12. Klasse

FOS·BOS
Fachabitur Bayern 2021

Mathematik Nichttechnik

- Ideal für Homeschooling geeignet -

LehrplanPLUS

INKLUSIVE:

- ✓ Miniskript mit zusätzlichen Übungen nach jedem Themengebiet
- ✓ Prüfungsaufgaben angepasst an den neuen LehrplanPLUS
- ✓ Musterprüfungen im Stil der neuen Abi-Prüfung sowie
- ✓ kostenloser Downloadbereich per QR-Code

SCAN ME

FOS·BOS 12

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

lernverlag®
www.lern-verlag.de

2020 2021 Schuljahresplaner

September	Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli
1 Di	1 Do	**1 So** Allerheiligen	1 Di	**1 Fr** Neujahr	1 Mo 5	1 Mo 9	1 Do	**1 Sa** Tag der Arbeit	1 Di	1 Do
2 Mi	2 Fr	2 Mo 45	2 Mi	**2 Sa**	2 Di	2 Di	**2 Fr** Karfreitag	**2 So**	2 Mi	2 Fr
3 Do	**3 Sa** Tag der Dt. Einheit	3 Di	3 Do	**3 So**	3 Mi	3 Mi	**3 Sa**	3 Mo 18	3 Do Fronleichnam	**3 Sa**
4 Fr	**4 So**	4 Mi	4 Fr	4 Mo 1	4 Do	4 Do	**4 So** Ostern	4 Di	4 Fr	**4 So**
5 Sa	5 Mo 41	5 Do	**5 Sa**	5 Di	5 Fr	5 Fr	**5 Mo** Ostermontag 14	5 Mi	**5 Sa**	5 Mo 27
6 So	6 Di	6 Fr	**6 So**	6 Mi Heilige Drei Könige	**6 Sa**	**6 Sa**	6 Di	6 Do	**6 So**	6 Di
7 Mo 37	7 Mi	**7 Sa**	7 Mo 50	7 Do	**7 So**	**7 So**	7 Mi	7 Fr	7 Mo 23	7 Mi
8 Di	8 Do	**8 So**	8 Di	8 Fr	8 Mo 6	8 Mo 10	8 Do	**8 Sa**	8 Di	8 Do
9 Mi	9 Fr	9 Mo 46	9 Mi	**9 Sa**	9 Di	9 Di	9 Fr	**9 So** Muttertag	9 Mi	9 Fr
10 Do	**10 Sa**	10 Di	10 Do	**10 So**	10 Mi	10 Mi	**10 Sa**	10 Mo 19	10 Do	**10 Sa**
11 Fr	**11 So**	11 Mi	11 Fr	11 Mo 2	11 Do	11 Do	**11 So**	11 Di	11 Fr	**11 So**
12 Sa	12 Mo 42	12 Do	**12 Sa**	12 Di	12 Fr	12 Fr	12 Mo 15	12 Mi	**12 Sa**	12 Mo 28
13 So	13 Di	13 Fr	**13 So**	13 Mi	**13 Sa**	**13 Sa**	13 Di	**13 Do** Christi Himmelfahrt	**13 So**	13 Di
14 Mo 38	14 Mi	**14 Sa**	14 Mo 51	14 Do	**14 So**	**14 So**	14 Mi	14 Fr	14 Mo 24	14 Mi
15 Di	15 Do	**15 So**	15 Di	15 Fr	15 Mo Rosenmontag 7	15 Mo 11	15 Do	**15 Sa**	15 Di	15 Do
16 Mi	16 Fr	16 Mo 47	16 Mi	**16 Sa**	16 Di	16 Di	16 Fr	**16 So**	16 Mi	16 Fr
17 Do	**17 Sa**	17 Di	17 Do	**17 So**	17 Mi	17 Mi	**17 Sa**	17 Mo **Deutsch** 20	17 Do	**17 Sa**
18 Fr	**18 So**	18 Mi	18 Fr	18 Mo 3	18 Do	18 Do	**18 So**	18 Di **BwR, IBV, Bio, Physik, PäPsy**	18 Fr	**18 So**
19 Sa	19 Mo 43	19 Do	**19 Sa**	19 Di	19 Fr	19 Fr	19 Mo 16	19 Mi	**19 Sa**	19 Mo 29
20 So	20 Di	20 Fr	**20 So**	20 Mi	**20 Sa**	**20 Sa**	20 Di	20 Do **Englisch**	**20 So**	20 Di
21 Mo 39	21 Mi	**21 Sa**	21 Mo 52	21 Do	**21 So**	**21 So**	21 Mi	21 Fr **Mathematik**	21 Mo 25	21 Mi
22 Di	22 Do	**22 So**	22 Di	22 Fr	22 Mo 8	22 Mo 12	22 Do	**22 Sa**	22 Di	22 Do
23 Mi	23 Fr	23 Mo 48	23 Mi	**23 Sa**	23 Di	23 Di	23 Fr	**23 So** Pfingsten	23 Mi	23 Fr
24 Do	**24 Sa**	24 Di	24 Do Heiligabend	**24 So**	24 Mi	24 Mi	**24 Sa**	**24 Mo** Pfingstmontag 21	24 Do	**24 Sa**
25 Fr	**25 So** Ende der Sommerzeit	25 Mi	**25 Fr** 1. Weihnachtstag	25 Mo 4	25 Do	25 Do	**25 So**	25 Di	25 Fr	**25 So**
26 Sa	26 Mo 44	26 Do	**26 Sa** 2. Weihnachtstag	26 Di	26 Fr	26 Fr	26 Mo 17	26 Mi	**26 Sa**	26 Mo 30
27 So	27 Di	27 Fr	**27 So**	27 Mi	**27 Sa**	**27 Sa**	27 Di	27 Do	**27 So**	27 Di
28 Mo 40	28 Mi	**28 Sa**	28 Mo 53	28 Do	**28 So**	**28 So** Beginn der Sommerzeit	28 Mi	28 Fr	28 Mo 26	28 Mi
29 Di	29 Do	**29 So** 1. Advent	29 Di	29 Fr		29 Mo 13	29 Do	**29 Sa**	29 Di	29 Do
30 Mi	30 Fr	30 Mo 49	30 Mi	**30 Sa**		30 Di	30 Fr	**30 So**	30 Mi	30 Fr
	31 Sa Reformationstag		31 Do Silvester	**31 So**		31 Mi		31 Mo 22		**31 Sa**

Sonn- und Feiertage · Ferien · Abschlussprüfungen

Abiturprüfung
Mathematik Nichttechnik
FOS | BOS 12
Bayern 2021
erstellt

für Schülerinnen und Schüler der Beruflichen Oberschule nichttechnischer Zweig in Bayern.

Nach dem neuen LehrplanPLUS

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Band **Abiturprüfung Mathematik Nichttechnik FOS/BOS Bayern 12. Klasse** sind die letzten drei zentral gestellten Original-Prüfungen der Jahre 2018 bis 2020 enthalten. Weiterhin wurde eine Musterprüfung nach dem neuen LehrplanPLUS erstellt. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die **Abschlussprüfung 2021** findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **21.05.2021** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2020)
Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

LehrplanPLUS

Aufgrund des neuen LehrplanPLUS wurden Musterprüfungen zu Übungszwecken erstellt. Die Prüfungsaufgaben älterer Jahrgänge wurden nach LehrplanPLUS angepasst.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorebreitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag. lern.de und cleverlag sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StR Verena Reffler (Berufliche Oberschule Memmingen), Sascha Jankovic, Simon Rümmler und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

6. überarb. Auflage © 2020 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0060-5
Artikelnummer:
EAN 9783743000605

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis

Seite

MINISKRIPT - Stochastik

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2021

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2021 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant:

- Aus LB 3: Kurvendiskussion von Funktion der Form $x \mapsto f(x) \cdot e^{g(x)} + y_0$
- Aus LB 4: Stammfunktionen für Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot e^{c \cdot (x-d)} + y_0$

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**“ zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

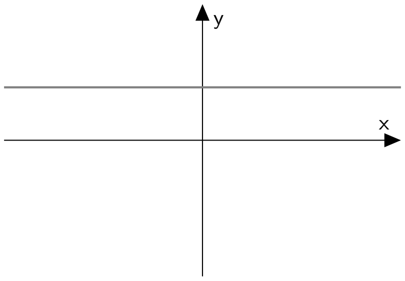
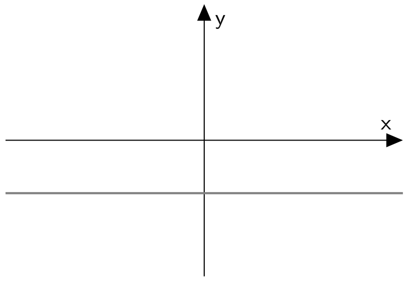
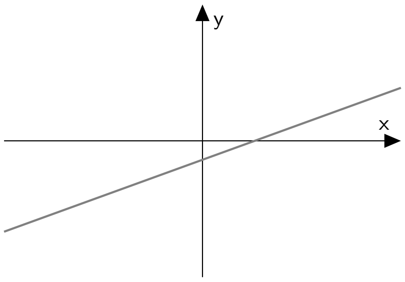
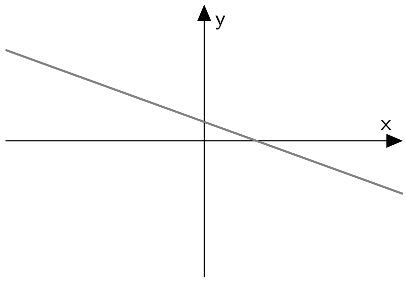
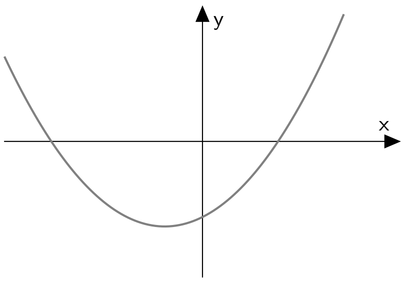
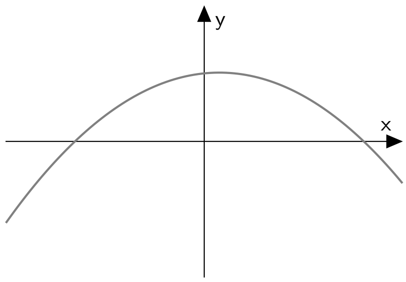
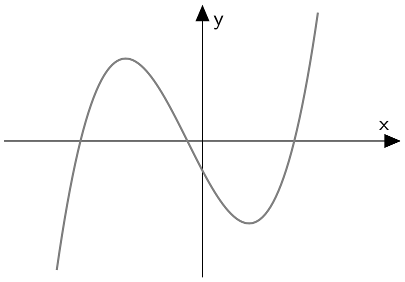
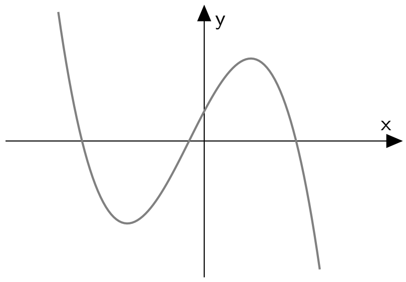
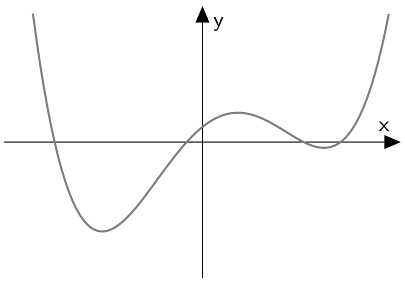
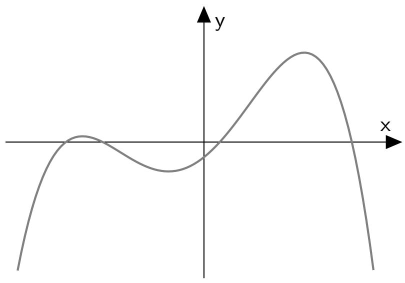
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan“ zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**“ der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
    - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte“, „Steigungswerte“ und „Krümmungswerte“ definiert bzw. berechnet.
    - Funktionen kann man ableiten.
    - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**“.
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, \ldots)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient“ a niemals null sein darf. Dies ist „logisch“, da ja der „namensgebende“ Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**“, die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich“ sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
    - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über“– bzw. „unterhalb der x-Achse“.
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**“.

