13.
Klasse

FOS·BOS
Abitur Bayern 2021

Mathematik Technik

- Ideal für Homeschooling geeignet -

LehrplanPLUS

INKLUSIVE:

- ✓ Miniskript mit zusätzlichen Übungen nach jedem Themengebiet
- ✓ Prüfungsaufgaben angepasst an den neuen LehrplanPLUS
- ✓ Musterprüfungen im Stil der neuen Abi-Prüfung sowie
- ✓ kostenloser Downloadbereich per QR-Code

SCAN ME

FOS·BOS 13

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

lernverlag®
www.lern-verlag.de

2020 2021 Schuljahresplaner

September	Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli
1 Di	1 Do	**1 So** Allerheiligen	1 Di	**1 Fr** Neujahr	1 Mo 5	1 Mo 9	1 Do	**1 Sa** Tag der Arbeit	1 Di	1 Do
2 Mi	2 Fr	2 Mo 45	2 Mi	**2 Sa**	2 Di	2 Di	**2 Fr** Karfreitag	**2 So**	2 Mi	2 Fr
3 Do	**3 Sa** Tag der Dt. Einheit	3 Di	3 Do	**3 So**	3 Mi	3 Mi	**3 Sa**	3 Mo 18	3 Do Fronleichnam	**3 Sa**
4 Fr	**4 So**	4 Mi	4 Fr	4 Mo 1	4 Do	4 Do	**4 So** Ostern	4 Di	4 Fr	**4 So**
5 Sa	5 Mo 41	5 Do	**5 Sa**	5 Di	5 Fr	5 Fr	**5 Mo** Ostermontag 14	5 Mi	**5 Sa**	5 Mo 27
6 So	6 Di	6 Fr	**6 So**	6 Mi Heilige Drei Könige	**6 Sa**	**6 Sa**	6 Di	6 Do	**6 So**	6 Di
7 Mo 37	7 Mi	**7 Sa**	7 Mo 50	7 Do	**7 So**	**7 So**	7 Mi	7 Fr	7 Mo 23	7 Mi
8 Di	8 Do	**8 So**	8 Di	8 Fr	8 Mo 6	8 Mo 10	8 Do	**8 Sa**	8 Di	8 Do
9 Mi	9 Fr	9 Mo 46	9 Mi	**9 Sa**	9 Di	9 Di	9 Fr	**9 So** Muttertag	9 Mi	9 Fr
10 Do	**10 Sa**	10 Di	10 Do	**10 So**	10 Mi	10 Mi	**10 Sa**	10 Mo 19	10 Do	**10 Sa**
11 Fr	**11 So**	11 Mi	11 Fr	11 Mo 2	11 Do	11 Do	**11 So**	11 Di	11 Fr	**11 So**
12 Sa	12 Mo 42	12 Do	**12 Sa**	12 Di	12 Fr	12 Fr	12 Mo 15	12 Mi	**12 Sa**	12 Mo 28
13 So	13 Di	13 Fr	**13 So**	13 Mi	**13 Sa**	**13 Sa**	13 Di	**13 Do** Christi Himmelfahrt	**13 So**	13 Di
14 Mo 38	14 Mi	**14 Sa**	14 Mo 51	14 Do	**14 So**	**14 So**	14 Mi	14 Fr	14 Mo 24	14 Mi
15 Di	15 Do	**15 So**	15 Di	15 Fr	15 Mo Rosenmontag 7	15 Mo 11	15 Do	**15 Sa**	15 Di	15 Do
16 Mi	16 Fr	16 Mo 47	16 Mi	**16 Sa**	16 Di	16 Di	16 Fr	**16 So**	16 Mi	16 Fr
17 Do	**17 Sa**	17 Di	17 Do	**17 So**	17 Mi	17 Mi	**17 Sa**	17 Mo **Deutsch** 20	17 Do	**17 Sa**
18 Fr	**18 So**	18 Mi	18 Fr	18 Mo 3	18 Do	18 Do	**18 So**	18 Di **BwR, IBV, Bio, Physik, PäPsy**	18 Fr	**18 So**
19 Sa	19 Mo 43	19 Do	**19 Sa**	19 Di	19 Fr	19 Fr	19 Mo 16	19 Mi	**19 Sa**	19 Mo 29
20 So	20 Di	20 Fr	**20 So**	20 Mi	**20 Sa**	**20 Sa**	20 Di	20 Do **Englisch**	**20 So**	20 Di
21 Mo 39	21 Mi	**21 Sa**	21 Mo 52	21 Do	**21 So**	**21 So**	21 Mi	21 Fr **Mathematik**	21 Mo 25	21 Mi
22 Di	22 Do	**22 So**	22 Di	22 Fr	22 Mo 8	22 Mo 12	22 Do	**22 Sa**	22 Di	22 Do
23 Mi	23 Fr	23 Mo 48	23 Mi	**23 Sa**	23 Di	23 Di	23 Fr	**23 So** Pfingsten	23 Mi	23 Fr
24 Do	**24 Sa**	24 Di	24 Do Heiligabend	**24 So**	24 Mi	24 Mi	**24 Sa**	**24 Mo** Pfingstmontag 21	24 Do	**24 Sa**
25 Fr	**25 So** Ende der Sommerzeit	25 Mi	**25 Fr** 1. Weihnachtstag	25 Mo 4	25 Do	25 Do	**25 So**	25 Di	25 Fr	**25 So**
26 Sa	26 Mo 44	26 Do	**26 Sa** 2. Weihnachtstag	26 Di	26 Fr	26 Fr	26 Mo 17	26 Mi	**26 Sa**	26 Mo 30
27 So	27 Di	27 Fr	**27 So**	27 Mi	**27 Sa**	**27 Sa**	27 Di	27 Do	**27 So**	27 Di
28 Mo 40	28 Mi	**28 Sa**	28 Mo 53	28 Do	**28 So**	**28 So** Beginn der Sommerzeit	28 Mi	28 Fr	28 Mo 26	28 Mi
29 Di	29 Do	**29 So** 1. Advent	29 Di	29 Fr		29 Mo 13	29 Do	**29 Sa**	29 Di	29 Do
30 Mi	30 Fr	30 Mo 49	30 Mi	**30 Sa**		30 Di	30 Fr	**30 So**	30 Mi	30 Fr
	31 Sa Reformationstag		31 Do Silvester	**31 So**		31 Mi		31 Mo 22		**31 Sa**

Sonn- und Feiertage — Ferien — Abschlussprüfungen

Abiturprüfung Mathematik
Technik
13. Klasse
FOS | BOS Bayern
2021

erstellt

für Schülerinnen und Schüler der Beruflichen Oberschule technischer Zweig in Bayern.

