
| 8.5      | Fraktale . . . . .                                      | 225        |
| 8.6      | Aufgaben . . . . .                                      | 231        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>9 Vektoranalysis II</b>                                      | <b>233</b> |
| 9.1 Integrale über Vektorfelder . . . . .                       | 235        |
| 9.1.1 Kurvenintegrale . . . . .                                 | 236        |
| 9.1.2 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen I . . . . .        | 241        |
| 9.1.3 Flächen- und Volumenintegrale . . . . .                   | 245        |
| 9.1.4 Oberflächenintegrale . . . . .                            | 250        |
| 9.1.5 Funktionaldeterminanten* . . . . .                        | 256        |
| 9.2 Integraldarstellung von Divergenz und<br>Rotation . . . . . | 258        |
| 9.2.1 Die Divergenz als Quellenfeld . . . . .                   | 258        |
| 9.2.2 Die Rotation als Wirbelfeld . . . . .                     | 260        |
| 9.3 Integralsätze von Gauß, Stokes und Green . . . . .          | 261        |
| 9.3.1 Der Satz von Gauß . . . . .                               | 263        |
| 9.3.2 Der Satz von Stokes . . . . .                             | 264        |
| 9.3.3 Die greenschen Sätze . . . . .                            | 265        |
| 9.4 Krummlinige Koordinaten II . . . . .                        | 265        |
| 9.5 Elementare Anwendungen . . . . .                            | 269        |
| 9.5.1 Die Maxwell-Gleichungen . . . . .                         | 270        |
| 9.5.2 Die integrale Form der Maxwell-Gleichungen . . . . .      | 270        |
| 9.5.3 Der Zylinderkondensator . . . . .                         | 271        |
| 9.5.4 Die Kontinuitätsgleichung . . . . .                       | 274        |
| 9.5.5 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen II . . . . .       | 274        |
| 9.5.6 Der Zerlegungssatz . . . . .                              | 275        |
| 9.5.7 Die Poisson-Gleichung . . . . .                           | 276        |
| 9.6 Aufgaben . . . . .  | 277        |
| <b>10 Die Delta-Funktion</b>                                    | <b>281</b> |
| 10.1 Elementare Definition der Delta-Funktion . . . . .         | 282        |
| 10.2 Eigenschaften der Delta-Funktion . . . . .                 | 285        |
| 10.3 Die dreidimensionale Delta-Funktion . . . . .              | 289        |
| 10.4 Theorie der Distributionen* . . . . .                      | 292        |
| 10.5 Aufgaben . . . . .   | 296        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>11 Lineare partielle Differentialgleichungen der Physik</b>         | <b>297</b> |
| 11.1 Die Poisson-Gleichung in der Elektro- und Magnetostatik . . . . . | 298        |
| 11.1.1 Die Poisson-Gleichung in der Elektrostatik . . . . .            | 299        |
| 11.1.2 Die Multipolentwicklung . . . . .                               | 303        |
| 11.1.3 Die Poisson-Gleichung in der Magnetostatik . . . . .            | 306        |
| 11.2 Poisson-Gleichung: Numerische Lösung . . . . .                    | 307        |
| 11.2.1 Die eindimensionale Poisson-Gleichung . . . . .                 | 308        |
| 11.2.2 Die zweidimensionale Poisson-Gleichung . . . . .                | 312        |
| 11.3 Die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen* . . . . .                 | 314        |
| 11.4 Die Diffusionsgleichung . . . . .                                 | 317        |
| 11.4.1 Die eindimensionale Diffusionsgleichung . . . . .               | 317        |
| 11.4.2 Numerische Lösung der Diffusionsgleichung . . . . .             | 322        |
| 11.4.3 Diffusion und „Random Walk“ . . . . .                           | 324        |
| 11.5 Die Wellengleichung . . . . .                                     | 326        |
| 11.5.1 Eindimensionale Wellen . . . . .                                | 327        |
| 11.5.2 Die zweidimensionale Wellengleichung . . . . .                  | 336        |
| 11.5.3 Dreidimensionale ebene Wellen . . . . .                         | 340        |
| 11.6 Aufgaben . . . . .  | 341        |
| <b>12 Orthogonale Funktionen</b>                                       | <b>343</b> |
| 12.1 Orthogonale Polynome: . . . . .                                   | 344        |
| 12.2 Fourier-Reihen . . . . .  | 351        |
| 12.2.1 Beispiele für Fourier-Reihen . . . . .                          | 353        |
| 12.2.2 Allgemeine Eigenschaften der Fourier-Reihen . . . . .           | 358        |
| 12.2.3 Periodisch angetriebener harmonischer Oszillator . . . . .      | 359        |
| 12.3 Fourier-Transformationen . . . . .                                | 361        |
| 12.3.1 Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .              | 362        |
| 12.3.2 Beispiele für Fourier-Transformationen . . . . .                | 365        |
| 12.3.3 Die Unschärferelation* . . . . .                                | 368        |
| 12.3.4 Anwendungen der Fourier-Transformation . . . . .                | 370        |
| 12.4 Aufgaben . . . . .  | 373        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>13 Wahrscheinlichkeit und Entropie*</b>                 | <b>375</b> |
| 13.1 Wahrscheinlichkeit . . . . .                          | 375        |
| 13.1.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . . | 376        |
| 13.1.2 Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit . . . . .         | 382        |
| 13.2 Entropie . . . . .                                    | 383        |
| 13.2.1 Ein Maß für die Unbestimmtheit . . . . .            | 384        |
| 13.2.2 Eigenschaften von $S(p_1, \dots, p_n)$ : . . . . .  | 388        |
| 13.3 Maximale Unbestimmtheit . . . . .                     | 389        |
| 13.4 Die Boltzmann-Verteilung . . . . .                    | 394        |
| 13.4.1 Der harmonische Oszillator . . . . .                | 395        |
| 13.4.2 Magnetisierung . . . . .                            | 396        |
| 13.4.3 Das ideale einatomige Gas . . . . .                 | 397        |
| 13.5 Entropie und Irreversibilität . . . . .               | 401        |
| 13.6 Aufgaben . . . . .                                    | 402        |
| <b>A Der Vektorraum der Polynome*</b>                      | <b>405</b> |
| <b>Anhang</b>  | <b>405</b> |
| <b>B Komplexe Zahlen</b>                                   | <b>409</b> |
| B.1 Konjugiert komplexe Zahlen . . . . .                   | 412        |
| B.2 Die Polardarstellung . . . . .                         | 414        |
| B.3 Komplexe Wurzeln . . . . .                             | 416        |
| B.4 Fundamentalsatz der Algebra . . . . .                  | 418        |
| <b>C Kegelschnitte</b>                                     | <b>419</b> |
| C.1 Die Ellipse . . . . .                                  | 419        |
| C.2 Die Hyperbel . . . . .                                 | 424        |
| C.3 Die Parabel . . . . .                                  | 426        |
| C.4 Quadratische Formen . . . . .                          | 428        |
| C.5 Die Familie der Kegelschnitte . . . . .                | 429        |
| <b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>                         | <b>431</b> |
| <b>Index</b>   | <b>499</b> |

Die Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes, die diesen Vektorraum aufspannen, ist stets dieselbe und heißt *Dimension* dieses Vektorraums, und eine solche linear unabhängige Menge heißt *Basis* dieses Raumes.