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**“!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \;\wedge\; a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \;\wedge\; d = 0$)

mögliche Graphentypen für a > 0	**mögliche** Graphentypen für a < 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Symmetrie

Symmetrie

Für das Symmetrieverhalten eines Graphes einer ganzrationalen Funktion f gilt folgendes:

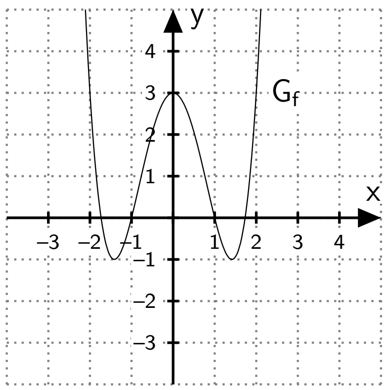
- *Achsensymmetrie zur y-Achse*: $f(-x) = f(x)$
  Das ist immer dann der Fall, wenn das Polynom **nur gerade Exponenten** hat.

- *Punktsymmetrie zum Ursprung*: $f(-x) = -f(x)$
  Das ist immer dann der Fall, wenn das Polynom **nur ungerade Exponenten** hat.

In allen anderen Fällen besitzt der Graph keine Standardsymmetrie. Er kann immernoch punkt- bzw. achsensymmetrisch sein, aber eben nicht zum Urspung bzw. zur y-Achse.

Beispiel zur Achsensymmetrie:
$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

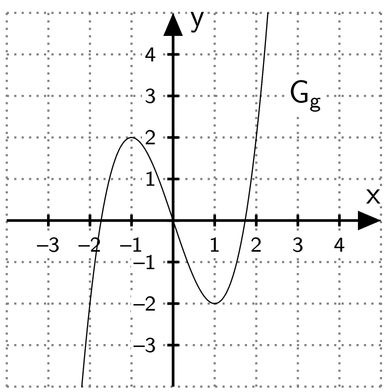
$$\begin{aligned} & \mathbf{f(-x) = f(x)} \\ \Longleftrightarrow \quad & (-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & (-1)^4x^4 - 4(-1)^2x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & 1 \cdot x^4 - 4 \cdot 1 \cdot x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^4 - 4x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \end{aligned}$$



Somit ist der Graph G_f von f symmetrisch zur y-Achse.
Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man sich die Exponenten ansieht. Diese sind nur gerade (4;2;0).

Beispiel zur Punktsymmetrie:
$g(x) = x^3 - 3x$

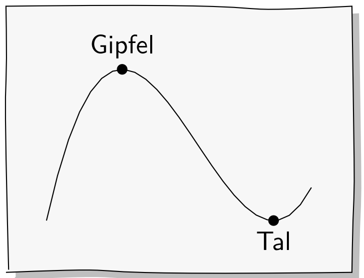
$$\begin{aligned} & \mathbf{g(-x) = -g(x)} \\ \Longleftrightarrow \quad & (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) \\ \Longleftrightarrow \quad & (-1)^3x^3 - 3(-1)x = -(x^3 - 3x) \\ \Longleftrightarrow \quad & (-1) \cdot x^3 - 3(-1)x = -(x^3 - 3x) \\ \Longleftrightarrow \quad & -x^3 + 3 = -(x^3 - 3x) \\ \Longleftrightarrow \quad & -(x^3 - 3x) = -(x^3 - 3x) \end{aligned}$$



Somit ist der Graph G_g von g punktsymmetrisch zum Ursprung.
Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man sich die Exponenten ansieht. Diese sind nur **un**gerade (3;1).

Extrema und Monotonieverhalten

Rechts ist das Höhenprofil eines Berges gezeigt. Der Gipfel ist dabei der jeweils höchste Punkt in einer Umgebung, das Tal entsprechend der tiefste Punkt. Auf dem Weg zum Gipfel steigt der Berg zunächst an, fällt rechts vom Gipfel zum Tal hin wieder ab und steigt rechts neben dem Tal wieder an. Direkt am Gipfel / im Tal ist es flach, der Berg steigt weder an, noch fällt er ab.



Bei Funktionen ist der „Gipfel“ der **lokale** Hochpunkt und das „Tal“ der **lokale** Tiefpunkt. Global kann es also noch höhere bzw. tiefere Punkte geben.

Extremstellen und Monotonie

Die erste Ableitung f' einer Funktion f gibt Informationen über die Steigung des Graphen G_f:

- $f'(x) > 0$: die Funktion $f(x)$ ist streng monoton steigend
- $f'(x) < 0$: die Funktion $f(x)$ ist streng monoton fallend
- $f'(x) = 0$: die Funktion $f(x)$ hat einen Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkt

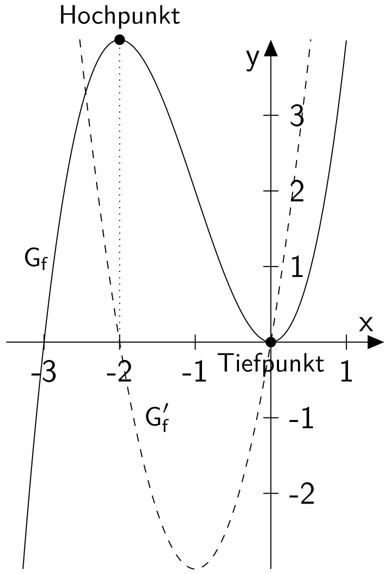
Gilt für die Steigung $f'(x) = 0$, liegt also häufig eine Extremstelle vor. Die Extremstellen einer Funktion f geben die Punkte an, in denen der Graph eine waagrechte Tangente besitzt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2$
1. Schritt: Erste Ableitung berechnen:

$$f'(x)x = 3x^2 + 6x$$

2. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitung berechnen, durch Faktorisieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x \\ f'(x) &= 0 \\ 0 &= 3x^2 + 6x \\ 0 &= x(3x + 6) \\ \iff \quad x_1 &= 0; \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$



Siehe auch grafische Darstellung: x-Werte von Nullstellen der ersten Ableitung stimmen mit den Extremstellen der Funktion überein.

3. Schritt: Funktionswerte durch Einsetzen in die Funktionsgleichung ermitteln

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \\ y_2 &= f(x_2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4 \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten also HOP $(-2 \mid 4)$ und TIP $(0 \mid 0)$.

4. Schritt: Art des Extrempunktes und Monotonie bestimmen
Um herauszufinden, wie sich der Graph in und neben diesen Punkten verhält, nimmt man einen x-Wert aus dem entsprechenden Intervall, hier liegt z. B. $x = 0$ im Intervall $]-\infty; -2]$. Diesen Wert setzt man dann in die erste Ableitung ein und das Vorzeichen des Ergebnisses wird in die Tabelle geschrieben. Somit $(-2\,|\,4)$ und $(0\,|\,0)$.

x	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$x \in$	$]-\infty; -2[$		$]-2; 0[$		$]0; \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

Der Graph G_f ist somit in den Intervallen $]-\infty; -2]$ und $[0; \infty[$ streng monoton wachsend und im Intervall $[-2; 0]$ streng monoton fallend.

Ist die Monotonie nicht gefragt, kann die Art der Extremstelle auch allein durch die zweite Ableitung ermittelt werden.

Art der Extremstelle - 2. Ableitung

- $f''(x) < 0$: Hochpunkt
- $f''(x) > 0$: Tiefpunkt
- $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$: Terrassenpunkt

Beispiel wie oben:
$f''(x) = 6x + 6$.
Einsetzen der x-Werte der Extrempunkte in die Funktion f'' (Extrempunkte auch in obiger Grafik markiert):

$$f''(-2) = 6(-2) + 6 = -12 + 6 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HOP}\,(-2\,|\,4)$$
$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TIP}\,(0\,|\,0)$$

Aufgaben - Extrema und Monotonieverhalten

Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte sowie das Monotonieverhalten der Graphen folgender Funktionensterme.

1. $f_1(x) = -\frac{1}{3}(x^3 + 10{,}5x^2 + 36x + 40{,}5)$
2. $f_2(x) = -\frac{2}{3}(x^3 + 10{,}5x^2 + 36x + 42)$
3. $f_3(x) = \frac{1}{6}(x-5)^2(2x-1)$
4. $f_4(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 - 1$
5. $f_5(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 11)$
6. $f_6(x) = \frac{1}{100}(x^4 - 26x^2 + 48x + 200)$

Kurzlösungen (ausführliche Lösungen finden Sie über unseren QR-Code online):

1. $f_1'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2+21x+36)$; TIP $(-4\,|\,-0{,}17)$; HOP $(-3\,|\,0)$
   Monotonie: $]-\infty; -4] \wedge [-3; \infty[$ **smf**; $[-4; -3]$ **sms**
2. $f_2'(x) = -\frac{2}{3}(3x^2+21x+36)$; TIP $(-4\,|\,-1{,}33)$; HOP $(-3\,|\,-1)$
   Monotonie: $]-\infty; -4] \wedge [-3; \infty[$ **smf**; $[-4; -3]$ **sms**
3. $f_3'(x) = x^2 - 7x + 10$; TIP $(5\,|\,0)$; HOP $(2\,|\,4{,}5)$
   Monotonie: $]-\infty; 2] \wedge [5; \infty[$ **sms**; $[2; 5]$ **smf**
4. $f_4'(x) = -x^2 - 2x$; TIP $(-2\,|\,-2{,}33)$; HOP $(0\,|\,1)$
   Monotonie: $]-\infty; -2] \wedge [0; \infty[$ **smf**; $[-2; 0]$ **sms**
5. $f_5'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 15x + 12)$; TIP $(1\,|\,-5{,}5)$; HOP $(4\,|\,-1)$
   Monotonie: $]-\infty; 1] \wedge [4; \infty[$ **smf**; $[1; 4]$ **sms**
6. $f_6'(x) = \frac{1}{25}(x^3 - 13x + 12)$
   TIP $(-4\,|\,-1{,}52)$; HOP $(1\,|\,2{,}23)$; TIP $(3\,|\,1{,}91)$
   Monotonie: $]-\infty; -4] \wedge [1; 3]$ **smf**; $[-4; 1]$ $\wedge [3; \infty[$ **sms**

Aufstellen von Funktionsgleichungen (Steckbriefaufgaben)

Bei sogenannten Steckbriefaufgaben ist die Funktionsgleichung einer Funktion gesucht. Dazu werden Eigenschaften und Punkte der Funktion angegeben, mit denen sich Gleichungen aufstellen lassen.
Es gilt: Um n Parameter der gesuchten Gleichung zu bestimmen, benötigt man n Gleichungen!