Nach dem neuen LehrplanPLUS

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Prüfungsbuch **Abiturprüfung Mathematik Technik FOS/BOS Bayern 13. Klasse 2021** sind die zentral gestellten Original-Prüfungen der letzten Jahren nach LehrplanPLUS zusammengestellt worden. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2021 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **21.05.2021** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2020) Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neuerungen - Immer auf dem aktuellen Stand sein

Sie finden im Übungstaiel der Reihenfolge nach Analysis Kuvendiskussion, Analysis Kurvendiskussion/Rotation, Rotation um die x-Achse, Rotation um die y-Achse und letztendlich Differentialrechnung. Im Stochastik-Übungsteil haben wir Ihnen die Prüfungsjahrgänge 2016 - 2019 aus FOS 12 Mathematik Nichttechnik zusammengestellt, sodass Ihnen eine große Anzahl an Übungsaufgaben mit gewohnt ausführlichen Lösungen vorliegen.
Im Anschluss finden Sie unsere Musterprüfungen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum
lernverlag® www.lern-verlag.de
lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – www.lern-verlag.de
lern.de, cleverlag und lernverlag sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

6. überarb. Auflage ©2020 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0063-6
Artikelnummer:
EAN 9783743000636

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis **Seite**

MINISKRIPT - Stochastik

ÜBUNGSTEIL - Analysis

ÜBUNGSTEIL - Stochastik

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2021

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2021 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant:

- Aus LB 3: berechnen uneigentliche Integrale 1. und 2.Art, um damit Maßzahlen der Flächeninhalte von Flächen zu ermitteln, die in x-oder y-Richtung unbegrenzt sind
- Aus LB 8: bestimmen für kombinatorische Problemstellungen die Anzahl der Belegungsmöglichkeiten für ein k-Tupel mithilfe des allgemeinen Zählprinzips. Damit erschließen sie sich unter anderem die Anzahl der Möglichkeiten für die Bildung eines Passworts

Symmetrie

Symmetrie

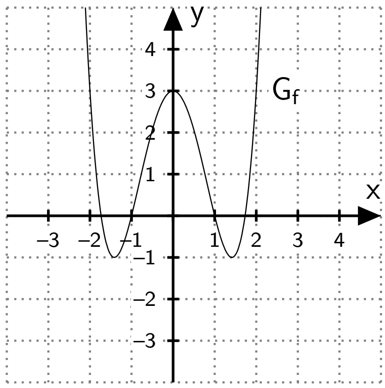
Für das Symmetrieverhalten eines Graphes einer ganzrationalen Funktion f gilt folgendes:

- *Achsensymmetrie zur y-Achse*: $f(-x) = f(x)$
  Das ist immer dann der Fall, wenn das Polynom **nur gerade Exponenten** hat.
- *Punktsymmetrie zum Ursprung*: $f(-x) = -f(x)$
  Das ist immer dann der Fall, wenn das Polynom **nur ungerade Exponenten** hat.

In allen anderen Fällen besitzt der Graph keine Standardsymmetrie. Er kann immernoch punkt- bzw. achsensymmetrisch sein, aber eben nicht zum Urspung bzw. zur y-Achse.

Beispiel zur Achsensymmetrie:
$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

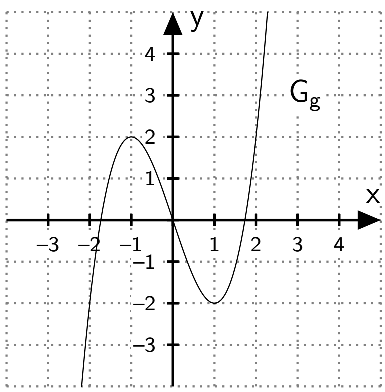
$$\begin{aligned} & \mathbf{f(-x) = f(x)} \\ \iff \quad & (-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \iff \quad & (-1)^4x^4 - 4(-1)^2x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \iff \quad & 1 \cdot x^4 - 4 \cdot 1 \cdot x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \\ \iff \quad & x^4 - 4x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 \end{aligned}$$



Somit ist der Graph G_f von f symmetrisch zur y-Achse.
Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man sich die Exponenten ansieht. Diese sind nur gerade (4;2;0).

Beispiel zur Punktsymmetrie:
$g(x) = x^3 - 3x$

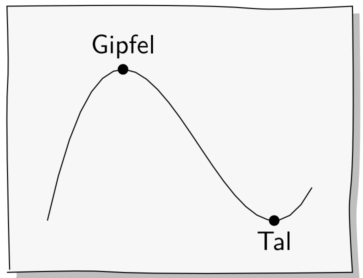
$$\begin{aligned} & \mathbf{g(-x) = -g(x)} \\ \iff \quad & (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) \\ \iff \quad & (-1)^3x^3 - 3(-1)x = -(x^3 - 3x) \\ \iff \quad & (-1) \cdot x^3 - 3(-1)x = -(x^3 - 3x) \\ \iff \quad & -x^3 + 3 = -(x^3 - 3x) \\ \iff \quad & -(x^3 - 3x) = -(x^3 - 3x) \end{aligned}$$



Somit ist der Graph G_g von g punktsymmetrisch zum Ursprung.
Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man sich die Exponenten ansieht. Diese sind nur **un**gerade (3;1).

Extrema und Monotonieverhalten

Rechts ist das Höhenprofil eines Berges gezeigt. Der Gipfel ist dabei der jeweils höchste Punkt in einer Umgebung, das Tal entsprechend der tiefste Punkt. Auf dem Weg zum Gipfel steigt der Berg zunächst an, fällt rechts vom Gipfel zum Tal hin wieder ab und steigt rechts neben dem Tal wieder an. Direkt am Gipfel / im Tal ist es flach, der Berg steigt weder an, noch fällt er ab.



Bei Funktionen ist der „Gipfel“ der **lokale** Hochpunkt und das „Tal“ der **lokale** Tiefpunkt. Global kann es also noch höhere bzw. tiefere Punkte geben.

Extremstellen und Monotonie

Die erste Ableitung f' einer Funktion f gibt Informationen über die Steigung des Graphen G_f:

- $f'(x) > 0$: die Funktion $f(x)$ ist streng monoton steigend
- $f'(x) < 0$: die Funktion $f(x)$ ist streng monoton fallend
- $f'(x) = 0$: die Funktion $f(x)$ hat einen Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkt

Gilt für die Steigung $f'(x) = 0$, liegt also häufig eine Extremstelle vor. Die Extremstellen einer Funktion f geben die Punkte an, in denen der Graph eine waagrechte Tangente besitzt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2$

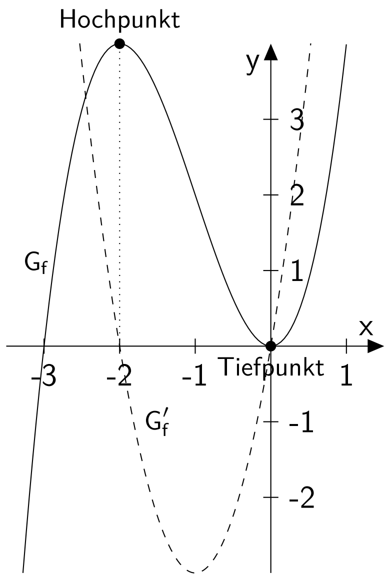
1. Schritt: Erste Ableitung berechnen:

$$f'(x)x = 3x^2 + 6x$$

2. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitung berechnen, durch Faktorisieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x \\ f'(x) &= 0 \\ 0 &= 3x^2 + 6x \\ 0 &= x(3x+6) \\ \iff \quad x_1 = 0; &\quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Siehe auch grafische Darstellung: x-Werte von Nullstellen der ersten Ableitung stimmen mit den Extremstellen der Funktion überein.



3. Schritt: Funktionswerte durch Einsetzen in die Funktionsgleichung ermitteln

$$y_1 = f(x_1) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$$
$$y_2 = f(x_2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4$$

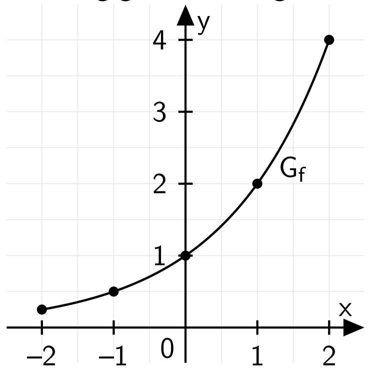
Die Koordinaten der Extrempunkte lauten also HOP $(-2\,|\,4)$ und TIP $(0\,|\,0)$.