### Beispiele von Vektorräumen:

**Die Translationen:** Die Translationen oder Verschiebungen im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  bilden den wohl bekanntesten Vektorraum, der meist schon in der Schule behandelt wird. Eine solche Translation  $T_a$  verschiebt alle Punkte parallel. Insbesondere wird der Nullpunkt mit den Koordinaten  $(0, 0, 0)$  in einem kartesischen Koordinatensystem in einen Punkt mit den Koordinaten  $(a_1, a_2, a_3)$  verschoben. Diese drei Zahlen  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , charakterisieren die Verschiebung in eindeutiger Weise. Ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten  $(r_1, r_2, r_3)$  wird durch  $T_a$  in den Punkt  $(r_1 + a_1, r_2 + a_2, r_3 + a_3)$  verschoben.

Eine Addition zweier Verschiebungen  $T_a$  und  $T_b$  erklärt man durch die Hintereinanderschaltung der beiden Operationen. Dabei wird der Nullpunkt zuerst durch  $T_a$  nach  $(a_1, a_2, a_3)$  und dann durch  $T_b$ , beschrieben durch  $(b_1, b_2, b_3)$ , nach  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$  verschoben. Formal schreibt man das als

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \quad (1.17)$$

Eine Multiplikation einer Translation  $T_a$  mit einer Zahl  $\alpha$  ist eine Verschiebung in die gleiche Richtung wie  $T_a$ , aber um den Faktor  $\alpha$  skaliert. Dadurch entsteht eine Translation, die den Nullpunkt nach  $(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$  verschiebt. Formal schreibt man das als

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3). \quad (1.18)$$

Es ist offensichtlich, dass diese Operationen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) erfüllen: Die Translationen bilden einen Vektorraum. Dieser Vektorraum ist dreidimensional: Die drei Translationen  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  sind linear unabhängig (Beweis?) und jede Translation  $(a_1, a_2, a_3)$  lässt sich durch eine Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen (Beweis?). Die drei Vektoren bilden also eine Basis.

Weiterhin kann man sich leicht davon überzeugen, dass man in genau der gleichen Weise Translationen in einem  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$  erklären kann, die man durch die  $n$  Koordinaten  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  beschreibt.

**Die Polynome:** Neben den Translationen erfüllen eine Reihe anderer mathematischer Strukturen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) und bilden folglich

einen Vektorraum. Viele dieser Vektorräume sind in der Physik von Bedeutung. Ein Beispiel eines solchen abstrakten Vektorraums ist die Menge aller Polynome

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j \quad (1.19)$$

mit  $\text{Grad } \leq n$ . In Anhang A wird gezeigt, dass diese Menge eine Vektorraumstruktur besitzt. Sie bildet einen Vektorraum der Dimension  $n + 1$ , und man kann daher mit diesen Polynomen rechnen wie mit Vektoren.

### 1.2.3 Das Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt*, das auch *inneres Produkt* genannt wird, ist ein Produkt zweier Vektoren, dessen Resultat eine Zahl ist, ein Skalar. Man kennzeichnet dieses Produkt durch einen Punkt. Es ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi. \quad (1.20)$$

Dabei ist  $\varphi$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren (vgl. Bild 1.5). Zunächst sollten wir uns überlegen, dass das Resultat dieses Produkts wirklich einen Skalar liefert, denn sowohl die Beträge der beiden Vektoren als auch der Winkel zwischen ihnen bleiben bei einer Drehung des Koordinatensystems unverändert, und dies war ja die Forderung an eine skalare Größe (vgl. Seite 19).

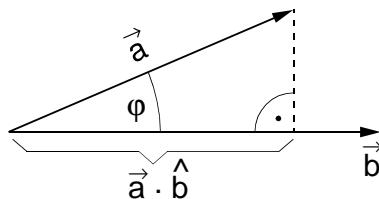


Bild 1.5: Skalarprodukt zweier Vektoren. Die Projektion eines Vektors  $\vec{a}$  auf die Richtung des Vektors  $\vec{b}$  hat die Länge  $\vec{a} \cdot \hat{\vec{b}} = a \cos \varphi$ .

**Eigenschaften des Skalarprodukts:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{kommutativ}) \quad (1.21)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{distributiv}) \quad (1.22)$$

$$\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) \quad (\text{homogen}) . \quad (1.23)$$

Einige Spezialfälle:

$$\vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \text{ parallel } \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

$$\vec{a} \text{ antiparallel } \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab \quad (1.24)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

$$\vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 .$$

Zwei Vektoren sind also *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.

Weiterhin gilt die *schwarzsche Ungleichung*

$$-ab \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq ab . \quad (1.25)$$

Man kann mithilfe des Skalarprodukts sehr einfach die *Projektion* eines Vektors  $\vec{a}$  auf eine Richtung (beschrieben durch einen Einheitsvektor  $\hat{b}$ ) definieren. Für den Wert dieser Projektion gilt

$$a_b = a \cos \varphi = \vec{a} \cdot \hat{b} \quad (1.26)$$

( $|\hat{b}| = 1$ ). Um den projizierten Vektor zu erhalten, multipliziert man einfach den Einheitsvektor  $\hat{b}$  mit dem Betrag  $a_b$ :

$$\vec{a}_b = a_b \hat{b} = (\vec{a} \cdot \hat{b}) \hat{b} . \quad (1.27)$$

Als Beispiel für eine Anwendung des Skalarprodukts beweisen wir den Kosinus-Satz: Für die Seitenlängen im Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma , \quad (1.28)$$

wobei der Winkel  $\gamma$  der Seite  $c$  gegenüberliegt (vgl. Bild 1.6). Der Beweis ist sehr einfach:

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma . \end{aligned} \quad (1.29)$$

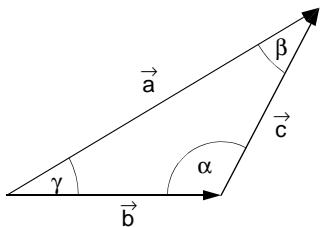


Bild 1.6: Dreieck aus den Vektoren  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  und  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ .

Man kann sogar sagen, dass man – sobald man das Skalarprodukt zur Verfügung hat – den Kosinus-Satz vergessen kann.

Hier sind wir bei der Definition des Skalarprodukts von der anschaulichen Bedeutung eines Vektors ausgegangen, der insbesondere eine Richtung im Raum besitzt. Der Winkel zwischen zwei solchen Vektoren ist dabei anschaulich klar. In einer abstrakteren Definition eines Vektorraums (vgl. Abschnitt 1.2.2) ist das aber nicht der Fall. Hier kann man das Skalarprodukt durch die Eigenschaften (1.21) – (1.23) sowie  $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$  für  $\vec{a} \neq \vec{0}$  definieren. Allerdings existiert ein solches Skalarprodukt nicht für jeden Vektorraum. Ein Beispiel für einen abstrakten Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist der Vektorraum der Polynome in Anhang A. Dort wird gezeigt, dass man sogar in abstrakter Weise einen „Winkel“ zwischen zwei Polynomen definieren kann.

#### 1.2.4 Das Vektorprodukt

Neben dem Skalarprodukt zweier Vektoren existiert im dreidimensionalen Fall  $\mathbb{R}^3$  noch ein zweites Produkt, dessen Resultat aber ein Vektor ist. Man nennt dieses *Vektorprodukt* auch *Kreuzprodukt* oder *äußeres Produkt*. Es ist definiert als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{mit} \quad c = ab |\sin \varphi|, \quad (1.30)$$

das heißt, der Betrag des Vektors  $\vec{c}$  ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms. Diese Fläche ist das Produkt der Länge der Grundseite  $a$  und der Höhe  $h = b |\sin \varphi|$ :

$$\text{Fläche} = ah = ab |\sin \varphi|. \quad (1.31)$$

Der Vektor  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  steht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht. Dabei wird diejenige der beiden dabei möglichen Richtungen von  $\vec{c}$  durch die *Rechtsschraubenregel* festgelegt: Dreht man den ersten Vektor,  $\vec{a}$ , des Vektorprodukts  $\vec{a} \times \vec{b}$  auf dem

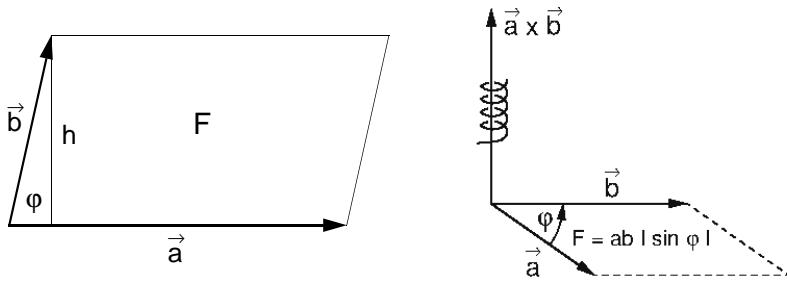


Bild 1.7: Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms, seine Richtung wird bestimmt durch die Rechtsschraubenregel.

kürzestem Weg in Richtung des zweiten Vektors,  $\vec{b}$ , so hat der Vektor  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  die Richtung, in der sich eine Rechtsschraube bei dieser Drehung fortbewegen würde. Alternativ kann man sich diese Richtung auch mittels der „Daumenregel der rechten Hand“ merken: Orientiert man die rechte Hand so, dass die Finger der Richtung vom ersten Vektor zum zweiten folgen, so zeigt der Daumen in Richtung des Vektorprodukts.

### Eigenschaften des Vektorprodukts:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{antikommutativ}) \quad (1.32)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{distributiv}) \quad (1.33)$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) \quad (\text{homogen}). \quad (1.34)$$

Bis auf den Vorzeichenwechsel bei der Vertauschung der Reihenfolge stimmen alle diese Rechenregeln mit denen des Skalarprodukts überein.

Einige Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b} &\implies |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \\ \vec{a} \text{ parallel } \vec{b} &\implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \text{ antiparallel zu } \vec{b} &\implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{b} &\implies \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} &\implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Als Beispiel für eine Anwendung des Vektorprodukts beweisen wir den Sinus-Satz: Für die Seitenlängen im Dreieck gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (1.36)$$

wobei der Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$  der Seite  $a$  bzw.  $b$  gegenüberliegt (vgl. Bild 1.6). Entsprechendes gilt für die anderen Seiten und Winkel. Der Beweis ist wieder einfach:

$$\begin{aligned} 2 \times \text{Fläche des Dreiecks} &= |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{c}| \\ &= ab \sin \gamma = cb \sin \alpha = ac \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Die letzte Gleichung liefert beispielsweise  $cb \sin \alpha = ac \sin \beta$  und nach Division durch  $c$  die gesuchte Gleichung (1.36).

### 1.2.5 Komponentendarstellung

Wir definieren im dreidimensionalen Raum drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, die wir mit

$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad (1.38)$$

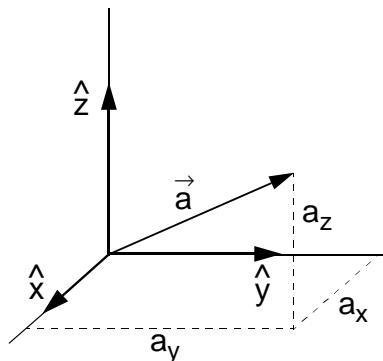


Bild 1.8: Die drei Einheitsvektoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  und  $\hat{z}$  stehen paarweise aufeinander senkrecht.

bezeichnen. Wie Bild 1.8 illustriert, wird dadurch das bekannte kartesische Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  erzeugt. Man sollte außerdem die Bezeichnungen so wählen, dass  $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$  gilt (ein so genanntes *Rechtssystem*). Es gilt also

$$\begin{aligned}\hat{x} \cdot \hat{x} &= \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \\ \hat{x} \cdot \hat{y} &= \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0\end{aligned}\tag{1.39}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \\ \hat{y} \times \hat{x} &= -\hat{z}, \quad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}, \quad \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}.\end{aligned}\tag{1.40}$$

Man sollte sich auch an andere Schreibweisen dieser Einheitsvektoren gewöhnen, die oft benutzt werden, wie etwa

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \quad \text{oder} \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \quad \text{oder auch} \quad \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3.\tag{1.41}$$

Dabei steht das  $e$  für „Einheitsvektor“ (in der englischsprachigen Literatur erscheint dann entsprechend  $u$  für „unit vector“). Weiterhin findet man auch  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ , oder allgemein  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ .

An dieser Stelle ist es angebracht, den dreidimensionalen Raum unserer Anschauung zu verallgemeinern. In einem Vektorraum der Dimension  $n$  (vgl. Seite 25) bildet ein System von  $n$  orthonormierten Vektoren  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$  eine orthonormierte *Basis*.

Wir notieren zur Übung einmal die Gleichungen (1.39) und (1.40) mithilfe der  $\hat{e}_i$  als

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \quad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k \quad \text{für} \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ zyklisch}\tag{1.42}$$

mit der zweckmäßigen Abkürzung

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},\tag{1.43}$$

dem *Kronecker-Symbol*. Dabei nennt man eine Reihenfolge  $(i j k)$  zyklisch, wenn sie eine gerade Permutation<sup>1</sup> von  $(1 2 3)$  darstellt, antizyklisch bei einer ungeraden Permutation; z.B. ist  $(3 1 2)$  eine gerade (zyklisch) und  $(2 1 3)$

---

<sup>1</sup>Eine Permutation ist eine Umordnung von Elementen. Man kann jede Permutation durch eine Folge von Vertauschungen zweier Elemente erzeugen. Ist deren Anzahl (un)gerade, nennt man die Permutation (un)gerade.

eine ungerade Permutation (antizyklisch); die Kombination (2 3 2) ist keines von beiden. Es gilt dann also auch

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = -\hat{e}_k \quad \text{für } i, j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ antizyklisch.} \quad (1.44)$$

Man kann nun jeden Vektor durch seine Komponenten bezüglich der orthogonalen Basis darstellen:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad (1.45)$$

mit

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}, \quad a_y = \vec{a} \cdot \hat{y}, \quad a_z = \vec{a} \cdot \hat{z}. \quad (1.46)$$

In einer abgekürzten Schreibweise notiert man nur die Komponenten in der Form

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z). \quad (1.47)$$

Man rechnet mit solchen Vektoren in der verkürzten Schreibweise wie

$$\begin{aligned} \alpha \vec{a} &= \alpha (a_x, a_y, a_z) = \alpha (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \\ &= (\alpha a_x) \hat{x} + (\alpha a_y) \hat{y} + (\alpha a_z) \hat{z} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z) \end{aligned} \quad (1.48)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) \\ &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} + b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z} \\ &= (a_x + b_x) \hat{x} + (a_y + b_y) \hat{y} + (a_z + b_z) \hat{z} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden Operationen für die Translationen im  $\mathbb{R}^3$  in (1.17) und (1.18) zeigt die Verwandtschaft dieser Darstellungen.

Die Komponentendarstellung des Skalarprodukts ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \cdot (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.50)$$

und speziell

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (1.51)$$

oder

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.52)$$

# Index

- a priori Wahrscheinlichkeit, 376
- abelsche Gruppe, 24
- Ablenkfunktion, 129
- Ablenkwinkel, 128
- abzählbar, 221
- Additionstheorem, 180, 200, 352, 416
- Aktivkohle, 230
- Algebra, 136
- ampèresches Gesetz, 271
- Anfangsbedingung, 94, 177, 181, 199
- Anordnungsmöglichkeiten, 402, 494
- antikommutativ, 29
- antizyklisch, 31, 137
- aperiodischer Grenzfall, 184
- assoziativ, 23
- Assoziativgesetz, 23, 135
- Asymptote, 128, 426
- Atomphysik, 121
- Attraktor, 209, 221
  - Einzugsbereich, 208, 226
  - Grenzyklus-, 189, 208, 209, 220
  - Punkt-, 185
  - seltsamer, 210, 221
- äußeres Produkt, 28
- Ausgleichsgerade, 76, 78
- Ausgleichsrechnung, 75
- Bahn
  - geschlossene, 119, 448
  - periodische, 119, 448
- Bahngeschwindigkeit, 53
- Bahnkurve, 39, 44, 94, 435
- barometrische Höhenformel, 400
- Basis, 25
- Bernoulli, 383
- Beschleunigung, 17, 44, 60
  - Radial-, 54
  - Winkel-, 54
- Bessel-Funktion, 342, 488
- Betrag
  - einer komplexen Zahl, 186, 413
  - eines Vektors, 18, 28, 122, 132
- Beugungsgitter, 371
- Bewegungsgleichung, 17, 94
  - im Phasenraum, 95
  - in Polarkoordinaten, 108
  - Newton'sche, 93
- Bifurkation, 210, 219
- Bifurkationsdiagramm, 210, 221
- Bilinearform, 344
- Binomial
  - Koeffizient, 380
  - Verteilung, 379, 380, 402, 494
- binomische Formel, 380
- Bits, 389
- Boltzmann
  - Konstante, 383, 394
  - Verteilung, 382, 394, 400
- Brennpunkt, 83, 101, 123, 420, 427

- Brennstrahl, 83, 423
- Cantor-Menge, 221, 228, 232, 466
- Chaos, 203
- chaotisch, 96, 222, 223, 466
- charakteristische Gleichung, 141, 182, 195
- charakteristisches Polynom, 142
- Computerprogramm, 217, 307
- cosh, 184
- Coulomb
- Eichung, 307
  - Feld, 87, 120
  - Potential, 302, 481
  - Streuung, 129
- Daumenregel, 29
- Delta-Funktion, 281, 295, 299, 363, 477, 478
- dreidimensional, 289
- Eigenschaften, 285
- Determinante, 33, 136, 147, 152
- Funktional-, 256
  - Jacobi-, 256
  - Wronski-, 169, 173
- Diagonalform, 158, 159, 161, 166, 452
- Dichteverteilung, 78, 342, 437
- Dielektrizitätskonstante, 120, 234
- Differential, 42
- totales, 48, 82, 109, 242, 244, 275, 278, 470
- Differentialform, 242, 275
- Differentialgleichung, 94
- erster Ordnung, 95, 168
  - homogene, 168, 176, 179
  - inhomogene, 175, 176, 179, 453, 454
  - lineare, 167
  - logistische, 211
  - numerische Lösung, 203, 307, 322, 341
- Ordnung, 94
- Randbedingungen, 177
- zweiter Ordnung, 94, 168
- Differentialquotient, 39, 43, 205
- Differentiation, 39
- Diffusionsgleichung, 297, 317, 342
- allgemeine Lösung, 321
  - eindimensional, 484
  - numerische Lösung, 322
- Diffusionskonstante, 317
- Dimension, 25
- Dipolfeld, 234, 277, 468, 469
- Dipolmoment, 235, 291, 304, 305
- Dirac, Paul, 281, 299
- Diskretisierung
- der ersten Ableitung, 205
  - der zweiten Ableitung, 308, 312
- Distribution, 281, 292
- distributiv, 23, 27, 29
- Distributivgesetz, 135
- Divergenz, 79, 85, 258, 440
- in krummlinigen Koordinaten, 267, 269
  - Integraldarstellung, 258
  - Komponentendarstellung, 85
  - Rechenregeln, 85, 89
- doppelte Rotation, 89, 92, 443
- doppeltes Vektorprodukt, 37, 38, 121, 306
- Drehimpuls, 111, 120, 446
- Barriere, 118
  - Erhaltung, 115, 117, 119, 120, 126
- Drehmatrix, 146, 151, 154, 200, 450
- Drehung, 19, 63, 145, 152, 165, 428, 433
- Dreieck-Abbildung, 464
- Dreieckschwingung, 356
- Dreieckspyramide, 249
- Dreiecksungleichung, 62, 431
- Duffing-Oszillator, 206, 220, 231, 463