Alle häufig vorkommenden Formulierungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Vorgabe: $f(x)\dots$	Folgerung
... hat die Nullstelle $x = 3$	$f(3) = 0$
... schneidet die y-Achse bei 2	$f(0) = 2$
... verläuft durch den Punkt $(2\,\vert\,4)$	$f(2) = 4$
... berührt die x-Achse bei $x = 1$	$f(1) = 0 \wedge f'(1) = 0$
... hat eine waagrechte Tangente bei $x = 3$	$f'(3) = 0$
... hat einen Hoch- bzw. Tiefpunkt in $(2\,\vert\,4)$	$f(2) = 4 \wedge f'(2) = 0$
... hat im Punkt $(3\,\vert\,2)$ die Steigung 5	$f'(3) = 5$
... hat einen Wendepunkt in $(1\,\vert\,3)$	$f(1) = 3 \wedge f''(1) = 0$
... steigt/fällt bei $x = 1$ am stärksten/steilsten	$f''(1) = 0$
... hat einen Terrassenpunkt in $(4\,\vert\,3)$	$f(4) = 3 \wedge f'(4) = 0 \wedge f''(4) = 0$

Es gibt zwei grundsätzliche Aufgabentypen:

Typ 1
Gegeben ist der Grad der gesuchten ganzrationalen Funktion. Damit kann man die allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.

Beispiel
Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die die y-Achse bei -1 schneidet und ein Minimum bei $(1\,|\,-3)$ hat. Sie hat keinen quadratischen Anteil.

1. Schritt: Aufstellen der allg. Gleichung 3. Grades mit Parametern.
Da die Funktion „keinen quadratischen Anteil" hat, gilt $b = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f(x) = ax^3 + cx + d$$

2. Schritt: Analyse der gegebenen Aussagen gemäß obiger Tabelle:

$$\text{„schneidet y-Achse bei -1"} \quad \Longrightarrow \quad f(0) = -1 \quad (\mathrm{I})$$
$$\text{„Minimum bei } (1\,|-3)\text{"} \quad \Longrightarrow \quad f(1) = -3 \quad (\mathrm{II}) \quad \text{und} \quad f'(1) = 0 \quad (\mathrm{III})$$

3. Schritt: Aufstellen von Gleichungen aus den analysierten Angaben:

$$(\mathrm{I}) \quad \Longrightarrow \quad f(0) = a0^3 + c0 + d = d = -1$$

Optimierung

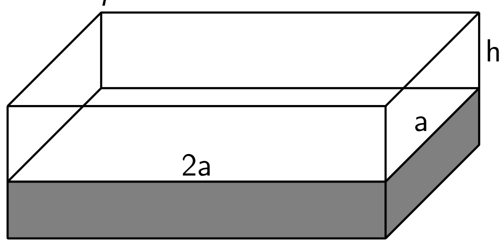
Optimierungsaufgaben

> Bei Optimierungsaufgaben wird eine Fläche, ein Wachstum oder ein unbekanntes Volumen durch *Hauptbedingung* als Funktionsterm gesucht. Je nach Aufgabenstellung wird das Minimum / Maximum von Größen wie Flächeninhalt, Volumen,... ermittelt. Um dieses Optimum zu berechnen, ist ein weiterer Zusammenhang der Größen (*Nebenbedingung*) zu entnehmen. Nach dem Aufstellen der Formeln für Haupt- und Nebenbedingung kann man die Hauptbedingung durch Verwendung der Nebenbedingung auf eine Variable reduzieren. Für diese kann man dann das Maximum/Minimum bestimmen.

Auch zum Thema Optimierung gibt es wieder zwei grundsätzliche Aufgabentypen:

Typ 1
Gesucht ist die maximale/minimale Fläche/Volumen..., wobei für den Zusammenhang von zwei Größen wie Radius und Höhe oder verschiedenen Kantenlängen noch ein Zusammenhang gegeben ist.

Beispiel: *Abschlussprüfung FOS12 Mathe Nichttechnik 2010 AI - adaptiert*
Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge 2a, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt.



Die lichtdurchlässige Oberfläche soll $4\,\text{m}^2$ betragen.
Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt.
Lösung:

Hauptbedingung: Volumen als Zielfunktion

$$\begin{aligned} V(\ell,b,h) &= \ell \cdot b \cdot h && (\ell = 2a, b = a \text{ einsetzen})\\ V(a,h) &= 2a \cdot a \cdot h \\ &= 2a^2 \cdot h && (\text{Nebenbed. einsetzen})\\ V(a) &= 2a^{\cancel{2}\,1} \cdot \frac{4-2a^2}{6\cancel{a}} && (\text{a kürzen})\\ &= 2a \cdot \frac{4-2a^2}{6} && (\text{Zusammenfassen})\\ &= \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

Nebenbedingung: Oberfläche

$$\begin{aligned} && O &= 4 \\ \Longleftrightarrow && 4 &= 2(2a \cdot h) + 2(a \cdot h) + 2a \cdot a \\ \Longleftrightarrow && 4 &= 4ah + 2ah + 2a^2 \\ \Longleftrightarrow && 4 &= 6ah + 2a^2 && |-2a^2 \\ \Longleftrightarrow && 4 - 2a^2 &= 6ah && |:(6a) \\ \Longleftrightarrow && h &= \frac{4-2a^2}{6a} \end{aligned}$$

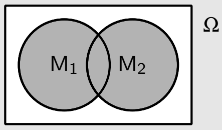
Term für h in Hauptbedingung einsetzen

Als nächster Schritt muss eine sinnvolle Definitionsmenge D_V von $V(a)$ ermittelt werden. Einerseits muss die Kantenlänge a größer als null sein, also $a > 0$ gelten. Weiterhin muss auch das Volumen $V(a) > 0$ sein, so dass gilt:

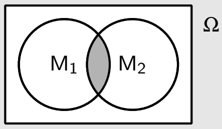
$$V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3 > 0 \qquad \Big| \cdot \frac{3}{2}$$

Allgemeine Regeln für Verknüpfungen

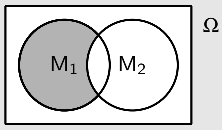
- *Vereinigungsmenge*: $M_1 \cup M_2$
  enthält alle Elemente die in M_1 oder M_2 vorkommen



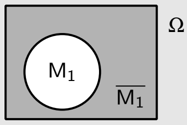
- *Schnittmenge*: $M_1 \cap M_2$
  enthält alle Elemente die sowohl in M_1 als auch in M_2 vorkommen



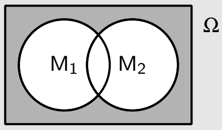
- *Komplementmenge*: $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \overline{M_2}$
  enthält Elemente aus M_1, die nicht auch in M_2 vorkommen



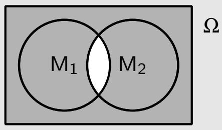
- *Absolutes Komplement*: $\overline{M}_1$
  enthält alle Elemente, die nicht in M_1 enthalten sind



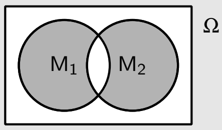
- **1. De Morgansche Regel**
  Absolutes Komplement der Vereinigungsmenge:
  $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 = \overline{M_1 \cup M_2}$
  enthält alle Elemente, die weder in M_1 noch in M_2 vorkommen



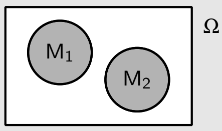
- **2. De Morgansche Regel**
  Absolutes Komplement der Schnittmenge:
  $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 = \overline{M_1 \cap M_2}$
  enthält alle Elemente, die nicht sowohl in M_1 als auch in M_2 vorkommen



- *Symmetrische Differenzmenge*:
  $(M_1 \cap \overline{M}_2) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$
  enthält alle Elemente, die in M_1 oder M_2 aber nicht in beiden gleichzeitig vorkommen



Vereinbarkeit:
Zwei Mengen sind unvereinbar, wenn $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.



Da Ereignisse durch Mengen beschrieben werden, sind hier die selben **Verknüpfungen** gültig.

Beispiel

Für den Würfelwurf und die Ereignisse E_1: „Es wird eine 1 oder 2 gewürfelt.“ und E_2: „Es wird eine 2 oder 3 gewürfelt“, ergeben sich folgende Verknüpfungen:

$E_3 = E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3\}$: „Es wird eine 1, 2 oder 3 gewürfelt.“

$E_4 = E_1 \cap E_2 = \{2\}$: „Es wird eine 2 gewürfelt.“ $E_5 = E_1 \setminus E_2 = \{1\}$: „Es wird eine 1 gewürfelt“

$E_7 = \overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 4, 5, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$

$E_8 = \overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 4, 5, 6\} = \{4, 5, 6\}$

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind **vereinbar**, da $E_1 \cap E_2 = \{2\} \neq \emptyset$.

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Häufigkeiten

Ein Experiment werde n-mal durchgeführt. Für die Häufigkeit kann dann unterschieden werden:

- *Absolute Häufigkeit* $H(E)$: Anzahl, wie oft Ereignis E eintritt (und somit $H(E) \leq n$)
- *Relative Häufigkeit* $h(E)$: Häufigkeit von E relativ zu allen Ereignissen

$$h(E) = \frac{H(E)}{n} = \frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{\text{Anzahl der Durchführungen}}$$

Es ist üblich, relative Häufigkeiten in Prozent anzugeben und die geschweiften Klammern der Mengenschreibweise bei der Angabe nicht zu schreiben.

Beispiel
Ein Würfel wird $n = 10$ mal geworfen. Es werden zwei Sechsen gewürfelt.

Für das Ereignis $E = \{6\}$ ist demnach die absolute Häufigkeit $H(E) = 2$ und die relative Häufigkeit ist:

$$h(E) = \frac{H(E)}{n} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\%$$

Das bedeutet, dass in 20 % der Fälle eine 6 gewürfelt wurde.

Wahrscheinlichkeit

Jedem Ereignis E kann eine Wahrscheinlichkeit $P(E)$ zugeordnet werden, die angibt wie wahrscheinlich das Eintreten des Ereignisses E ist.

- Alle Wahrscheinlichkeiten liegen im Intervall $P(E) \in [0;\, 1]$.
  Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1, die des unmöglichen Ereignisses ist 0.
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist immer 1.

Die *empirische Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses entspricht der relativen Häufigkeit, also $P(E) = h(E)$. Je größerer die Anzahl der Durchführungen, desto exakter ist sie.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

- Bei einem Laplace-Experiment hat jedes Elementarereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit (also z.B. ein Münzwurf oder ein Würfelwurf).
- Die Laplace-Regel besagt

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Elemente in E}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

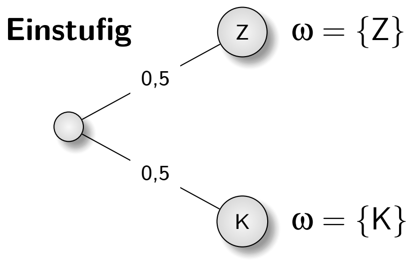
Da $|E|$ der Anzahl der für E **günstigen** Ergebnisse und $|\Omega|$ alle **möglichen** Ergebnisse enthält, kann man sich hier die Faustformel „**günstig durch möglich**“ merken.