Exponentialfunktionen

Definition

> Als Exponentialfunktionen bezeichnet man allgemein Funktionen vom Typ
>
> $$f(x) = b^x \quad \text{mit } b > 0; b \neq 1.$$
>
> Dabei wird **b** als Basis und **x** als Exponent bezeichnet, der auch als Funktionsvariable anzusehen ist.

Als einführendes Beispiel wird die Funktion $f(x) = 2^x$ betrachtet. Um sich den Verlauf einer Exponentialfunktion zu verdeutlichen, werden verschiedene Werte für x eingesetzt und dadurch folgender Graph der Funktion gezeichnet.
MERKE: Unabhängig der Basis gilt $b^0 = 1$, was als Anhaltspunkt für alle Exponentialfunktionen gilt.



$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$

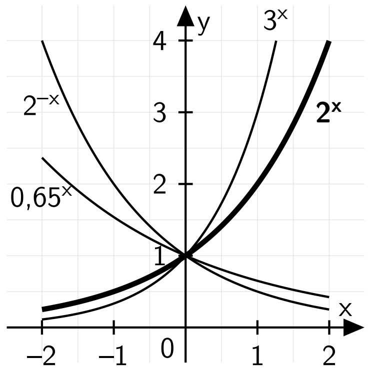
$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$

$f(0) = 2^0 = 1$

$f(1) = 2^1 = 2$

$f(2) = 2^2 = 4$

Ausgehend vom Graph der Funktion $f(x) = 2^x$, der in folgender Darstellung fett markiert ist, wird die Funktion leicht variiert und jeweils der Verlauf des Graphen betrachtet.



Variation	Funktion
Ausgangsfunktion	$\mathbf{2^x}$
größere Basis	3^x
Basis zw. 0 und 1	$0{,}65^x$
negativer Exponent	2^{-x}

Es zeigen sich wichtige **allgemeingültige** Tatsachen für Funktionen des Types b^x $(b > 0; b \neq 1)$:

- Der Graph verläuft stets oberhalb der x-Achse, die eine Asymptote des Graphen ist. Der Graph verläuft stets durch den Punkt $(0\,|\,1)$.
- Je **größer** die Basis $(b > 1)$, desto **steiler** verläuft der Graph.
  Je **größer** die Basis $(0 < b < 1)$, desto **flacher** verläuft der Graph.
- Der Graph verläuft **fallend**, wenn
  - für die Basis $0 < b < 1$ gilt und der Exponent ein positives Vorzeichen hat (Bsp: $0{,}65^x$), **oder**
  - für die Basis $b > 1$ gilt und der Exponent ein negatives Vorzeichen hat (Bsp: 2^{-x}).

Natürliche Exponentialfunktion

Eine Basis, die sehr häufig vorzufinden ist, ist die **Eulersche Zahl** $e = 2{,}718281\ldots$. Funktionen mit dieser Basis, also der Art $f(x) = e^x$ werden speziell als **e-Funktionen** bezeichnet.
Die e-Funktionen spielen bei realen Vorgängen eine wichtige Rolle. Beispiele sind der radioaktive Zerfall, die barometrische Höhenformel oder der Ladevorgang eines Kondensators.
Um Sicherheit im Umgang mit e-Funktionen zu bekommen, wird in den nachfolgenden Betrachtungen ausschließlich die Basis e verwendet.

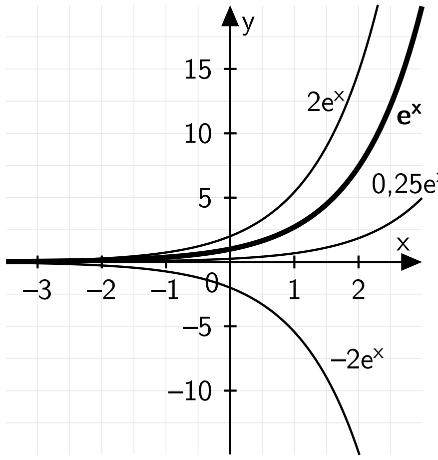
Parameter

Bisher wurde die einfache Form $f(x) = b^x$ betrachtet. Im Folgenden sollen nun zusätzliche Parameter und deren Einfluss untersucht werden, wenn die Funktion in der Form

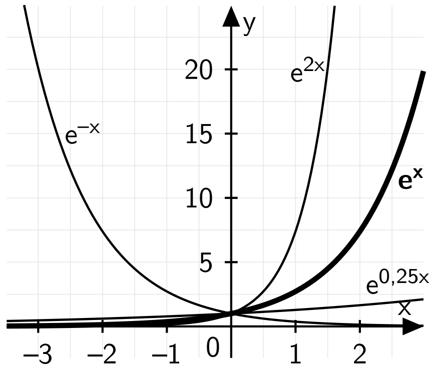
$$f(x) = a \cdot e^{c \cdot x + d} + k$$

vorliegt (mit Basis e).

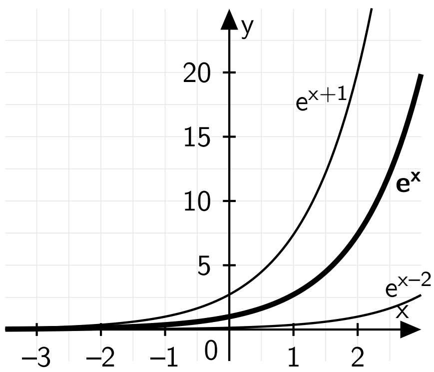
Die Einflüsse der Parameter a, c, d und k sollen anhand einiger Beispiele gezeigt werden.



Einfluss des Parameters a für $a \cdot e^x$
Der Parameter a sorgt allgemein für eine **Streckung** ($|a| > 1$) oder **Stauchung** ($|a| < 1$) des Funktionsgraphen entlang der **y-Achse**. Die Betragsstriche sind dabei relevant, denn wie nebenstehend zu sehen ist, wird der Graph für $a < 0$ zudem an der x-Achse gespiegelt.



Einfluss des Parameters c für $e^{c \cdot x}$
Der Parameter c bewirkt eine **Stauchung** ($|c| > 1$) oder **Streckung** ($|c| < 1$) des Graphen entlang der **x-Achse**. Auch hier muss der Betrag betrachtet werden, da für $c < 0$ eine Spiegelung entlang der y-Achse erfolgt.



Einfluss des Parameters d für e^{x+d}
Der Parameter d bewirkt eine **Verschiebung** nach links ($d > 0$) oder rechts ($d < 0$) entlang der **x-Achse**

Verknüpfte Funktionen

Verknüpfte Funktionen

Im Bezug auf Exponentialfunktionen liegen oft verknüpfte Funktionen der Form

$$f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)}$$

vor, bei denen es sich bei g(x) um konstante, lineare oder quadratische Funktionen und bei h(x) um lineare oder quadratische Funktionen handelt. Beispiele:

$$f_1(x) = -3 \cdot e^{-x^2+2x+7} \qquad f_2(x) = (x-1) \cdot e^{x^2+3} \qquad f_3(x) = (x^2 - 3x + 1) \cdot e^{5x}$$

Nachfolgend sollen alle einzelnen Themen der Kurvendiskussion für solche verknüpften Funktionen diskutiert werden.