- dyadisches Produkt, 145, 151  
Dynamik, 93, 96  
  chaotische, 223  
  im Phasenraum, 190  
  nichtlineare, 203, 207  
  reguläre, 223  
  
ebene Polarkoordinaten, 51, 63, 423, 425, 427  
ebene Welle, 340  
Effektivenergie, 116  
Effektivpotential, 116  
Eichtransformation, 315  
Eichung, 307, 315, 316  
Eigenfrequenz, 195, 197, 334, 342  
Eigenmode, 334, 342, 343, 486  
Eigenschwingung, 334  
Eigenvektor, 139, 141, 144, 164, 165, 191, 195  
Eigenwert, 139, 141, 143, 164, 165, 191, 201  
einfach zusammenhängend, 241  
Einhüllende, 100, 130  
Einheitskreis, 414  
Einheitskugel, 60  
Einheitsmatrix, 136  
Einheitsvektor, 20–22, 31, 52, 436  
Einschwingvorgang, 188  
Einstein, Albert, 18  
Einstein-Temperatur, 396  
Einzugsbereich, 208, 226  
Elastizitätsmodul, 333  
Elementarereignis, 376  
Elementarmagnet, 396  
Elementarwelle, 371  
Ellipse, 83, 123, 181, 419, 434  
  Brennpunkte, 419  
  Brennpunkteigenschaft, 423  
  Definition, 419  
  Flächeninhalt, 424  
Halbachse, 420, 421  
Parameter, 421  
elliptisches Integral, 106  
endlicher Wellenzug, 366  
Energie  
  der Rotation, 109  
  effektive, 116  
  kinetische, 97, 109  
  mittlere, 390, 394, 395, 398  
  potentielle, 97  
Entartung, 142, 339  
Entropie, 383, 387, 397, 401  
  -satz, 401  
  Eigenschaften, 388  
Entwicklungssatz, 38, 121, 442  
Ereignis, 384  
Ereignisraum, 376  
Erhaltungsgröße, 96, 112  
erzeugende Funktion, 345  
erzwungene Schwingung, 185, 187  
Euler-Verfahren, 205, 231, 462  
Euler-Winkel, 153  
eulersche Formel, 414  
Exponentialdarstellung, 164  
Exzentrizität, 123, 125, 127, 128, 439  
  
Fadenkonstruktion, 420  
Faltung, 364  
Faltungssatz, 364  
Fast-Fourier-Transformation, 374  
Federkonstante, 102  
Federpendel, 101  
Fehler, 65, 378  
  mittlerer, 78  
  relativer, 75  
  statistischer, 65  
  systematischer, 65  
Fehlerfortpflanzung, 73  
Fehlerfortpflanzungsgesetz, 74  
Fehlerrechnung, 65, 378

- Fehlerwachstum, 223
- Feigenbaum-Konstante, 220
- Feld
  - Coulomb-, 120
  - Dipol-, 234, 277, 468, 469
  - Radial-, 87, 121, 234
  - Skalar-, 79
  - Vektor-, 79
- Feldlinie, 233
- Fermi-Fragen, 498
- FFT, 374
- Fixpunkt, 107, 214, 217, 232, 465
  - Stabilität, 107, 218, 465
- Flächenelement, 55, 246
  - in krummlinigen Koordinaten, 62, 64, 252, 436
- Flächeninhalt, 255, 424
- Flächenintegral, 245
- Flächennormale, 252
- Flächensatz, 126
- Fluss, 236, 253, 258, 261
- Flussdichte, 258
- Formel von Moivre, 232, 415
- Fourier
  - Differentiation, 493
  - Reihe, 351, 374, 490
  - Transformation, 361, 374, 491, 492
- Fourier-Reihe
  - Konvergenz, 353
- Fraktal, 211, 225, 466
- Fraktaledimension, 227, 232, 466
- Freiheitsgrad, 95
- Fundamentalsatz der Algebra, 418
- Funktion
  - gerade, 287, 345, 350
  - ungerade, 207, 345, 350
  - verallgemeinerte, 281
- Funktional, 293
- Funktionaldeterminante, 256
- Funktionenraum, 343
- Gärtnerkonstruktion, 420
- Gas, ideales, 397
- Gasgleichung, 398
- Gauß
  - Funktion, 284
  - Puls, 367
  - Verteilung, 68, 381
- Gebiet, 241, 274
- gekoppelte Schwingungen, 193
- gerade
  - Funktion, 345, 350
  - Permutation, 31, 138
- Gesamt
  - drehimpuls, 112, 114
  - energie, 97, 109, 115
  - impuls, 112, 114
  - masse, 112, 113
  - teilchenzahl, 317
- Geschwindigkeit, 44, 60
- Geschwindigkeitsverteilung, 400
- gibbssches Phänomen, 355
- Gitter, 371, 492
- gleichförmige Kreisbewegung, 446
- Gleichungssystem, lineares, 136
- Gleichverteilung, 388
- Grad eines Polynoms, 405
- Gradient, 79, 80, 82, 151, 266, 438
  - in krummlinigen Koordinaten, 269
  - Komponentendarstellung, 80
  - Rechenregeln, 80
- Gradientenfeld, 81, 87, 90, 97, 275, 278
- Gravitationsfeld, 87, 110
- Gravitationskonstante, 120, 234
- Gravitationspotential, 81
- greensche Formel, 299
- greenscher Satz, 265
- Grenzfall, aperiodischer, 184
- Grenzwertsatz, 378
- Grenzzyklus, 189, 190, 208, 209, 220
- Grundgesamtheit, 72, 78