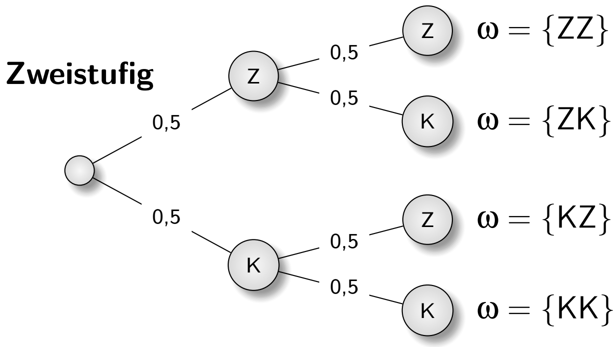
Baumdiagramm

Baumdiagramm

> Das Baumdiagramm bietet eine Möglichkeit, Zufallsexperimente zu visualisieren und deren Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.
>
> Von links nach rechts oder von oben nach unten wird durch einen Punkt der Beginn des Zufallsexperiments dargestellt. Von diesem Punkt aus gehen Pfade zu den möglichen Teilergebnissen. Diese werden als Knoten (Kreis mit Beschriftung) dargestellt. Bei jeder weiteren Stufe gehen dann von jedem bisherigen Knoten alle weiteren Pfade zu den jetzt noch möglichen Teilergebnissen ab. Am Ende stellt jeder Pfad ein Elementarereignis des Zufallsexperiments dar.
>
> An die Pfade im Baumdiagramm werden die Wahrscheinlichkeiten geschrieben, die sich aus den Angaben für das jeweilige Teilergebnis ergeben.

Beispiel:
Eine Münze wird einmal bzw. zweimal geworfen.





Pfadregeln

> - 1. Pfadregel: **Produktregel** - Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang seines Pfades.
> - 2. Pfadregel: **Additionsregel** - Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses ist die Summe der Elementarereignisse der zugehörigen Pfade.
>
> **Weitere Regel:**
> Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist immer 1.

Beispiel:
In einer Kantine werden zwei Gerichte angeboten. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein vegetarisches Gericht (V) gewählt wird, liegt bei $P(V) = 0{,}4$. Die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl des nicht vegetarischen Gerichts (N) liegt bei $P(N) = 1 - P(V) = 0{,}6$. Betrachtet wird der Fall, dass zwei Personen nacheinander ein Gericht bestellen. Gesucht ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für Ereignis E: „Es wird genau ein vegetarisches Gericht bestellt."

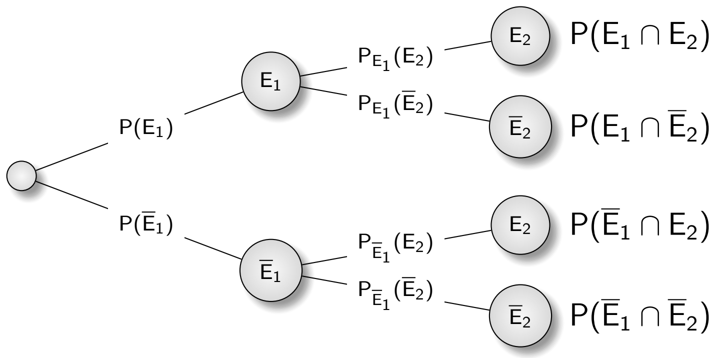
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Gibt es bei einem Zufallsexperiment zwei mögliche Ereignisse E_1 und E_2, so gibt der Term $P_{E_1}(E_2)$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von E_2 unter der Bedingung E_1 an. Dies beschreibt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E_2, wenn bekannt ist, dass E_1 bereits eingetreten ist. Es gilt:

$$P_{E_1}(E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten finden sich im zweistufigen Baumdiagramm wie in nebenstehender Abbildung zu sehen als Wahrscheinlichkeiten an den Ästen von erster zu zweiter Stufe, da hier bereits bekannt ist, welches Resultat in der ersten Stufe eingetreten ist.



Hinweis:
In zugehörigen Aufgaben sind immer einige (bedingte) Wahrscheinlichkeitswerte vorgegeben und andere gesucht. Zur Ermittlung der gesuchten Wahrscheinlichkeit wird ein Baumdiagramm bzw. eine Vierfeldertafel verwendet und dann ggf. in die obige Formel eingesetzt.

Beispiel:
In einer Einkaufspassage wird das Einkaufsverhalten von 1000 zufällig ausgewählten Kunden hinsichtlich des Besuchs von Geschäft A und B beobachtet. 700 Kunden besuchen Geschäft A. Die Hälfte der 1000 Kunden besucht Geschäft B. 450 Kunden besuchen Geschäft A und B. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der Geschäft A sicher nicht besucht, das Geschäft B besucht?
Aus den Angaben ergeben sich drei Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{700}{1000} = 0{,}7 \qquad P(B) = \frac{500}{1000} = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = \frac{450}{1000} = 0{,}45$$

Mit diesen Angaben kann eine Vierfeldertafel angelegt und vollständig ausgefüllt werden.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,45	0,05	0,5
$\overline{B}$	0,25	0,25	0,5
$\sum$	0,7	0,3	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die von B, unter der Voraussetzung dass A nicht eingetreten ist. Mit den Werten der Vierfeldertafel und obiger Formel gilt:

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}05}{0{,}3} = \frac{1}{6}$$

Binomialverteilung

Anhand des nachfolgenden Szenarios soll Ihnen die Bedeutung der Binomialverteilung und die zugehörigen Aufgabentypen gezeigt werden.

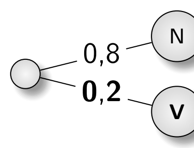
Beispiel

> Die Menschen leben immer gesundheitsbewusster und verzichten teilweise auf tierische Produkte in der Ernährung. Die Gastronomiebranche reagiert darauf, indem viele Restaurants ihre Speisekarten umstellen und nun auch vegetarische Gerichte anbieten.
> In einem Restaurant werden nun jeweils Gäste nach ihren Essgewohnheiten beurteilt. Hierbei ist davon auszugehen, dass **20 Prozent** der Besucher ein vegetarisches Gericht bestellen werden.

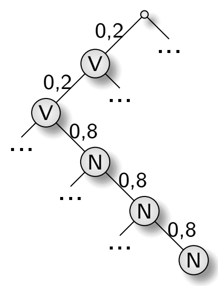
Bedeutung der Binomialverteilung anhand von Beispielen

Folgende Beispiele werden als Ereignisse E_n betrachtet:
E_1: „**Der nächste Gast bestellt ein vegetarisches Gericht.**“
Die Wahrscheinlichkeit dafür ergibt sich aus den Angaben zu $P(E_1) = p = 0{,}2$. Die Situation entspricht dem nebenstehenden Baumdiagramm. Dabei steht der Buchstabe „V“ für ein vegetarisches Gericht, der Buchstabe „N“ für ein nicht vegetarisches Gericht.

Darstellung als Baumdiagramm



E_2: „**Genau die ersten zwei der nächsten fünf Gäste bestellen ein vegetarisches Gericht.**“
Ein Baumdiagramm hätte nun schon fünf Stufen! Obwohl dies zwar aufwändig, aber noch möglich wäre, scheidet die Möglichkeit komplett aus, wenn man 50 oder 100 Gäste befragt, denn dann bräuchte man ein 50- oder 100-stufiges Baumdiagramm. Stattdessen überlegt man sich, welchem Pfad man theoretisch folgen würde:
Die Einzelwahrscheinlichkeit für den ersten Gast (vegetarisch) beträgt $p = 0{,}2$, die für den zweiten (vegetarisch) ebenfalls $p = 0{,}2$, die für den dritten und alle weiteren (nicht vegetarisch) $(1 - p) = 0{,}8$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich durch Multiplikation:



$$\begin{aligned} P(E_2) &= 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \\ &= 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 \\ &= \underline{\underline{0{,}02048}} \end{aligned}$$

E_3: „**Von den nächsten fünf Gästen bestellen genau zwei aufeinanderfolgende Gäste ein vegetarisches Essen.**“
Die eigentliche Wahrscheinlichkeit, dass zwei aus fünf sich ein vegetarisches Essen bestellen stimmt mit der von E_2 überein, **ABER** es müssen zusätzlich die möglichen **Kombinationen** beachtet werden. Für zwei vegetarische Essen (V) die direkt aufeinanderfolgen sollen und drei nicht vegetarische (N) Essen ergeben sich folgende Kombinationen:

Mögliche Kombinationen

1. VVNNN	**2.** NVVNN
3. NNVVN	**4.** NNNVV

Es gibt **4** Kombinationen, weshalb für die Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(E_3) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 \cdot \mathbf{4} = \underline{\underline{0{,}08192}}$$

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
2018	AI	$f: x \longmapsto \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$	**76**	NST; Monotonie; Extrema; Wendetangente
		$p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$	**76**	Fläche; Schnittpunkte
	AII	$f: x \longmapsto \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 19x^2)$	**86**	Symmetrie; Grenzwert; NST; Extrema; Wendepunkt
Musterprüfung	oHm AI	$f: x \longmapsto \frac{3}{4}(x+2)(x-2)(x-\frac{1}{2})$	**108**	NST; waagrechte Tangente
		$h(x) = x \cdot e^x$	**108**	Integral
	oHm AII	$f(x) = 3 - e^x$	**112**	Grenzwert
		$g(x) = (x-2) \cdot e^x$	**112**	NST; Grenzwert; Wertemenge; Integral
	mHm AI	$f(x) = \frac{1}{4}(3x^3 - 9x + 6)$	**122**	Fkt. aufstellen; Integral
		$g: x \longmapsto (2x^2 - 8x + 8) \cdot e^{\frac{x}{2}}$	**122**	NST; Grenzwert; Extrema
	mHm AII	$f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 2x^2 + x)$	**129**	NST; Extrema; Integral
		$b(x) = (5 + 3x) \cdot e^{-0{,}25x^2}$	**129**	NST; Maxima
2019	oHm A	$g: x \longmapsto e^{0{,}25x} - e^{-0{,}25x}$	**144**	Symmetrie; Integral; Tangente
	mHm AI	$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$	**152**	Wertemenge; Extrema; Wendepunkt; NST; Fläche
		$N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0{,}5t}$	**153**	Extrema; Grenzwert
	mHm AII	$w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$	**162**	Fkt. aufstellen; Extrema; Wendepunkt; Integral
		$f: x \longmapsto x^2 \cdot e^{-x}$	**162**	NST; Grenzwert; Monotonie; Extrema
		$k: t \longmapsto 50t \cdot e^{-at}$	**163**	Fkt. aufstellen
2020	oHm A	$h'(x) = x^2 + 1$	**181**	NST; Fkt. aufstellen
	mHm AI	$f: x \longmapsto (2x^2 - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - 1}$	**188**	Symmetrie; Grenzwert; Extrema; Wertemenge; NST; Fläche
		$g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$	**189**	Fkt. aufstellen; Extrema
		$p_a(x) = -ax^2 + 5x + 0{,}75$	**189**	Fkt. aufstellen
	mHm AII	$f: x \longmapsto 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$	**197**	Monotonie; Extrema
		$g: x \longmapsto 2 - 5e^{-0{,}1x^2}$	**198**	Symmetrie; Grenzwert; Asymptoten; NST; Extrema; Wertemenge; Tangente
Lösungen:		StR Verena Reffler (Berufliche Oberschule Memmingen), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		

1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f : x \longmapsto \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird G_f bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit. **3 BE**

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen G_f. **7 BE**

1.3 Bestimmen Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen G_f. **8 BE**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-3 \leq y \leq 3$ benötigt. Maßstab: 1 LE = 1 cm. **4 BE**

2.0 Betrachtet wird weiter die quadratische Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_p bezeichnet.

2.1 Die Parabel G_p berührt den Graphen G_f aus 1.0 im Punkt $B(3\,|\,3)$ und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie p(x) und zeichnen Sie die Parabel G_p im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