Nullstellen

Gemäß dem **Satz vom Nullprodukt** wird ein Produkt null, wenn einer der Faktoren null wird. Da der Exponentialfunktionsterm nie gleich null wird, muss also jeweils der andere Faktor gleich null werden:

$$\mathbf{f(x) = g(x)} \cdot \overbrace{e^{h(x)}}^{\neq \mathbf{0}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{g(x) = 0}$$

$$\text{Beispiel:} \quad f(x) = (x^2 - 1) \cdot \overbrace{e^{3x+1}}^{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \pm 1$$

Schnitt mit der y-Achse

Wie bekannt liegt der Schnittpunkt $S\,(0\,|\,y_S)$ des Funktionsgraphen mit der y-Achse bei $x = 0$, sodass dies entsprechend in die Funktionsgleichung eingesetzt wird:

$$\mathbf{y_S = f(0) = g(0) \cdot e^{h(0)}} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{S\,(0\,|\,y_S)}$$

$$\text{Beispiel: } y_S = f(0) = (0^2 - 1) \cdot e^{3 \cdot 0 + 1} = -e^1 \approx -2{,}72 \quad \Rightarrow \quad S\,(0\,|\,-2{,}72)$$

Globalverhalten

Für das Globalverhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ muss beachtet werden, dass die **e-Funktion** stets die andere Funktion **dominiert**. Es ist „$\overbrace{e^{\infty}}^{\to\infty}$“$= \infty$ und „$\overbrace{e^{-\infty}}^{\to 0^+}$“$= 0$. Die andere Funktion entscheidet lediglich über das Vorzeichen des Grenzwertes, also ggf. ob dieser $-\infty$ oder $+\infty$ ist.

$$\text{Beispiele: } x \to -\infty\text{: } f(x) = \overbrace{(x^2 - 1)}^{\to+\infty} \cdot e^{\overbrace{3x + 1}^{\to-\infty}} \to „\infty \cdot e^{-\infty}“ = 0 \quad \text{(da e-Fkt. dominiert)}$$

$$x \to \infty\text{: } g(x) = \overbrace{(-3x - 4)}^{\to-\infty} \cdot e^{\overbrace{2x + 3}^{\to\infty}} \to „-\infty \cdot e^{\infty}“ = -\infty$$

Monotonie- und Krümmungsverhalten

Die Untersuchung von Monotonie und Krümmung des Funktionsgraphen erfolgt mithilfe der ersten und zweiten Ableitung analog zu rationalen Funktionen:

Nullstellen und Vorzeichentabelle **erste** Ableitung

$\Rightarrow$ Extrempunkte und Monotonieverhalten

Nullstellen und Vorzeichentabelle **zweite** Ableitung

$\Rightarrow$ Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Für die Erstellung der Vorzeichentabelle ist es hilfreich, die jeweilige Ableitung in zwei Faktoren zu zerlegen, und dann für jeden einzeln und daraus resultierend für deren Produkt das Vorzeichenverhalten zu bestimmen.
In der nachfolgenden Box sind kompakt alle wichtigen Regeln für das Ableiten von e-Funktionen und verknüpfte Funktionen dargestellt.

Ableitungsregeln

e-Funktion allgemein: Die einfache e-Funktion abgeleitet ist die e-Funktion selbst:

$$(e^x)' = e^x$$

Summenregel: Ist die Funktion eine Summe, werden alle Summanden einzeln abgeleitet.

$$\begin{array}{rll} & f(x) = g(x) + h(x) & \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) \\ \text{Beispiel:} & f(x) = e^x + 3 & \Rightarrow \quad f'(x) = (e^x)' + (3x)' = e^x + 3 \end{array}$$

Faktorregel: Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.

$$\begin{array}{rll} & f(x) = C \cdot g(x) & \Rightarrow \quad f'(x) = C \cdot g'(x)) \\ \text{Beispiel:} & f(x) = 4 \cdot e^x & \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot (e^x)' = 4 \cdot e^x \end{array}$$

Kettenregel: Für verkettete Funktionen ist die Ableitung der Gesamtfunktion die Ableitung der inneren mal die Ableitung der äußeren Funktion.

$$\begin{array}{rll} & f(x) = g(h(x)) & \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ \text{Beispiel:} & f(x) = e^{-2x+4} & \Rightarrow \quad f'(x) = e^{-2x+4} \cdot (-2x+4)' = -2 \cdot e^{-2x+4} \end{array}$$

Produktregel: Ist die Funktion ein Produkt aus zwei einzelnen Funktionen, so gilt für deren Ableitung die Produktregel in der Form

$$\begin{array}{rll} & f(x) = g(x) \cdot h(x) & \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ \text{Beispiel:} & f(x) = (x^2+3) \cdot e^x & \Rightarrow \quad f'(x) = (x^2+3)' \cdot e^x + (x^2+3) \cdot (e^x)' \\ & & \qquad\qquad = 2x \cdot e^x + (x^2+3) \cdot e^x = (x^2+2x+3) \cdot e^x \end{array}$$

All diese Regeln kommen bei der Berechnung der Ableitung in folgendem Beispiel zum Einsatz.
Abgeleitet werden soll die Funktion $f(x) = 4 \cdot (x^2 + 3x - 7) \cdot e^{-2x-1} + 12$. Zuerst wird der Term als Summe betrachtet, wobei ein Summand die verkettete Funktion und der andere Summand die konstante Zahl 12 ist. Nach **Summenregel** gilt nun:

$$f'(x) = (4 \cdot (x^2 + 3x - 7) \cdot e^{-2x-1} + 12)' = (4 \cdot (x^2 + 3x - 7) \cdot e^{-2x-1})' + \overbrace{(12)'}^{=0}$$

Logarithmen

Logarithmen

Logarithmieren ist die Umkehrung zum Potenzieren. Zum Logarithmus gehört allgemein eine **Basis** und eine entsprechende Zahl, die logarithmiert wird. Mithilfe des Logarithmus können Gleichungen, die Exponenten enthalten aufgelöst werden, da gilt:

$$b^x = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_b(y)$$

Der Logarithmus hat also die selbe Basis b, wie die zugehörige Exponentialfunktion.
Da die natürlichen Exponentialfunktionen mit der Basis e eine besondere Rolle spielen, tut dies auch der Logarithmus zur Basis e. Er heißt natürlicher Logarithmus und wird statt $\log_e(x)$ als $\ln(x)$ bezeichnet.
Für das Rechnen mit Logarithmen gibt es noch einige Regeln, die beachtet werden müssen, den Umgang aber auch erleichtern:

- für Produkte gilt: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- für Quotienten gilt: $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- für Potenzen gilt: $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$

Zu beachten ist, dass das Argument eines Logarithmus stets > 0 sein muss!

Gesucht ist die Lösung der Gleichung $5 = 10 \cdot 2^{x+1}$. Die Gleichung kann zunächst umgeformt werden:

$$\begin{aligned} && 5 &= 10 \cdot 2^{x+1} && \mid : 10 \\ \Longleftrightarrow && \frac{1}{2} &= 2^{x+1} \end{aligned}$$

Nun kann logarithmiert werden. Die Basis des Logarithmus ist die Basis des Exponentialterms, also 2:

$$\begin{aligned} && \frac{1}{2} &= 2^{x+1} && \mid \log_2(\,) \\ \Longleftrightarrow && \log_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \log_2(2^{x+1}) \\ \Longleftrightarrow && \log_2\left(\frac{1}{2}\right) &= x + 1 && \mid -1 \\ \Longleftrightarrow && x &= \log_2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

Entsprechend mit dem Taschenrechner berechnet, ergibt sich als Lösung der Gleichung also $x = -2$.
Hinweis: Durch die Anwendung des Logarithmus lassen sich auch Gleichungen des Typs $e^{g(x)} = e^{h(x)}$ lösen, da gilt:

$$e^{g(x)} = e^{h(x)} \quad \mid \ln(\,) \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) = h(x)$$

Gebrochen-rationale Funktionen

Definition

Eine gebrochen-rationale Funktion ist eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

bei der es sich bei Z(x) (Zählerterm) und N(x) (Nennerterm) um ganzrationale Funktionen (Polynome) handelt. N(x) ist mindestens eine lineare Funktion oder N(x) muss unabhängig die Variable x enthalten.