- Gruppe, 24  
abelsche, 24  
der Drehungen, 148, 165  
kommutative, 24
- Häufigkeit, 382
- Häufigkeitsverteilung, 382
- Halbachse, 124, 420, 421
- Halbschritt-Verfahren, 206, 231, 462
- Halbwertsbreite, 70
- harmonischer Oszillator, 102, 178, 395, 445
- Hauptachse, 166
- Hauptsatz der Vektoranalysis, 276
- Hauptträgheitsachse, 145, 450
- Hauptträgheitsmoment, 145, 166, 451
- Heaviside-Funktion, 286
- Helmholtz-Gleichung, 297
- helmholtzscher Zerlegungssatz, 276
- Hermite  
-Funktionen, 351  
-Polynome, 349, 350
- hermitesch, 344
- Histogramm, 67, 71
- homogen, 27, 29  
Differentialgleichung, 168, 176, 179  
Feld, 98  
Ladungsverteilung, 290
- Hyperbel, 123, 424  
Asymptoten, 426  
Brennpunkte, 424  
Brennpunkteigenschaft, 426  
Definition, 424
- ideales Gas, 397
- imaginäre Einheit, 410
- Imaginärteil, 409
- Impuls, 111
- Impulssatz, 111
- Information, 389
- Informationsentropie, 387
- Informationstheorie, 383
- inhomogene Differentialgleichung, 175, 176, 179
- Inhomogenität, 179
- inneres Produkt, 26
- Integraldarstellung  
der Divergenz, 258  
der Rotation, 261
- Invarianz, 18, 63
- inverse Matrix, 138, 449
- Irreversibilität, 401
- Iteration, 309
- iterierte Abbildung, 214, 231, 232
- Jacobi-Determinante, 256
- Jacobi-Identität, 39
- Jaynes, E.T., 384
- Julia-Menge, 232, 467
- Körper, 24, 412
- Küstenlänge, 226, 227, 230
- kartesisches Koordinatensystem, 31
- Kastenfunktion, 282
- Kaustik, 100, 130, 131, 444
- Kegelschnitte, 123, 419, 429, 439
- Kepler-Ellipse, 124
- Kepler-Potential  
n-dimensional, 87, 92, 443
- Kepler-Problem, 120  
n-dimensional, 448
- keplersche Gesetze, 124, 126, 127
- Kettenregel, 47, 60, 152, 201, 267
- Kippschwingung, 357
- Knotenlinie, 153
- kommutativ, 22, 23, 27
- kommutative Gruppe, 24
- Kommutator, 135
- komplexe Wurzeln, 416
- komplexe Zahlen, 409  
Addition, 409  
Betrag, 413

- komplex konjugierte Zahl, 186
- Multiplikation, 409
- Polarendarstellung, 186, 414
- Rechenregeln, 412
- komplexe Zahlenebene, 414
- Komponentendarstellung, 30
  - Divergenz, 85
  - Gradient, 80
  - Rotation, 88
  - Skalarprodukt, 32
  - Spatprodukt, 36
  - Vektorprodukt, 33
- Kompositionssregel, 384
- Konfidenzintervall, 70
- konfokal, 91
- konjugiert komplexe Zahl, 412
- Konstante der Bewegung, 96
- Kontinuitätsgleichung, 274
- konvexe Hülle, 392
- Koordinaten, 17
  - transformation, 18
  - kartesische, 31
  - krummlinige, 50, 61, 256, 265
  - Kugel-, 56
  - Normal-, 195, 198
  - parabolische, 64, 435
  - Polar-, 51
  - Zylinder-, 55
- Koordinatensystem, 17, 19
  - orthogonales, 61
- Kosinus hyperbolicus, 184
- Kosinus-Satz, 27
- Kraft, 17, 93
- Kraftfeld, 79, 93, 277, 469
- Kraftstoß, 296, 479
- Kreisbewegung
  - gleichförmige, 446
- Kreisfläche, 248
- Kreisfrequenz, 330
- Kreismembran, 342, 487
- Kreuzprodukt, 28
- Kriechfall, 184
- Kronecker-Symbol, 31
- krummlinige Koordinaten, 50, 61, 256, 265
- Kugelkoordinaten, 56
- Kurvenintegral, 236, 277, 469, 470
  - wegunabhängiges, 470
- Längenelement, 55, 59, 62
- Ladungsverteilung, 290, 301, 341, 476, 480
- Lagrange
  - Multiplikator, 391, 393
  - Parameter, 391, 393
- Laguerre-Polynome, 349
- Laplace, P.-S., 382
- Laplace-Gleichung, 297, 310
- Laplace-Operator, 87, 90, 277, 298
  - in krummlinigen Koordinaten, 268, 269
- Leapfrog-Verfahren, 206
- Legendre-Polynome, 344, 349, 373, 408, 489
- leibnizsche Reihe, 357
- Leistung, 190
- Lenz-Runge-Vektor, 120
- Lenz-Vektor, 120, 122
- Levi-Civita-Symbol, 34
- Lewis-Invariante, 176, 455
- Lichtgeschwindigkeit, 270
- linear
  - Abbildung, 138
  - abhängig, 24, 37
  - Algebra, 96
  - Differentialgleichung, 167
  - Fit, 438
  - Gleichungssystem, 136
  - Hülle, 24
  - Raum, 18, 20, 24, 63, 293, 406