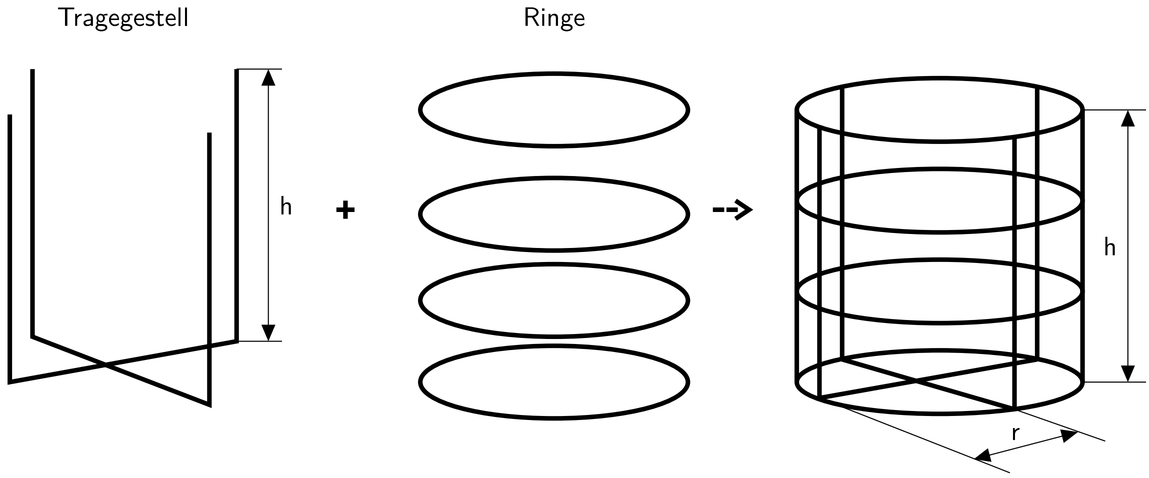
[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$] **8 BE**

2.2 Die Graphen G_f und G_p schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. **5 BE**

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunkts der Graphen G_f und G_p, der im III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. **7 BE**

2.4 Bestimmen Sie die Steigungen der beiden Geraden durch den Punkt $T(3\,|\,4)$, die den Graphen G_p berühren. **6 BE**

3.0 Ein Bastler möchte sich mithilfe folgender Bauanleitung das Grundgerüst für einen zylinderförmigen Abfallkorb mit Höhe h und Radius r (alle Längen in Meter gemessen) aus Draht bauen (siehe Skizze).



Für das Vorhaben kauft er sich Draht mit der Länge 6 m. Die Einzelteile werden selbst hergestellt und zusammengelötet. Die Dicke des Drahts ist zu vernachlässigen. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

3.1 Bestimmen Sie die Maßzahl V(r) des Volumens des Abfallkorbs in Abhängigkeit von r.

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = \pi(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3)$] **5 BE**

3.2 Aus praktischen Gründen wird für die Funktion
$V: r \longmapsto V(r)$ als Definitionsmenge $D_v = [0{,}1;\ 0{,}2]$ gewählt.
Berechnen Sie den Radius r des Abfallkorbs für den Fall, dass die Maßzahl des Volumens ihren absolut größten Wert annimmt.
Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen. **7 BE**

1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Nullstellen und deren Vielfachheit

Um die Nullstellen zu ermitteln wird der Funktionsterm zunächst umgeformt:

$$f(x) = \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3) = \frac{1}{9}x^3(-x+4) = \frac{1}{9}x^3(4-x)$$

Für die Nullstellen gilt dann:

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= 0 & & & \\
&\iff & \frac{1}{9}x^3(4-x) &= 0 & & & \\
&\iff & \frac{1}{9}x^3 &= 0 \quad \Big| : \frac{1}{9} & \text{oder} \quad 4-x &= 0 & \big| +x \\
&\iff & x^3 &= 0 & \text{oder} \quad 4 &= x_4 & \\
&\iff & x_{1;2;3} &= 0 & \text{oder} \quad x_4 &= 4 &
\end{aligned}$$

Der erste Fall führt zu $x_{1;2;3} = 0$. Wegen der Potenz handelt es sich um eine $\underline{\text{dreifache}}$ Nullstelle $\underline{\underline{x_{1;2;3} = 0}}$. Der zweite Fall führt zu einer $\underline{\text{einfachen}}$ Nullstelle $\underline{\underline{x_4 = 4}}$.

1.2 Maximale Monotonieintervalle und Art und Koordinaten des Extrempunktes

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3) \\
f'(x) &= \frac{1}{9}(-4 \cdot x^3 + 3 \cdot 4x^2) = \frac{1}{9}(-4x^3 + 12x^2) = \frac{1}{9}x^2(12-4x)
\end{aligned}$$

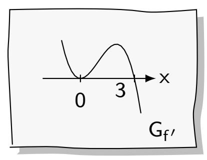
Weiterhin werden die Nullstellen der ersten Ableitung mithilfe der Nullproduktregel berechnet:

$$\begin{aligned}
& & f'(x) &= 0 & & & \\
&\iff & \frac{1}{9}x^2(12-4x) &= 0 & & & \\
&\iff & \frac{1}{9}x^2 &= 0 \quad \Big| : \frac{1}{9} & \text{oder} \quad 12-4x &= 0 & \big| -12 \\
&\iff & x^2 &= 0 & \text{oder} \quad -4x &= -12 & \big| : (-4) \\
&\iff & x_{1;2} &= 0 & \text{oder} \quad x_3 &= 3 &
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung liegen also bei $x_{1;2} = 0$ und $x_3 = 3$. Es wird nun eine Vorzeichentabelle betrachtet:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$G_{f'}$	$+$	0	$+$	0	$-$
G_f	$\nearrow$	TEP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Skizze



Daran kann abgelesen werden, dass f für alle $x \in]-\infty; 3]$ streng monoton zunehmend und für alle $x \in [3; \infty[$ streng monoton abnehmend ist. Für die Bestimmung des Extrempunktes gibt es nun zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1: Mithilfe der Skizze der ersten Ableitung
Anhand obiger Skizze und der ermittelten Vorzeichentabelle kann abgelesen werden, dass bei $x = 3$ ein relatives Maximum der Funktion liegt. Es wird der Funktionswert berechnet:

$$f(3) = \frac{1}{9}(-3^4 + 4 \cdot 3^3) = 3$$

Die Koordinaten des Hochpunktes lauten $\underline{\underline{HOP\,(3\,|\,3)}}$.

Möglichkeit 2: Mithilfe der 2. Ableitung
Es wird die 2. Ableitung berechnet:

$$f'(x) = \frac{1}{9}x^2(12-4x) = \frac{1}{9}(-4x^3 + 12x^2)$$
$$f''(x) = \frac{1}{9}(-3 \cdot 4x^2 + 2 \cdot 12x) = \frac{1}{9}(-12x^2 + 24x)$$

In den Term der zweiten Ableitung wird nun der Wert $x = 3$ eingesetzt:

$$f''(3) = \frac{1}{9}(-12 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Max} \mathrel{\hat{=}} \text{HOP}$$

Es wird der Funktionswert berechnet:

$$f(3) = \frac{1}{9}(-3^4 + 4 \cdot 3^3) = 3$$

Die Koordinaten des Hochpunktes lauten $\underline{\underline{HOP\,(3\,|\,3)}}$.

1.3 **Gleichungen aller Wendetangenten**
Zunächst wird die zweite Ableitung bestimmt:

$$f'(x) = \frac{1}{9}(-4x^3 + 12x^2)$$
$$f''(x) = \frac{1}{9}(-4 \cdot 3 \cdot x^2 + 12 \cdot 2 \cdot x) = \frac{1}{9}(-12x^2 + 24x) = \frac{1}{3}(-4x^2 + 8x) = \frac{1}{3}x(-4x + 8)$$

Wieder werden die Nullstellen mithilfe der Nullproduktregel berechnet:

$$\begin{aligned}
& f''(x) = 0 \\
\iff \quad & \frac{1}{3}x(-4x+8) = 0 \\
\iff \quad & \frac{1}{3}x = 0 \quad \Big| : \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad -4x + 8 = 0 \quad \big| + 4x \\
\iff \quad & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 8 = 4x \quad \big| : 4 \\
\iff \quad & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2
\end{aligned}$$

Nachweis für Wendestellen
Die Nullstellen liegen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Weiterhin gibt es verschiedene Möglichkeiten für den Nachweis der Wendestellen:

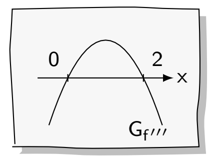
2018

1. Variante: Vielfachheit der Nullstellen
Bei den Nullstellen der zweiten Ableitung $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ handelt es sich jeweils um einfache Nullstellen, sodass hier ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung und damit eine Wendestelle von f vorliegt.

2. Variante: Skizze
Es wird eine Skizze der zweiten Ableitung und eine Vorzeichentabelle erstellt:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$G_{f''}$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_f	$\curvearrowright$	WEP	$\smile$	WEP	$\curvearrowright$

Skizze



Bei $x = 0$ und $x = 2$ liegt jeweils ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung und somit eine Wendestelle der Funktion vor.

3. Variante: Mithilfe der dritten Ableitung
Es wird die dritte Ableitung bestimmt:

$$f''(x) = \frac{1}{3}(-4x^2 + 8x)$$
$$f'''(x) = \frac{1}{3}(-2 \cdot 4x + 8) = \frac{1}{3}(-8x + 8)$$

Es werden die Nullstellen der zweiten Ableitung in die dritte Ableitung eingesetzt:

$$f'''(0) = \frac{1}{3}(-8 \cdot 0 + 8) = \frac{8}{3} \neq 0 \qquad f'''(2) = \frac{1}{3}(-8 \cdot 2 + 8) = -\frac{8}{3} \neq 0$$

Somit liegt ein Krümmungswechsel und damit eine Wendestelle vor.

Um die Gleichungen der Wendetangenten zu bestimmen wird jeweils der Funktionswert und der Wert der ersten Ableitung an diesen Stellen ermittelt:

$$f(0) = \frac{1}{9}(-0^4 + 4 \cdot 0^3) = 0 \qquad f'(0) = \frac{1}{9}(-4 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2) = 0$$
$$f(2) = \frac{1}{9}(-2^4 + 4 \cdot 2^3) = \frac{16}{9} \qquad f'(2) = \frac{1}{9}(-4 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2) = \frac{16}{9}$$

Die Gleichung der beiden Wendetangenten ergeben sich dann mithilfe der Punktsteigungsform:

$$w_1 : y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = 0 \cdot x + 0 = \underline{0}$$
$$w_2 : y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2) = \underline{\underline{\frac{16}{9} \cdot (x - 2) + \frac{16}{9}}} = \underline{\underline{\frac{16}{9}x - \frac{16}{9}}}$$

1.4 Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

x	-1	0	1	2	3	4
f(x)	$-0{,}56$	0	0,33	1,78	3	0

Mithilfe dieser Werte kann nun die grafische Darstellung erfolgen:

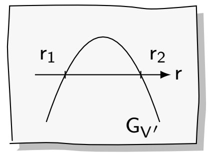
$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow & -(6\pi+3)r_2 &= -3 & &\mid :(-(6\pi+3))\\
&\Longleftrightarrow & r_2 &= \frac{3}{6\pi+3}\\
&\Longleftrightarrow & r_2 &= \frac{1}{2\pi+1}\\
&\Longleftrightarrow & r_2 &\approx 0{,}137
\end{aligned}
$$

Für die weitere Betrachtung gibt es nun zwei Varianten:

1. Variante: Mithilfe einer Skizze
Es wird eine Skizze der ersten Ableitung und eine Vorzeichentabelle unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs erstellt:

r	$r < r_1$	$r = r_1$	$r_1 < r < 0{,}1$	$0{,}1 \leq r < r_2$	$r = r_2$	$r_2 < r \leq 0{,}2$	$0{,}2 < r$
$G_{V'}$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
G_V	n.def.	n.def.	n.def.	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	n.def.