Zählergrad (ZG) und Nennergrad (NG)

Bei Zähler- und Nennergrad handelt es sich jeweils um den höchsten Exponenten der Variable x, der im Zähler- oder Nennerpolynom auftritt. Dies ist an nebenstehendem Beispiel gezeigt. Zähler- und Nennergrad spielen unter anderem eine Rolle bei der Ermittlung von Asymptoten oder Grenzwerten.

ZG = 3

$$f(x) = \frac{x^{3} + 3x - 7}{2x^{2} - 5x + 4}$$

NG = 2

Beispiel 1:

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x^3 + 3x^2 - 2x + 7}$ ist eine gebrochen-rationale Funktion mit Zählergrad ZG = 2 und Nennergrad NG = 3. Funktionen wie diese, für die **ZG** < **NG** gilt, werden als **echt gebrochen-rationale Funktionen** bezeichnet.

Beispiel 2:

Die Funktion $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$ ist eine gebrochen-rationale Funktion mit Zählergrad ZG = 2 und Nennergrad NG = 1. Funktionen wie diese, für die **ZG** ≥ **NG** gilt, werden als **unecht gebrochen-rationale Funktionen** bezeichnet. Eine solche kann per Polynomdivision stets in einen ganzrationalen und einen echt gebrochen-rationalen Teil aufgeteilt werden:

$$\begin{array}{rrrl}
 & (x^2 & +4x & +5) \;:\; (x+3) = \overbrace{x+1}^{\text{ganzrat.Teil}} + \overbrace{\frac{2}{x+3}}^{\text{echt gebr.rat.Teil}} \\
- & (x^2 & +3x &) \\
\hline
 & & x & +5 \\
 & - & (x & +3) \\
\hline
 & & & 2
\end{array}$$

Ableitungsregeln

Mithilfe von Ableitungen können wichtige Informationen wie beispielsweise das Monotonie- oder Krümmungsverhalten analysiert werden. Neben **Produktregel** und **Kettenregel**, die auch für viele andere Funktionstypen relevant sind, ist dabei für gebrochen-rationale Funktionen zusätzlich die **Quotientenregel** sehr wichtig.

Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\text{Bsp.:} \quad f(x) = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x \cdot e^{x^2}$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$\text{Bsp.:} \quad f(x) = x^2 \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$\text{Bsp.:} \quad f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot e^x - e^x}{x^2}$$

Beispiel:

Es wird erneut die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$ betrachtet, für welche die erste Ableitung gesucht ist.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3} \\
f'(x) &= \left[\frac{(x^2 + 4x + 5)' \cdot (x + 3) - (x^2 + 4x + 5) \cdot (x + 3)'}{(x + 3)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{(2x + 4) \cdot (x + 3) - (x^2 + 4x + 5) \cdot 1}{(x + 3)^2} && \text{(Anwendung Quotientenregel)} \\
&= \frac{2x^2 + 4x + 6x + 12 - (x^2 + 4x + 5)}{(x + 3)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{x^2 + 6x + 7}{(x + 3)^2}
\end{aligned}$$

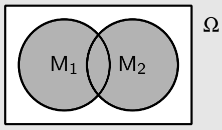
Finden von Stammfunktionen

Die Stammfunktion einer gebrochen-rationalen Funktion kann grundsätzlich anhand einer der folgenden fünf Fälle gefunden werden (ausführliche Beispiele nachfolgend):

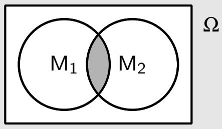
1. Der Funktionsterm ist von einfacher Struktur, d.h. im Nennerpolynom ist neben einem konstanten Faktor ausschließlich ein x, x^2, x^3...
   $\Rightarrow$ Term „auseinanderziehen“, kürzen und einzeln integrieren

Allgemeine Regeln für Verknüpfungen

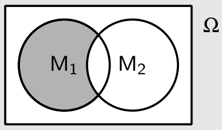
- *Vereinigungsmenge*: $M_1 \cup M_2$
  enthält alle Elemente die in M_1 oder M_2 vorkommen



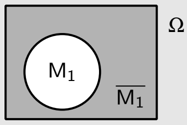
- *Schnittmenge*: $M_1 \cap M_2$
  enthält alle Elemente die sowohl in M_1 als auch in M_2 vorkommen



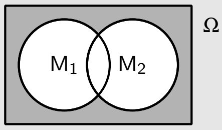
- *Komplementmenge*: $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \overline{M_2}$
  enthält Elemente aus M_1, die nicht auch in M_2 vorkommen



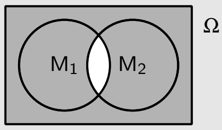
- *Absolutes Komplement*: $\overline{M}_1$
  enthält alle Elemente, die nicht in M_1 enthalten sind



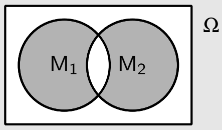
- **1. De Morgansche Regel**
  Absolutes Komplement der Vereinigungsmenge:
  $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 = \overline{M_1 \cup M_2}$
  enthält alle Elemente, die weder in M_1 noch in M_2 vorkommen



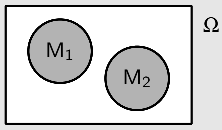
- **2. De Morgansche Regel**
  Absolutes Komplement der Schnittmenge:
  $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 = \overline{M_1 \cap M_2}$
  enthält alle Elemente, die nicht sowohl in M_1 als auch in M_2 vorkommen



- *Symmetrische Differenzmenge*:
  $(M_1 \cap \overline{M}_2) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$
  enthält alle Elemente, die in M_1 oder M_2 aber nicht in beiden gleichzeitig vorkommen



Vereinbarkeit:
Zwei Mengen sind unvereinbar, wenn $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.



Da Ereignisse durch Mengen beschrieben werden, sind hier die selben **Verknüpfungen** gültig.

Beispiel

Für den Würfelwurf und die Ereignisse E_1: „Es wird eine 1 oder 2 gewürfelt." und E_2: „Es wird eine 2 oder 3 gewürfelt", ergeben sich folgende Verknüpfungen:

$E_3 = E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3\}$: „Es wird eine 1, 2 oder 3 gewürfelt."

$E_4 = E_1 \cap E_2 = \{2\}$: „Es wird eine 2 gewürfelt." $E_5 = E_1 \setminus E_2 = \{1\}$: „Es wird eine 1 gewürfelt"

$E_7 = \overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 4, 5, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$

$E_8 = \overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 4, 5, 6\} = \{4, 5, 6\}$

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind **vereinbar**, da $E_1 \cap E_2 = \{2\} \neq \emptyset$.