- Schwingungen, 177
- unabhängig, 24
- Linearform, 344
- Linearkombination, 24, 37, 63, 168
- Linienelement, 50, 55, 56, 59, 62, 64, 436
- Linienstrom, 235
- logistische Abbildung, 214
- logistische Differentialgleichung, 211
- lokal orthogonal, 61, 250
- Longitudinalwelle, 332
- Lorentz
  - Eichung, 316
  - Kraft, 95
  - Kurve, 284, 360, 491
  - Verteilung, 70, 371
- Lyapunov-Exponent, 222, 232, 466
- Magnetfeld, 235, 271, 279, 341, 396, 476, 481
- magnetisches Moment, 396
- Magnetisierung, 396
- Mandelbrot-Abbildung, 232, 467
- Mandelbrot-Menge, 231, 232, 467
- Masse, 17, 93
- Massepunkt, 60, 93
- mathematisches Pendel, 103, 207
- Mathieu-Gleichung, 167
- Matrix, 133
  - Addition, 134
  - Diagonalisierung, 157
  - Funktion, 161, 166, 453
  - Multiplikation, 134
  - inverse, 138, 449, 451
  - nicht-diagonalisierbare, 451
  - orthogonale, 147
  - Rechenregeln, 135
  - symmetrische, 143
  - transponierte, 136
- maximale Unbestimmtheit, 389
- Maxwell-Boltzmann-Verteilung, 400
- Maxwell-Gleichung
  - differentiell, 270
  - integral, 270
  - zeitabhängig, 270, 314
- Membran, 327
  - schwingung, 327, 337, 342, 487
- Kreis-, 342
- Rechteck-, 337
- Mittelwert, 66, 69, 70, 72, 78, 381, 391, 402, 437, 494, 495
- Mittelwertsatz
  - der Differentialrechnung, 285
  - der Integralrechnung, 259
- mittlere Abweichung vom Mittelwert, 381, 402
- mittlere Energie, 399
- Moivre, Formel von, 232, 415
- Molekülschwingung, 201, 459
- Multipolentwicklung, 140, 303, 305, 348
- Nabla-Operator, 80
  - in krummlinige Koordinaten, 266
- Nats, 387
- neutrales Element, 23
- nichtlineare
  - Differentialgleichung, 96
  - Dynamik, 203
  - Schwingung, 206
- nirgends dicht, 221
- Normal
  - koordinaten, 195, 198
  - schwingungen, 196
  - verteilung, 68
- Normale, 83, 424
- Nullvektor, 22
- numerische Exzentrizität, 421
- numerische Methoden, 203–206, 307–314, 322, 323, 341, 483
- Oberflächenintegral, 250, 253, 472

- orthogonal, 144, 343
  - Funktionen, 343, 487
  - Koordinatensysteme, 61
  - Polynome, 344
  - Vektoren, 27, 29, 59
- Orthogonalitätsrelation, 352
- Ortsvektor, 95
- Oszillator
  - angetriebener, 178, 359, 457
  - dreidimensionaler, 132, 447
  - Duffing-, 206, 231, 463
  - gepulster, 370
  - harmonischer, 102, 178, 201, 395, 445
- Parabel, 98, 101, 123, 426
  - Brennpunkt, 427, 428
  - Definition, 426
  - Parameter, 427
- parabolische Koordinaten, 435
- Parallelepiped, 35, 63
- Parallelflächner, 35
- Parameter, 123, 421, 427
- Parität, 350
- Parseval-Identität, 359, 363
- partielle
  - Ableitung, 46
  - Integration, 265, 294
- partielle Differentialgleichung, 297
- Pendel
  - Feder-, 101
  - mathematisches, 103, 207
- Periode, 102
- Periodenverdopplung, 210, 219
- Permutation, 31, 402, 494
  - (anti)zyklische, 138
  - (un)gerade, 138
- Phasen
  - bahn, 95, 107, 181
  - raum, 95, 107, 111, 181, 190, 204
- verschiebung, 187
- winkel, 186
- plancksches Wirkungsquantum, 395, 399
- Poincaré-Abbildung, 208
- Poincaré-Schnitt, 208
- Poisson
  - Gleichung, 277, 297, 298, 306, 307, 312, 341, 476, 482, 483
  - Integral, 301
  - Verteilung, 381, 403, 495, 496
- Polardarstellung, 416, 430
  - komplexe Zahlen, 186
- Polarkoordinaten
  - ebene, 51, 63, 423, 425, 427
  - sphärische, 57
- Polynom, 25, 344, 349, 405, 406
- Populationsdynamik, 213
- Potential, 81, 97, 120, 273
- Potenzreihe, 163
- Prinzip maximaler Unbestimmtheit, 383, 390, 401
- Prinzip vom nicht zureichenden Grunde, 383
- Projektion, 26, 27
- Punktattraktor, 185
- Punktladung, 120, 234, 290, 299
- Punktmasse, 81, 234
- Punktquelle, 81, 84, 87
- quadratische Form, 428, 447
- Quadrupolfeld, 305
- Quadrupolmoment, 305
- Quadrupoltensor, 305
- Quantenmechanik, 121, 135, 297, 368, 390
- Quellenfeld, 258, 276
- quellenfrei, 87, 89, 90
- Quellstärke, 85, 236, 258, 263, 270, 276
- Rückstellkraft, 102
- Radialbeschleunigung, 54

- Radialfeld, 87, 121, 234  
Radialgeschwindigkeit, 53  
radialsymmetrisch, 115  
Randbedingung, 94, 177, 313, 331–333, 337, 342  
Random Walk, 324  
Ratengleichung, 323, 342, 401, 485  
Raumwinkelelement, 60, 253  
Realteil, 409  
Rechenregeln, 89  
    Divergenz, 85, 89  
    Gradient, 80  
    komplexe Zahlen, 412  
    Matrizen, 135  
    Rotation, 88, 89  
    Skalarprodukt, 27  
    Vektorprodukt, 29  
Rechteck-Puls, 365  
Rechteckmembran, 337  
Rechteckschwingung, 354  
Rechtsschraubenregel, 28  
Rechtssystem, 31, 56  
reduzierte Masse, 113  
reelle Zahlen, 24  
Regel von Sarrus, 137  
reguläre Dynamik, 223  
Reibung, 95, 167, 178, 182–184, 188, 189  
Rekursion, 349, 350, 373, 489  
Relativdrehimpuls, 114, 131  
Relativimpuls, 114  
Relativitätstheorie, 18  
Relativkoordinate, 113  
Relaxations  
    -gleichung, 313  
    -parameter, 312  
    -verfahren, 312, 341, 483  
Resonanz, 187, 188, 458  
Restglied, 41  
reziproker Abstand, 304, 348  
Rosettenbahn, 119  
Rotation, 79, 88, 244, 260, 440, 442  
    in krummlinigen Koordinaten, 268, 269  
    Integraldarstellung, 261  
    Komponentendarstellung, 88  
    Rechenregeln, 88, 89  
Rotationsenergie, 109  
Sarrus, Regel von, 137  
Satz  
    von Fischer-Riesz, 350  
    von Gauß, 263, 278, 473  
    von Green, 265  
    von Pythagoras, 421, 422  
    von Schwarz, 47, 91, 242  
    von Stokes, 264, 271, 278, 473  
    von Thales, 62, 431  
Schaukel, 167  
Scheitelförmig, 98  
Schmetterlingseffekt, 225  
schräger Wurf, 98  
Schrödinger-Gleichung, 297  
Schwarz, Satz von, 47, 91, 242  
schwarzsche Ungleichung, 27  
Schwebung, 199  
Schwerefeld, 98  
Schwerpunkt, 112, 113  
Schwingfall, 182  
Schwingung  
    Dreieck-, 356  
    erzwungene, 185, 187  
    freie, 179  
    gedämpfte, 456  
    gekoppelte, 193, 459  
    harmonische, 102, 178, 456, 479  
    Kipp-, 357  
    lineare, 177  
    nichtlineare, 206  
    Normal-, 196