Skizze



Die Funktion ist stetig und es liegt keine weitere Nullstelle der ersten Ableitung in D_V vor. Somit handelt es sich bei $\underline{\underline{r_2 \approx 0{,}137}}$ [m] um ein absolutes Maximum.

2. Variante: Begründung
Es ist $r_1 \notin D_V$. Die Ableitungsfunktion V' ist eine Parabel und besitzt nur zwei Nullstellen r_1 und r_2. Da bei $r_2 \in D_V$ ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von „+“ nach „-“ vorliegt, handelt es sich um eine Maximum. Da außerdem keine weitere Nullstelle der ersten Ableitung in D_V vorliegt und die Funktion stetig ist, handelt es sich um ein absolutes Maximum.

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \longmapsto \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f bezüglich des Koordinatensystems und geben Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an. **3 BE**

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt und geben Sie diese samt Vielfachheit an. **3 BE**

1.3 Begründen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 1.1 und 1.2, dass an der Stelle $x = 0$ ein relatives und zugleich absolutes Minimum von f vorliegen muss. **3 BE**

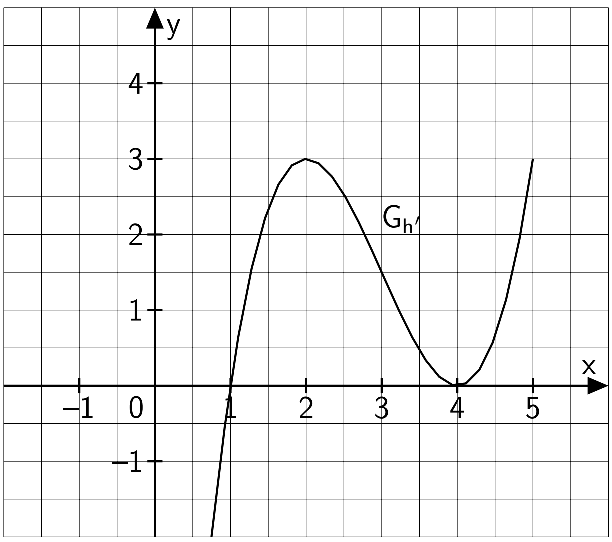
1.4 Zeigen Sie, dass an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ Wendestellen von f liegen. Ermitteln Sie auch die Koordinaten der zugehörigen Punkte und welcher der beiden Punkte ein Terassenpunkt ist. **7 BE**

1.5 Die Wendepunkte aus Teilaufgabe 1.4 legen die Gerade G_g fest. Ermitteln Sie deren Gleichung. **3 BE**

1.6 Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_g unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 4{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: 1 LE = 1 cm. **5 BE**

1.7 Die Graphen G_f und G_g schließen drei endliche Flächenstücke ein. Schraffieren Sie das mittlere Flächenstück in Ihrer Zeichnung von Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes. **5 BE**

2 Gegeben ist der Graph der 1. Ableitung h' der Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Bestätigen oder widerlegen Sie begründet folgende Aussagen:

a) G_h hat einen Tiefpunkt bei $x = 1$.

b) G_h hat einen Tiefpunkt bei $x = 4$.

c) G_h hat einen Wendepunkt bei $x = 2$.

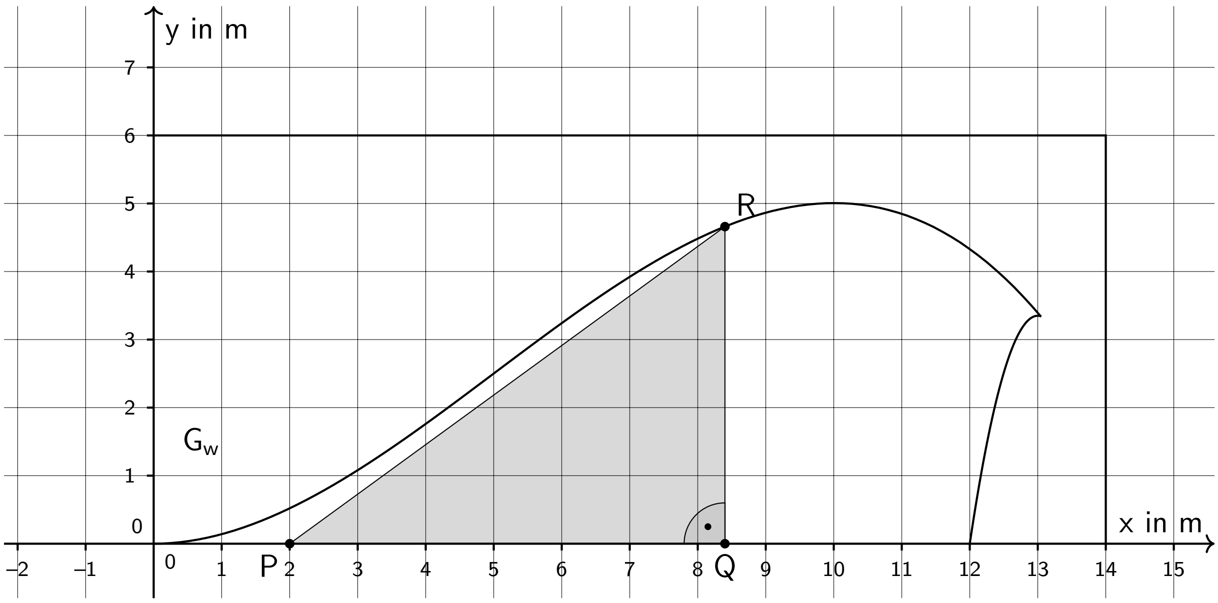
d) Die Tangente an den Graphen G_h in $x = 2$ verläuft parallel zur Geraden e mit der Gleichung $y = 3x + 7$.

8 BE

3 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Gegeben sind die reellen Funktionen $k_a : x \longmapsto \frac{1}{9}(x^4 - 2ax^3)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.
Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte der zugehörigen Graphen G_{k_a} in Abhängigkeit von a. (9 BE)

4.0 Auf der Außenwand eines neuen Hallenbades soll dessen Logo, eine Welle, abgebildet werden. Der Architekt möchte ein großes Fenster in Form eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Skizze Δ PQR) innerhalb der Welle anbringen.



Das Fenster soll am Punkt P (2 | 0) beginnen. Seine Breite $|\overline{PQ}|$ soll mindestens 5 m und höchstens 10 m betragen. Der Punkt R soll auf der oberen Begrenzungslinie (Graph G_w) der Welle liegen, welche durch die Funktion $w : x \longmapsto -0{,}01x^3 + 0{,}15x^2$ beschrieben wird.
Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

4.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl A der Fläche des Fensters abhängig von der x-Koordinate des Punktes Q durch die Funktionsgleichung $A(x) = 0{,}005(-x^4 + 17x^3 - 30x^2)$ beschrieben wird, und geben Sie für die Funktion A einen Definitionsbereich D_A an, der den Vorgaben von 4.0 entspricht. **5 BE**

4.2 Der Architekt möchte das Hallenbad möglichst hell gestalten. Aus diesem Grund soll die Fläche des Fensters möglichst groß sein. Bestimmen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, für welche die Maßzahl der Fläche A maximal wird. Berechnen Sie für diesen Fall Breite, Höhe und Fläche des Fensters. Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der Fensterfläche an der Logofläche, wenn diese 36 m^2 beträgt. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **9 BE**

1.0 Betrachtet wird die Funktion $f(x) = \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 **Symmetrieverhalten**

Der Funktionsterm weißt für x gerade und ungerade Exponenten auf, somit liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse (nur gerade Exponenten) noch Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung (nur ungerade Exponenten) und damit keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor.

Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$

Bei der Berechnung der Grenzwerte dominiert die höchste Potenz, sodass gilt:

$$x \to \pm\infty\colon f(x) = \frac{1}{5}(\underbrace{x^4}_{\to+\infty} - 8x^3 + \underbrace{18x^2}_{\to+\infty}) \to \infty$$

1.2 **Nullstelle**

Für die Nullstelle der Funktion gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2) = 0 \\ \iff\quad & x^2(x^2 - 8x + 18) = 0 \\ \iff\quad & x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 8x + 18 = 0 \\ \iff\quad & x_{1;2} = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 8x + 18 = 0 \end{aligned}$$

Für den quadratischen Term kann die Diskriminante berechnet werden:

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = -8 < 0$$

Somit existiert für $x^2 - 8x + 18 = 0$ keine Lösung. Die einzige Nullstelle liegt demnach für $x^2 = 0$ vor. Demnach handelt es sich bei $\underline{\underline{x_{1;2} = 0}}$ um eine doppelte Nullstelle.

1.3 Aus Teilaufgabe 1.2 folgt, dass bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle vorliegt. Da die x-Achse demnach also nur berührt wird, liegt hier eine relative Nullstelle vor. Weiterhin ist aus der Aufgabe bekannt, dass es sich um die einzige Nullstelle handelt. Da aus Teilaufgabe 1.1 zudem bekannt ist, dass die Funktion für $x \to \pm\infty$ jeweils nach $+\infty$ strebt, muss es sich bei $x = 0$ also zugleich um ein absolutes Minimum handeln.

1.4 **Wendestellen**

Um Aussagen zu den Wendestellen zu finden muss die zweite Ableitung der Funktion bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2) \\ f'(x) &= \frac{1}{5}(4 \cdot x^3 - 3 \cdot 8x^2 + 2 \cdot 18x) = \frac{4}{5}(x^3 - 6x^2 + 9x) \\ f''(x) &= \frac{4}{5}(3x^2 - 2 \cdot 6x + 9) = \frac{12}{5}(x^2 - 4x + 3) \end{aligned}$$

Mithilfe der quadratischen Lösungsformel können die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmt werden:

$$\frac{12}{5}(x^2-4x+3)=0 \quad \Big| : \frac{12}{5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-4x+3=0$$
$$x_{1;2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}$$
$$x_1=1 \quad \text{oder} \quad x_2=3$$

Der Nachweis der Wendestellen kann nach folgenden Möglichkeiten erfolgen:

1. Möglichkeit: Vielfachheit der Nullstellen
Da es sich bei $x_1=1$ und $x_2=3$ jeweils um eine einfache Nullstelle von $f''(x)$ handelt, liegen hier also Wendestellen von f vor.

2. Möglichkeit: Mithilfe der dritten Ableitung
Es wird zusätzlich die dritte Ableitung bestimmt:

$$f''(x)=\frac{12}{5}(x^2-4x+3)$$
$$f'''(x)=\frac{12}{5}(2x-4)$$

Nun werden die Werte der möglichen Wendestellen eingesetzt:

$$f'''(1)=\frac{12}{5}(2\cdot1-4)=-\frac{24}{5}\neq0 \qquad f'''(3)=\frac{12}{5}(2\cdot3-4)=\frac{24}{5}\neq0$$

Da $f'''(x_1)\neq0$ und $f'''(x_2)\neq0$ erfüllt ist, handelt es sich bei $x_1=1$ und $x_2=3$ um Wendestellen der Funktion.