Vierfeldertafel

Ein wichtiges Hilfsmittel um Zusammenhänge zwischen den Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse herzustellen, ist die Vierfeldertafel:

Vierfeldertafel

Betrachtet werden die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse E_1 und E_1, sowie deren Verknüpfungen. In der Vierfeldertafel werden diese wie folgt dargestellt:

	E_1	$\overline{E}_1$	Summe
E_2	$P(E_1 \cap E_2)$	$P(\overline{E}_1 \cap E_2)$	$P(E_2)$
$\overline{E}_2$	$P(E_1 \cap \overline{E}_2)$	$P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)$	$P(\overline{E}_2)$
Summe	$P(E_1)$	$P(\overline{E}_1)$	1

Der Eintrag in das Feld „Summe“ ergibt sich dabei jeweils als Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten die links (Zeile) oder darüber (Spalte) liegen.

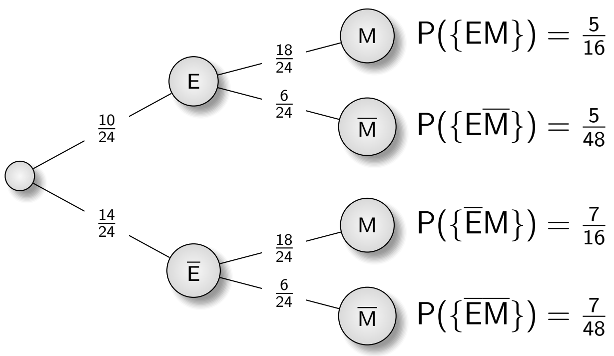
Beispiel

Eine Schulklasse mit 24 Schülern und Schülerinnen sind 10 Englischprofis, 18 Matheprofis und 3 schlecht in beiden Fächern. Für einen zufällig ausgewählten Schüler werden folgende Ereignisse mit entsprechenden Gegenereignissen betrachtet:

E : Der Schüler ist Englischprofi $\qquad \overline{E}$: Der Schüler ist kein Englischprofi

M : Der Schüler ist Matheprofi $\qquad \overline{M}$: Der Schüler ist kein Matheprofi

Aus den Zahlen der Angabe lässt sich ein Baumdiagramm erstellen.



Diese Wahrscheinlichkeiten werden dann an passender Stelle in die Vierfeldertafel eingetragen.

$$P(E) = \frac{10}{24}; \quad P(M) = \frac{18}{24}; \qquad P(\overline{M} \cap \overline{E}) = \frac{3}{24}$$

	E	$\overline{E}$	Summe
M			$\frac{18}{24}$
$\overline{M}$		$\frac{3}{24}$	
Summe	$\frac{10}{24}$		1

Die restlichen Einträge der Vierfeldertafel ergeben sich dann jeweils so, dass die Summen in Zeilen und Spalten jeweils korrekt sind. Zunächst sind dies hier also die fett gedruckten Einträge und dann alle anderen.

Binomialverteilung

Anhand des nachfolgenden Szenarios soll Ihnen die Bedeutung der Binomialverteilung und die zugehörigen Aufgabentypen gezeigt werden.

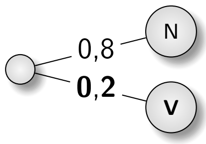
Beispiel

Die Menschen leben immer gesundheitsbewusster und verzichten teilweise auf tierische Produkte in der Ernährung. Die Gastronomiebranche reagiert darauf, indem viele Restaurants ihre Speisekarten umstellen und nun auch vegetarische Gerichte anbieten.
In einem Restaurant werden nun jeweils Gäste nach ihren Essgewohnheiten beurteilt. Hierbei ist davon auszugehen, dass **20 Prozent** der Besucher ein vegetarisches Gericht bestellen werden.

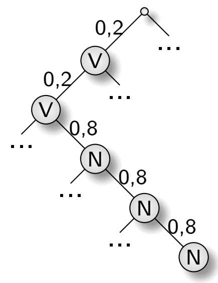
Bedeutung der Binomialverteilung anhand von Beispielen

Folgende Beispiele werden als Ereignisse E_n betrachtet:
E_1: „**Der nächste Gast bestellt ein vegetarisches Gericht.**"
Die Wahrscheinlichkeit dafür ergibt sich aus den Angaben zu $P(E_1) = p = 0{,}2$. Die Situation entspricht dem nebenstehenden Baumdiagramm. Dabei steht der Buchstabe „V" für ein vegetarisches Gericht, der Buchstabe „N" für ein nicht vegetarisches Gericht.

Darstellung als Baumdiagramm



E_2: „**Genau die ersten zwei der nächsten fünf Gäste bestellen ein vegetarisches Gericht.**"
Ein Baumdiagramm hätte nun schon fünf Stufen! Obwohl dies zwar aufwändig, aber noch möglich wäre, scheidet die Möglichkeit komplett aus, wenn man 50 oder 100 Gäste befragt, denn dann bräuchte man ein 50- oder 100-stufiges Baumdiagramm. Stattdessen überlegt man sich, welchem Pfad man theoretisch folgen würde:
Die Einzelwahrscheinlichkeit für den ersten Gast (vegetarisch) beträgt $p = 0{,}2$, die für den zweiten (vegetarisch) ebenfalls $p = 0{,}2$, die für den dritten und alle weiteren (nicht vegetarisch) $(1-p) = 0{,}8$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich durch Multiplikation:



$$\begin{aligned} P(E_2) &= 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \\ &= 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 \\ &= \underline{\underline{0{,}02048}} \end{aligned}$$

E_3: „**Von den nächsten fünf Gästen bestellen genau zwei aufeinanderfolgende Gäste ein vegetarisches Essen.**"
Die eigentliche Wahrscheinlichkeit, dass zwei aus fünf sich ein vegetarisches Essen bestellen stimmt mit der von E_2 überein, **ABER** es müssen zusätzlich die möglichen **Kombinationen** beachtet werden. Für zwei vegetarische Essen (V) die direkt aufeinanderfolgen sollen und drei nicht vegetarische (N) Essen ergeben sich folgende Kombinationen:

Mögliche Kombinationen
1. VVNNN **2.** NVVNN
3. NNVVN **4.** NNNVV

Es gibt **4** Kombinationen, weshalb für die Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(E_3) = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 \cdot \mathbf{4} = \underline{\underline{0{,}08192}}$$

Aufgabe 1 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2012, AI 2
Themen: Extrempunkte, Stammfunktion

4 Gegeben ist weiter die Funktion $g\colon x \mapsto \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

4.1 Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von g.
$\left(\text{Teilergebnis: } g'(x) = \dfrac{2 - e^x}{2e^x\sqrt{e^x - 1}}\right)$ **7 BE**

4.2 Zeigen Sie, dass für $x > 0$ folgende Beziehung für $g(x)$ erfüllt ist: $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} - g'(x)$, und ermitteln Sie damit eine Stammfunktion von g. **7 BE**

Lösungsvorschlag A1 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2012, AI 2

1 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}$ mit $D_g = \mathbb{R}_0^+$

1.1 Mithilfe von Quotienten- und Kettenregel wird die erste Ableitung bestimmt.

Ermitteln der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} \\
g'(x) &= \left[\frac{(\sqrt{e^x - 1})' \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1} \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \left[\frac{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot (e^x - 1)' \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1} \cdot e^x}{(e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} e^x \cdot \cancel{e^x} - \sqrt{e^x - 1} \cdot \cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}1}} && \text{(Anwendung und Kürzen)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1}}{e^x} && \text{(Erweitern des Bruchs)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1}}{e^x} \cdot \frac{2\sqrt{e^x - 1}}{2\sqrt{e^x - 1}} && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= \frac{e^x - 2(e^x - 1)}{2e^x\sqrt{e^x - 1}} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{2 - e^x}{2e^x\sqrt{e^x - 1}} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Koordinaten und Art der Extrempunkte