- Rechteck-, 354
- Schwingungsdauer, 102, 104, 131, 445
- Schwingungsgleichung, 296
  - allgemeine Lösung, 334
- Schwingungsknoten, 330, 334
- Schwingungsmodus, 338
- selbstähnlich, 221, 225
- seltsamer Attraktor, 210, 221
- Separationsansatz, 330
- Separatrix, 107
- Sierpinski
  - Dreieck, 229
  - Quadrat, 232, 467
  - Schwamm, 229, 232, 466
- sinh, 184
- Sinus hyperbolicus, 184
- Sinus-Satz, 30
- Skalar, 19, 63
- Skalarfeld, 79
- Skalarprodukt, 26, 63, 343, 406, 432, 439
  - Komponentendarstellung, 32
  - Rechenregeln, 27
- Skalengesetz, 228, 362
- Spalt, 372
- Spaltenvektor, 135, 149, 159, 165, 449
- Spannung, 333
- Spat, 35
- Spatprodukt, 34
- Spektralanalyse, 359
- spezifische Wärme, 397
- sphärische Polarkoordinaten, 57
  - Divergenz, 269
  - Gradient, 269
  - Laplace-Operator, 269
  - Rotation, 269
- Spiegelung, 138
- Sprungfunktion, 286, 296
- Spur, 140, 152, 157, 305, 449
- stückweise glatt, 358
- stückweise stetig, 353
- Stabilität von Fixpunkten, 107, 218, 232, 465
- Standardabweichung, 72, 78, 436
- statistische Physik, 375
- stirlingsche Näherung, 379
- Stoßkaskade, 229
- Stoßparameter, 128
- Strahlenoptik, 100
- Streckschwingung, 461
- Streubahn, 118, 128
- Streuwinkel, 128
- stroboskopisch, 208
- Stromdichte, 341, 481
- Stufenfunktion, 286, 295
- Symbol
  - Kronecker, 31
  - Levi-Civita, 34
- symmetrisch, 139, 140, 143, 449
- Szenario, 219
- Tangente, 95
- Tangentialvektor, 44
- Taylor-Reihe, 41, 106, 140, 163, 304, 346
- Teilchenfluss, 253
- Teilchensystem, 94
- Temperatur, 383, 394
- temperierte Distribution, 293
- Tensor, 18, 20, 145, 151, 305
  - total antisymmetrischer, 34
- Testfunktion, 292
- total antisymmetrischer Tensor, 34
- totales Differential, 48, 82, 109, 242, 244, 275, 278, 470
- Trägheitsmoment, 145
- Trägheitstensor, 145, 151, 165, 166, 450
- Transformation, 19, 256
  - auf Diagonalform, 158, 159, 161, 166, 452

- von Matrizen, 150
- von Vektoren, 148
- von Volumenelementen, 257
- Translation, 20, 25
- Transmissionsfunktion, 371
- transponierte Matrix, 136
- Transversalschwingung, 327
- Trennung der Variablen, 212
- Tschebyscheff-Polynome, 349
- Umkehrpunkt, 118, 131, 445
- Umlaufzeit, 108
- Unbestimmtheit, 383, 384, 389
- ungerade
  - Funktion, 345, 350
  - Permutation, 31, 138
- universell, 210, 215, 220
- Unschärferelation, 368, 374, 493
- Varianz, 72, 378, 403
- Vektor, 18, 20, 22
- Vektoranalysis, 79
- Vektorfeld, 79, 93, 233
- Vektorpotential, 306, 314, 481
- Vektorprodukt, 28, 63, 432, 442
  - doppeltes, 37
  - Komponentendarstellung, 33
  - Rechenregeln, 29
- Vektorraum, 20, 24, 343
- verallgemeinerte Funktion, 281, 292
- Verhulst-Gleichung, 214
- Verschiebung, 20, 25
- Verschiebungsrelation, 362
- Vertauschung, 449
- Vertauschungsrelation, 36
- Verteilung
  - Binomial-, 379, 380, 402, 494
  - Boltzmann-, 382, 394, 400
  - Gauß-, 381
  - Poisson-, 381, 403, 495, 496
- Vertrauensintervall, 70
- vollständige Induktion, 158, 162
- Vollständigkeit, 349, 373, 489
- Volumenelement, 56, 59, 62, 246, 257
- Volumenintegral, 245
- Wärme, spezifische, 397
- Wärmeleitungsgleichung, 323
- Wahrscheinlichkeit, 375, 382
  - a priori, 376
- Wahrscheinlichkeitstheorie, 382
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, 378–383,
  - 385, 390, 391, 393–396, 398, 399, 401
- Wegabhängigkeit von Kurvenintegralen, 241, 244, 274
- wegzusammenhängend, 241
- Welle
  - ebene, 340
  - eindimensionale, 327
  - harmonische, 329
  - Longitudinal-, 332
  - stehende, 330
- Wellengleichung, 297, 316, 326
  - dreidimensional, 340
  - eindimensional, 342, 486
  - zweidimensional, 336
- Wellenlänge, 329
- Wellenprofil, 328
- Wellenzahl, 329
- Winkelbeschleunigung, 54
- Winkelgeschwindigkeit, 54
- Wirbelfeld, 90, 260, 276
- wirbelfrei, 89, 90
- Wirbelstärke, 261, 276
- Wronski-Determinante, 169, 173
- Wurf, 98, 99, 131
- Zahlen
  - komplexe, 409
  - reelle, 24
- Zahlenebene, 410

Zeitentwicklungsma $\xi$ trix, 173, 191  
Zeitentwicklungsoperator, 173  
zentraler Grenzwertsatz, 378  
Zentralpotential, 120  
zentralsymmetrisch, 115  
Zerlegungssatz, 276  
Zirkulation, 235, 241, 260, 475  
zufällig, 216, 324, 378  
Zungenfrequenzmesser, 361  
zusammenhängend, 241, 274  
Zustand, 384  
Zustandssumme, 383, 391, 397, 398  
Zweiteilchensystem, 113  
zyklisch, 31, 137  
Zylinderkondensator, 271  
Zylinderkoordinaten, 55  
    Divergenz, 269  
    Gradient, 269  
    Laplace-Operator, 269  
    Rotation, 269