Koordinaten der Punkte und Terrassenpunkt
Wenn ein Terrassenpunkt vorliegen soll, muss zusätzlich zur zweiten auch die erste Ableitung an dieser Stelle eine Nullstelle haben. Die beiden möglichen Werte $x=1$ und $x=3$ werden in die erste Ableitung eingesetzt:

$$f'(1)=\frac{4}{5}(1^3-6\cdot1^2+9\cdot1)=\frac{16}{5}\neq0 \qquad f'(3)=\frac{4}{5}(3^3-6\cdot3^2+9\cdot3)=0$$

Somit liegt bei $x=1$ eine Wendestelle und bei $x=3$ der Terassenpunkt vor. Zudem werden die Funktionswerte an diesen Stellen bestimmt:

$$f(1)=\frac{1}{5}(1^4-8\cdot1^3+18\cdot1^2)=\frac{11}{5} \qquad f(3)=\frac{1}{5}(3^4-8\cdot3^3+18\cdot3^2)=\frac{27}{5}$$

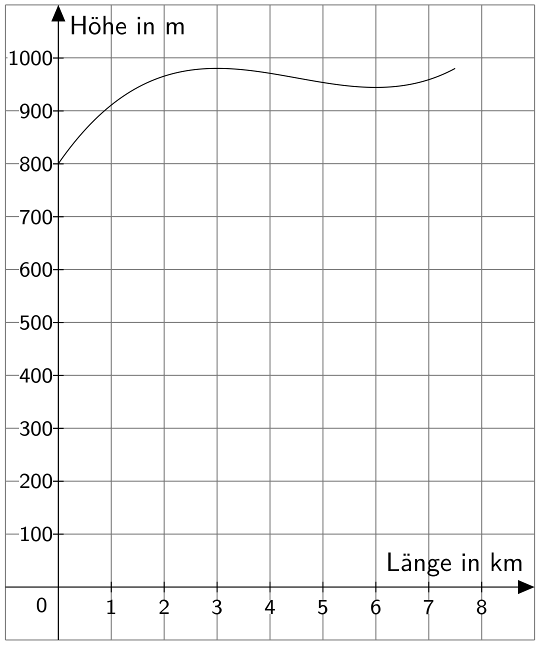
Die Koordinaten des Wendepunktes lauten $\underline{\underline{WEP\left(1\,\middle|\,\frac{11}{5}\right)}}$, die des Terrassenpunktes $\underline{\underline{TEP\left(3\,\middle|\,\frac{27}{5}\right)}}$.

1.5 **Gleichung der Geraden**
Aus den Koordinaten der beiden Punkte kann zunächst die Steigung der Geraden bestimmt werden:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{27}{5}-\frac{11}{5}}{3-1}=\frac{\frac{16}{5}}{2}=\frac{8}{5}$$

2018

1.0 Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches annähernd durch den Graphen der Funktion
$f: x \mapsto 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$
mit der Definitionsmenge $D_f = [0; 7{,}5]$ beschrieben werden kann.
Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y-Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen.
Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar.



1.1 Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von D_f, in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft. **6 BE**

1.2 Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe 1.1, in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe die maximale Höhe erreicht wird. Geben Sie an, in welcher Höhe Sporttreibende sich am höchsten Punkt der Loipe befinden. **3 BE**

1.3 Ermitteln Sie, nach wie vielen Kilometern in horizontaler Entfernung vom Ausgangspunkt die Loipe am steilsten abwärts verläuft. **4 BE**

1.4 Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern. **3 BE**

1.5 Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist. **4 BE**

1.0 Gegeben ist das dargestellte Profil einer Langlaufloipe, beschrieben durch den Graphen der Funktion $f(x) = 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$ mit $D_f = [0; 7{,}5]$. Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung in Kilometer und die y-Achse die Höhe über dem Meeresspiegel in Meter an.

1.1 **Maximale Teilintervalle**

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$f(x) = 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$$
$$f'(x) = 8\left(3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 2 \cdot \frac{9}{2}x + 18\right) = 8\left(x^2 - 9x + 18\right)$$

Weiterhin werden die Nullstellen der ersten Ableitung ermittelt:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 9x + 18 = 0 \\ \Rightarrow \quad & x_{1;2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} \\ \Longleftrightarrow \quad & x_{1;2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} \\ \Longleftrightarrow \quad & x_{1;2} = \frac{9 \pm 3}{2} \\ \Rightarrow \quad & x_1 = 3 \quad \text{oder} \quad x_2 = 6 \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen demnach bei $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$. Da der Graph von f bereits in den Angaben als Abbildung gegeben ist, können nun gemeinsam mit den berechneten Werten die maximalen Intervalle, in denen es bergauf oder bergab geht abgelesen werden.
Die Loipe verläuft bergauf im Intervall [0; 3], dann bergab im Intervall [3; 6] und wieder bergauf in [6; 7,5].

1.2 **Höchster Punkt der Loipe**

Gemäß den Ergebnissen aus Teilaufgabe 1.1 liegt ein Hochpunkt bei $x = 3$. Zudem existiert ein weiteres Randmaximum bei $x = 7{,}5$. Es werden die Funktionswerte an diesen Stellen ermittelt:

$$f(3) = 8\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{9}{2} \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 100\right) = 8\left(9 - \frac{81}{2} + 54 + 100\right) = 980$$
$$f(7{,}5) = 8\left(\frac{1}{3} \cdot 7{,}5^3 - \frac{9}{2} \cdot 7{,}5^2 + 18 \cdot 7{,}5 + 100\right) = 8\,(140{,}625 - 253{,}125 + 135 + 100) = 980$$

Da beide Funktionswerte gleich sind, wird die maximale Höhe von $\underline{\underline{980\,\text{m}}}$ sowohl nach $\underline{\underline{3\,\text{km}}}$ als auch nach $\underline{\underline{7{,}5\,\text{km}}}$ erreicht.

1.3 **Stelle mit steilstem Abwärtsverlauf**

Da diese Stelle einer Wendestelle der Funktion entspricht, wird die zweite Ableitung der Funktion bestimmt:

$$f'(x) = 8\left(x^2 - 9x + 18\right)$$
$$f''(x) = 8\,(2x - 9)$$

Für die Nullstelle der zweiten Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} & f''(x) = 0 && \\ \Rightarrow\quad & 2x - 9 = 0 && \mid +9 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x = 9 && \mid : 2 \\ \Longleftrightarrow\quad & x_3 = 4{,}5 && \end{aligned}$$

Da es sich hierbei um eine einfache Nullstelle handelt, liegt eine Wendestelle von f und damit eine Stelle mit maximaler positiver oder negativer Steigung von f' vor. Da, entweder aus der gegebenen Abbildung oder aus den Ergebnissen von Teilaufgabe 1.1, die Stelle $x = 4{,}5$ zudem innerhalb eines Stückes liegt, auf dem die Loipe bergab verläuft, muss somit bei $\underline{\underline{4{,}5\,\text{km}}}$ die Stelle liegen, bei der die Loipe am steilsten abwärts verläuft.

1.4 **Durchschnittliche Steigung auf den ersten drei Kilometern**

Die durchschnittliche Steigung ergibt sich gemäß Steigungsdreieck zu

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Da die Steigung auf den ersten drei Kilometern gefragt ist, wird also $x_1 = 0\,\text{km}$ und $x_2 = 3\,\text{km}$ betrachtet:

$$f(0) = 8\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - \frac{9}{2}\cdot 0^2 + 18\cdot 0 + 100\right) = 8\,(100) = 800$$
$$f(3) = 980 \quad \text{(siehe Teilaufgabe 1.3)}$$

Da die Funktionswerte in Meter angegeben werden, müssen auch die x-Werte im Steigungsdreieck in Metern angegeben werden, sodass $x_1 = 0\,\text{m}$ und $x_2 = 3000\,\text{m}$ gilt. Dann gilt für die durchschnittliche Steigung:

$$\frac{f(3) - f(0)}{3000 - 0} = \frac{980 - 800}{3000 - 0} = \frac{180}{3000} = 0{,}06$$

Die durchschnittliche Steigung auf den ersten drei Kilometern beträgt also $\underline{\underline{6\,\%}}$.

1.5 **Berechnen der Stelle**

Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 ergibt sich aus der ersten Ableitung an dieser Stelle:

$$f'(2) = 8\left(2^2 - 9\cdot 2 + 18\right) = 8\,(4 - 18 + 18) = 32$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow & -0{,}1x^2 &= \ln(0{,}4) & &| \cdot (-10)\\
&\Longleftrightarrow & x^2 &= -10\ln(0{,}4) & &|\sqrt{\ }\\
&\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= \pm\sqrt{-10\ln(0{,}4)} & &\\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{x_{1;2}}} &\underline{\underline{\approx \pm 3{,}03}} & &
\end{aligned}
$$

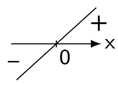
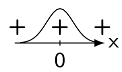
2.3 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Die erste Ableitung wird unter Verwendung der Kettenregel bestimmt:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2 - 5e^{-0{,}1x^2} & &\\
g'(x) &= \left[-5e^{-0{,}1x^2} \cdot (-0{,}1x^2)'\right] & &\text{(Ansatz Kettenregel)}\\
&= -5e^{-0{,}1x^2} \cdot (-2 \cdot 0{,}1x) & &\text{(Anwendung)}\\
&= -5e^{-0{,}1x^2} \cdot (-0{,}2x) & &\text{(Zusammenfassen)}\\
&= x \cdot e^{-0{,}1x^2} & &\text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes

Es wird die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt. Da die Exponentialfunktion nie null wird, muss der andere Faktor der Ableitung gleich null werden. Demnach liegt die Nullstelle der ersten Ableitung bei $x_3 = 0$. Es kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$	Skizzen
x	$-$	0	$+$	
$e^{-0{,}1x^2}$	$+$	$+$	$+$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	
G_g	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Demnach liegt bei $x = 0$ ein Tiefpunkt vor. Es wird der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt:

$$g(0) = 2 - 5e^{-0{,}1\cdot 0^2} = 2 - 5e^0 = -3$$

Die Koordinaten des relativen Tiefpunktes von G_g lauten $\underline{\underline{TIP\,(0\,|-3)}}$.

Begründung des absoluten Tiefpunktes

Wie gezeigt wurde, liegt bei $x = 0$ der einzige Monotoniewechsel vor. Deshalb muss der relative Tiefpunkt $TIP\,(0\,|-3)$ zugleich absoluter Tiefpunkt von G_g sein.

Wertemenge

Die untere Grenze ergibt sich aus dem Funktionswert des absoluten Tiefpunktes. Die obere Grenze ergibt sich aus dem Monotonieverhalten und der Gleichung der Asymptote. Der Funktionsgraph von g nähert sich dem Wert $y = 2$ zwar beliebig nah an, erreicht diesen jedoch nie. Demnach lautet die Wertemenge $\underline{\underline{W_g = [-3;\, 2[}}$.

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Großhändler für Saatgut verkauft Säcke verschiedener Sorten von Samenkörnern. Erfahrungsgemäß handelt es sich bei 15 % der verkauften Säcke um Saatgut für Viehweide (V). Säcke mit Samen für Sommerroggen (S) werden viermal so oft verlangt wie die mit Weißklee (W). Weißklee und Grasmischung (G), machen die Hälfte der verkauften Säcke aus. Nur 3 % sind Säcke mit Samen für Blumenwiese (B). Die Preise pro Sack können nachfolgender Preisliste entnommen werden.