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind die möglichen Extremstellen der Funktion $g(x)$. Für die Nullstellen der ersten Ableitung muss der Zählerterm der ersten Ableitung den Wert Null annehmen. Es gilt also

$$g'(x) = 0 \iff 2 - e^x = 0 \iff 2 = e^x \iff x = \ln(2)$$

Das Vorzeichen des Zählerterms entscheidet außerdem über das Vorzeichen der Ableitung. Mit der eben bestimmten Nullstelle des Zählerterms gilt dann:

$$\begin{aligned}
x < \ln(2) &\iff 2 - e^x > 0 \iff g'(x) > 0 \\
x > \ln(2) &\iff 2 - e^x < 0 \iff g'(x) < 0
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs ist der Graph der Funktion also streng monoton steigend im Intervall $[0; \ln(2)]$ und streng monoton fallend in $[\ln(2); \infty[$. Somit liegt bei $x = \ln(2)$ ein Hochpunkt vor. Es wird noch der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt.

$$g(\ln(2)) = \frac{\sqrt{e^{\ln(2)} - 1}}{e^{\ln(2)}} = \frac{\sqrt{2 - 1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Damit existiert der Hochpunkt $\underline{\underline{HOP\left(\ln(2) \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)}}$. Da der Graph der Funktion in $[0; \ln(2)]$ fällt und stetig ist, muss zusätzlich ein Randminimum bei $x = 0$ existieren.

$$g(0) = \frac{\sqrt{e^0 - 1}}{e^0} = \frac{\sqrt{0}}{1} = 0$$

Aufgabe 9 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2014, AI 2
Themen: Grenzwert, Monotonie, Extrempunkte, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist nun die Funktion $g\colon x \mapsto 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Ermitteln Sie das Verhalten von $g(x)$ für $x \to +\infty$. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von g. **8 BE**

1.3 Der Graph von g, die x – Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ schließen eine Fläche A ein. Bei der Rotation der Fläche A um die x – Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts dieses Rotationskörpers. **6 BE**

Lösungsvorschlag A9 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2014, AI 2

1.0 Gegeben ist nun die Funktion $g\colon x \mapsto 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Es wird das Verhalten der Funktion im Unendlichen betrachtet.

$$x \to \infty\colon g(x) = 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{\overbrace{4 \cdot \sqrt{x}}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\to\infty}} \to 0 \quad \text{(da e-Fkt. dominiert)}$$

1.2 Es wird zunächst mithilfe von Produkt- und Kettenregel die erste Ableitung der Funktion bestimmt.

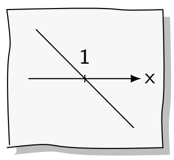
Ermitteln der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
g(x) &= 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \\
g'(x) &= 4 \cdot \left[(\sqrt{x})' \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \sqrt{x} \cdot (e^{-\frac{1}{2}x})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= 4 \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 2\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} && \text{((}e^{-\frac{1}{2}x}\text{) Ausklammern)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}\right) && \text{((}\tfrac{2}{\sqrt{x}}\text{) Ausklammern)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (1 - x) && \text{(Mit } D_{g'} =]0;\, \infty[\text{)}
\end{aligned}$$

Monotonieverhalten und Koordinaten der Extrempunkte

Da sowohl die Wurzel im Nennerterm des Bruchs, als auch $e^{-\frac{1}{2}x}$ für $x \in D_{g'}$ positive Werte annehmen, hängt das Vorzeichen der ersten Ableitung vom Ausdruck in der Klammer ab. Dabei handelt es sich um den Term einer linearen Funktion (siehe Skizze):

Skizze



$$\begin{aligned}
g'(x) > 0 &\iff (1 - x) > 0 \iff 0 < x < 1 \\
g'(x) < 0 &\iff (1 - x) < 0 \iff 1 < x
\end{aligned}$$

Somit ist der Graph G_g im Intervall $[0;\, 1]$ streng monoton steigend und in $[1;\, \infty[$ streng monoton fallend.

Aus dem Monotonieverhalten folgt, dass ein Maximum bei $x = 1$ liegt. Gleichzeitig liegt ein Randminimum am linken Rand des Definitionsbereichs bei $x = 0$. Für die Funktionswerte an diesen Stellen gilt:

$$g(1) = 4 \cdot \sqrt{1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 1} = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$$

$$g(0) = 4 \cdot \sqrt{0} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = 0$$

Damit ergeben sich die Koordinaten der Extrempunkte zu $\underline{\underline{TIP(0\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{HOP\left(1 \,\middle|\, \frac{4}{\sqrt{e}}\right)}}$.

1.3 Um das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen wird folgende Formel verwendet. Um das Integral zu lösen wird dabei partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Abräumer“; durch mehrmaliges partielles Integrieren verschwindet im Integral das Polynom als Faktor)

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_0^4 (g(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left(4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 16x \cdot e^{-x} dx = 16\pi \cdot \int_0^4 x \cdot e^{-x} dx \\
&= 16\pi \cdot \left([x \cdot (-e^{-x})]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x}) dx \right) = 16\pi \cdot \left([x \cdot (-e^{-x})]_0^4 - [e^{-x}]_0^4 \right) \\
&= 16\pi \cdot \left(-4e^{-4} + 0 \cdot e^{-0} - \left(e^{-4} - e^{-0} \right) \right) = 16\pi \cdot (-4e^{-4} - e^{-4} + 1) \\
&= \underline{\underline{16\pi \cdot (1 - 5e^{-4})\,[VE]}} \approx 45{,}66\,[VE]
\end{aligned}
$$

Übungsteil

Aufgabe 10 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2016, AII 3
Themen: Extrempunkte, Graphische Darstellung, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist nun die Funktion $h\colon x \mapsto 5x \cdot e^{2x}$ mit $D_h =]-\infty; 0]$.

1.1 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von h. Zeichnen Sie den Graphen für $-3 \leq x \leq 0$ (1 LE = 2 cm). **7 BE**

1.2 Bei der Rotation des Graphen von h um die x-Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper.
Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens. **7 BE**

Lösungsvorschlag A10 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2016, AII 3

1.0 Gegeben ist die Funktion $h\colon x \mapsto 5x \cdot e^{2x}$ mit $D_h =]-\infty;\, 0]$.

1.1 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe der Produktregel wird die erste Ableitung der Funktion berechnet:

$$\begin{aligned} h(x) &= 5x \cdot e^{2x} \\ h'(x) &= \left[(5x)' \cdot e^{2x} + 5x \cdot (e^{2x})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\ &= 5 \cdot e^{2x} + 5x \cdot e^{2x} \cdot 2 && \text{(Anwendung und } (5e^{2x}) \text{ Ausklammern)} \\ &= 5e^{2x} \cdot (1 + 2x) \end{aligned}$$

Art und Koordinaten der Extrempunkte

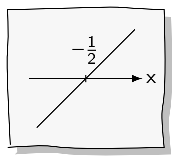
Die Nullstellen der ersten Ableitung entsprechen möglichen Extremstellen der Funktion. Da die Exponentialfunktion nie Null wird, gilt:

$$h'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Da der Exponentialterm stets positiv ist, entspricht das Vorzeichen der Ableitung dem Vorzeichen des Terms $(1 - 2x)$. Dabei handelt es sich um eine lineare Funktion (siehe Skizze), sodass gilt:

$$\begin{aligned} x < -\frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad h'(x) < 0 \\ x > -\frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad h'(x) > 0 \end{aligned}$$