Sorte	Preis pro Sack
▪ Viehweide	32,00 €
▪ Sommerroggen	26,00 €
▪ Weißklee	30,00 €
▪ Grasmischung	28,50 €
▪ Blumenwiese	20,00 €

1.1 Die Zufallsgröße X gibt den Preis pro verkauftem Sack in Euro an. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
[Teilergebnis: $P(W) = 0{,}08$] **5 BE**

1.2 Berechnen Sie – unter Verwendung von Aufgabe 1.1 – den durchschnittlich zu erwartenden monatlichen Gewinn durch den Verkauf des Saatguts, wenn bekannt ist, dass der Großhändler pro Monat 120 Säcke Saatgut verkauft und ihm 30 % vom Verkaufspreis als Gewinn bleiben. **2 BE**

2.0 Aufgrund von Kundenanfragen und da der Großhändler ein günstiges Angebot für Rotklee erhalten hat, will er in Zukunft eine Kleemischung aus Weißklee (W) und Rotklee (R) anbieten. Laut dem Samenproduzenten liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn vom Weißklee keimt, bei 92,5 %. Die Keimwahrscheinlichkeit der Rotkleesamen liegt bei 80 %.

2.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms, in welchem Verhältnis der Großhändler Weiß- und Rotkleesamen mischen muss, damit die Keimwahrscheinlichkeit P(K) der Mischung bei 85 % liegt. **5 BE**

2.2 Ein Landwirt kauft einen Sack der neuen Kleemischung, welche zu 85 % keimt, und sät 200 Samenkörner auf einem kleinen frischgepflügten Teil einer seiner Wiesen aus. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der keimenden Samen an.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der keimenden Samen innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. **4 BE**

3.0 Eine Gärtnerin möchte den Bienen in ihrer Umgebung etwas Gutes tun und kauft einen Sack Saatgut für eine Blumenwiese. Der Großhändler behauptet, dass die Blumensamen zu 90 % keimen. Jedoch vermutet die Gärtnerin, dass es weniger sind (Gegenhypothese). Ist dies der Fall, so will sie ihr Saatgut in Zukunft von einem anderen Großhändler beziehen. Um ihre Vermutung zu überprüfen, sät sie 100 zufällig ausgwählte Samenkörner aus und beobachtet deren Keimverhalten. Sie will sich bei der Annahme ihrer Vermutung um höchstens 4 % irren.

3.1 Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest für die Gärtnerin und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 87 Blumensamen keimen. **5 BE**

3.2 Berechnen Sie für den in Aufgabe 3.1 entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn man davon ausgeht, dass der Anteil der keimenden Samen bei 85 % liegt. **2 BE**

1.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

Zunächst werden aus den Angaben die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Sorten ermittelt. Bei 15 % der Säcke handelt es sich um Saatgut für Viehweide ($\underline{P(V) = 0{,}15}$). Sommerroggen wird viermal so oft verlangt wie Weißklee ($P(S) = 4 \cdot P(W)$). Weißklee und Grasmischung machen die Hälfte aus ($P(W) + P(G) = 0{,}5$). Der Anteil für Blumenwiese liegt bei 3 % ($\underline{P(B) = 0{,}03}$). Da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten 100 % = 1 ergeben muss, gilt:

$$
\begin{aligned}
& \overbrace{P(V)}^{=0{,}15} + P(S) + \overbrace{P(W) + P(G)}^{=0{,}5} + \overbrace{P(B)}^{=0{,}03} = 1 \\
\Longleftrightarrow\quad & 0{,}15 + P(S) + 0{,}5 + 0{,}03 = 1 \qquad |-0{,}68 \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{P(S) = 0{,}32}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt weiterhin:

$$
\begin{aligned}
& P(S) = 4 \cdot P(W) \\
\Longleftrightarrow\quad & 0{,}32 = 4 \cdot P(W) \qquad |:4 \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{P(W) = 0{,}08}
\end{aligned}
$$

Und schließlich:

$$
\begin{aligned}
& P(W) + P(G) = 0{,}5 \\
\Longleftrightarrow\quad & 0{,}08 + P(G) = 0{,}5 \qquad |-0{,}08 \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{P(G) = 0{,}42}
\end{aligned}
$$

Jedem Saatgut ist nun eine Wahrscheinlichkeit und laut Tabelle ein Preis zugewiesen. Damit kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellt werden:

x	20	26	28,50	30	32
$P(X = x)$	0,03	0,32	0,42	0,08	0,15

1.2 Durchschnittlich zu erwartender monatlicher Gewinn

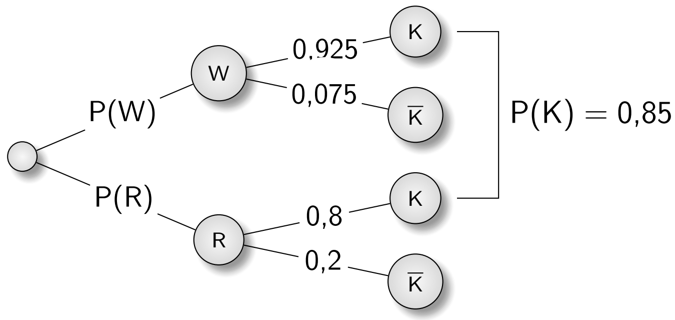
Zunächst wird der Erwartungswertes von X, also des Preises pro verkauftem Sack bestimmt:

$$E(X) = 20 \cdot 0{,}03 + 26 \cdot 0{,}32 + 28{,}50 \cdot 0{,}42 + 30 \cdot 0{,}08 + 32 \cdot 0{,}15 = 28{,}09$$

Da davon 30 % Gewinn bleiben, und 120 Säcke verkauft werden, liegt der zu erwartende Gewinn bei $120 \cdot 0{,}3 \cdot 28{,}09 = \underline{\underline{1011{,}24}}$ €.

2.1 Erstellen eines Baumdiagramms zur Bestimmung des Mischungsverhältnisses

Laut Angabe keimt ein Samenkorn vom Weißklee mit einer Wahrscheinlichkeit von 92,5 % ($P_W(K) = 0{,}925$, damit $P_W(\overline{K} = 0{,}075$). Ein Samenkorn vom Rotklee keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % ($P_R(K) = 0{,}8$, damit $P_R(\overline{K}) = 0{,}2$). Damit kann folgendes Baumdiagramm mit der noch unbekannten Wahrscheinlichkeit $P(W)$ für den Anteil an Weißklee erstellt werden:



Dabei soll nun P(W) so bestimmt werden, dass P(K) = 0,85 gilt. Dies entspricht im Baumdiagramm dem ersten und dem dritten Ast von oben. Damit gilt entsprechend der Pfadregeln:

$$
\begin{aligned}
& & P(W) \cdot 0{,}925 + P(R) \cdot 0{,}8 &= 0{,}85 & \\
&\Longleftrightarrow & P(W) \cdot 0{,}925 + (1 - P(W)) \cdot 0{,}8 &= 0{,}85 & \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}925 \cdot P(W) + 0{,}8 - 0{,}8 \cdot P(W) &= 0{,}85 & \quad | - 0{,}8 \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}125 \cdot P(W) &= 0{,}05 & \quad | \cdot 8 \\
&\Longleftrightarrow & P(W) &= 0{,}4 &
\end{aligned}
$$

Die Mischung muss also aus 40 % Weißklee und 60 % Rotklee bestehen. Das Mischungsverhältnis Weißklee zu Rotklee muss wegen $\frac{0{,}40}{0{,}60} = \frac{2}{3}$ also 2:3 sein.

2.2 **Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der die Anzahl der keimenden Samen innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen**

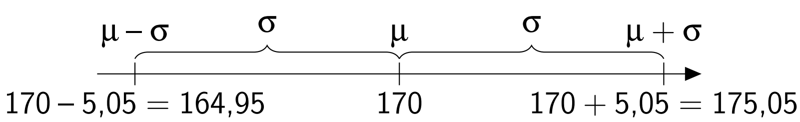
Zunächst werden der Erwartungswert, die Varianz und daraus die Standardabweichung für n = 200 und p = 0,85 berechnet:

$$
\begin{aligned}
\mu(Y) &= n \cdot p = 200 \cdot 0{,}85 = 170 \\
V(Y) &= n \cdot p \cdot (1 - p) = 200 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15 = 25{,}5 \\
\sigma(Y) &= \sqrt{25{,}5} \approx \underline{5{,}05}
\end{aligned}
$$

Es wird nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass die Werte <u>höchstens</u> die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen:

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma < Y < \mu + \sigma) &= P(164{,}95 < Y < 175{,}05) = P(Y < 175{,}05) - P(Y < 164{,}95) \\
&= P(Y \leq 175) - P(\leq 164) = \sum_{i=0}^{175} B(200; 0{,}85; i) - \sum_{i=0}^{164} B(200; 0{,}85; i) \\
&\approx 0{,}86318 - 0{,}13873 = \underline{\underline{0{,}72445}}
\end{aligned}
$$

<u>**Zur Veranschaulichung**</u>

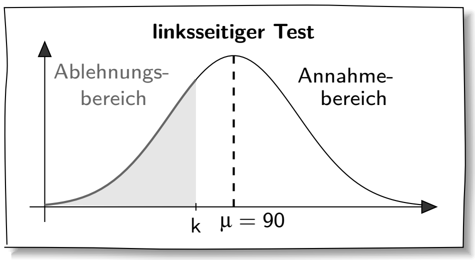


3.1 **Entwickeln eines Hypothesentests**

Die Testgröße T beschreibt die Anzahl der Blumensamen, die keimen, unter $n = 100$ gesäten Samenkörnern.

Die Nullhypothese H_0 lautet: 90 % der Blumensamen keimen.
Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt bei $\mu = 100 \cdot 0{,}9 = 90$ Blumensamen die keimen.

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p = 0{,}9$	$H_1 : p < 0{,}9$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{k+1; ...; 100\}$	$\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest, da vermutet wird, dass weniger als 90 % der Blumensamen keimen und somit k links vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 4 % gilt dann:

$$P(T \leq k) \leq 0{,}04$$
$$\Longleftrightarrow \quad F_{0,9}^{100}(k) \leq 0{,}04$$

Der gesuchte Wert k für B(100; 0,90) kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k = 84$, da hier der Prozentwert der Summe das letzte Mal **kleiner** als 0,04 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k = 84$. Er lautet $\overline{A} = \{0; 1; ...; 84\}$. Damit ist der minimale Annahmebereich von H_0 $A = \{85; 86; ...; 100\}$.

Entscheidung anhand des Tests

Da 87 im Annahmebereich liegt, legt die Tatsache, dass 87 Blumensamen keimen anhand des Tests eine Entscheidung für die Nullhypothese nahe, sodass auf Grundlage des Tests der Großhändler recht hat.

3.2 **Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art**

Beim Fehler 2. Art würde die Nullhypothese H_0 angenommen, obwohl H_1 richtig ist.
Mit $A = \{85; 86; ...; 100\}$ und einem tatsächlichen Anteil von 85 % gilt für den Fehler 2. Art:

$$\begin{aligned} P(\text{„Fehler 2. Art“}) &= F_{0,85}^{100}(T \geq 85) \\ &= 1 - F_{0,85}^{100}(T \leq 84) = 1 - \sum_{i=0}^{84} B(100; 0{,}85; i) \\ &\approx 1 - 0{,}43168 = \underline{\underline{0{,}56832}} \end{aligned}$$

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

M

N

Das könnte Sie auch interessieren:

Original-Abschlussprüfungen Mathematik Nichttechnik FOS·BOS 12 Bayern 2021

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- ✓ An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- ✓ Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- ✓ Miniskript mit Beispielen sowie ausführlichen Lösungen
- ✓ Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- ✓ Mit Ferien- und Prüfungsplaner 2020/2021 im Innenteil

Abi-Trainer für FOS · BOS 12 MNT 2021

- Ideal für das SELBSTLERNEN ZU HAUSE geeignet -

Bestell-Nr.: EAN 9783743000605

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0060-5

€ 10,90

9 783743 000605 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de