Skizze



Unter Beachtung des Definitionsbereichs ist der Graph von $h(x)$ somit streng monoton fallend im Intervall $\left]-\infty;\, -\frac{1}{2}\right]$ und streng monoton wachsend im Intervall $\left[-\frac{1}{2};\, 0\right]$. Damit liegt bei $x = -\frac{1}{2}$ ein Minimum vor. Da die Funktion in $\left[-\frac{1}{2};\, 0\right]$ wachsend ist, liegt außerdem ein Randmaximum bei $x = 0$ vor. Durch Einsetzen werden die zugehörigen Funktionswerte bestimmt:

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{1}{2}\right) &= 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{5}{2}e^{-1} = -\frac{5}{2e} \\ f(0) &= 5 \cdot 0 \cdot e^{2\cdot 0} = 0 \end{aligned}$$

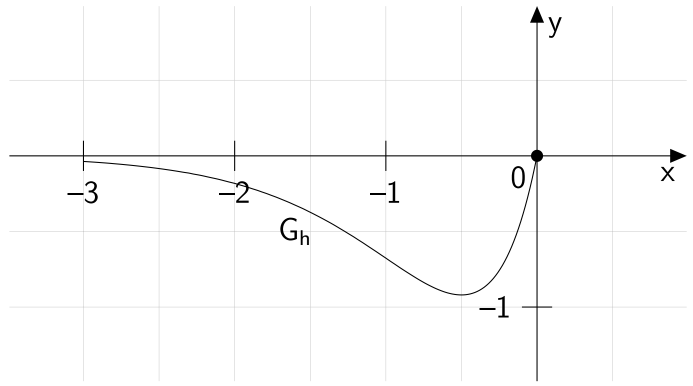
Es liegt ein lokales Minimum $\underline{\underline{TIP\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, -\frac{5}{2e}\right)}}$ und ein Randmaximum $\underline{\underline{HOP\,(0\,|\,0)}}$ auf dem Rand vor.

Graphische Darstellung

Zum Zeichnen wird zunächst eine Wertetabelle aufgestellt:

x	–3	–2	–1,5	–1	–0,5	0
h(x)	–0,04	–0,18	–0,37	–0,68	–0,92	0

Grafische Darstellung:



1.2 Für das Rotationsvolumen gilt:

$$k \to -\infty: V = \pi \cdot \int_k^0 (h(x))^2 dx = 25 \cdot \pi \cdot \int_k^0 x^2 \cdot e^{4 \cdot x} dx$$

Das Integral wird dabei zunächst unbestimmt gelöst. Dazu wird partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Abräumer"; durch mehrmaliges partielles Integrieren verschwindet im Integral das Polynom als Faktor)

$$u = x^2 \qquad u' = 2x$$
$$v' = e^{4x} \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

Eingesetzt gilt für das Integral:

$$\int x^2 \cdot e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{4}e^{4x} \cdot 2x dx = \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int e^{4x} \cdot x dx$$

Erneut wird partiell integriert:

$$u = x \qquad u' = 1$$
$$v' = e^{4x} \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

Für das Integral folgt:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^{4x} dx &= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int e^{4x} \cdot x dx \\ &= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{4x} \cdot x - \frac{1}{4}\int e^{4x} dx\right) \\ &= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{8}e^{4x} \cdot x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}e^{4x} \\ &= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right)\end{aligned}$$

Damit kann der Wert des Rotationsvolumen bestimmt werden.

$$k \to -\infty: V = 25 \cdot \pi \cdot \int_k^0 x^2 \cdot e^{4 \cdot x} dx = 25 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{4}e^{4x} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right)\right]_k^0$$

$$= 25 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}\underbrace{e^0}_{=1} \cdot \left(0 - 0 + \frac{1}{8}\right) - \underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{4}e^{4k}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{8}\right)}_{\to\infty}\right)}_{\to 0,\ \text{da e-Fkt. dom.}}$$

$$\to 25 \cdot \pi \cdot \frac{1}{32} = \underline{\underline{\frac{25}{32}\pi\,[\text{VE}]}}$$

Aufgabe 11 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2017, AII 2
Themen: Nullstelle, Grenzwert, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist weiter die Funktion $h\colon x \mapsto \dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von h und das Verhalten von $h(x)$ für $x \to +\infty$. **3 BE**

1.2 Der Graph von h, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche A ein. Bei der Rotation der Fläche A um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers. **5 BE**

Lösungsvorschlag A11 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2017, AII 2

1.0 Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ mit Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 **Nullstelle**
Die Nullstelle der Funktion stimmt mit der Nullstelle des Zählerterms überein, die direkt zu $\underline{\underline{x = 0}}$ abgelesen werden kann, da $\sqrt{0} = 0$.

Verhalten für x → +∞

$$x \to \infty\colon h(x) = \frac{4\overbrace{\sqrt{x}}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to\infty}+3} \to 0 \quad \text{(da NG>ZG)}$$

1.2 Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Nullstelle bei $x = 0$ und der gegebenen Gerade bei $x = 3$. Für das Rotationsvolumen gilt dann:

$$V = \pi\int_0^3 (h(x))^2 dx = \pi\int_0^3 \frac{16x}{(x^2+3)^2}dx = 16\pi\int_0^3 \frac{x}{(x^2+3)^2}dx$$

Zur Lösung des Integrals wird folgende Substitution verwendet:

$$z = x^2+3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x}$$

Das Integral wird nun zunächst unbestimmt gelöst:

$$\int \frac{x}{(x^2+3)^2}dx = \int \frac{x}{z^2}\frac{dz}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2}dz = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right) + C = -\frac{1}{2z} + C = -\frac{1}{2(x^2+3)} + C$$

Die Integrationskonstante entfällt beim bestimmten Integrieren, sodass für das Volumen weiter gilt:

$$V = 16\pi\int_0^3 \frac{x}{(x^2+3)^2}dx = 16\pi\left[-\frac{1}{2(x^2+3)}\right]_0^3 = -8\pi\left(\frac{1}{3^2+3} - \frac{1}{0^2+3}\right) = -8\pi\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= -8\pi\cdot\left(-\frac{3}{12}\right) = \underline{\underline{2\pi\,[VE]}}$$

Übungsteil

Aufgabe 12 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2019, AII 1 - adaptiert
Themen: Definitionsmenge (Parameter), Schnittpunkt (Parameter), Symmetrie, Asymptoten, Monotonie, Graphische Darstellung, Umkehrfunktion, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto 1 - \frac{2 \cdot e^x}{e^x + a}$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie jeweils in Abhängigkeit von a die maximale Definitionsmenge D_{f_a} und die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f_a mit der y-Achse, sofern vorhanden. **5 BE**

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = -1$.

1.2 Stellen Sie $f_{-1}(x)$ durch einen einzigen Bruchterm dar und zeigen Sie, dass der Graph von f_{-1} punktsymetrisch zum Koordinatenursprung ist. **5 BE**

1.3 Ermitteln Sie die Gleichungen der waagrechten Asymptoten des Graphen von f_{-1}. **3 BE**

1.4 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_{-1}.

[Mögliches Teilergebnis: $f'_{-1}(x) = \frac{2 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$] **4 BE**

1.5 Zeichnen Sie den Graphen von f_{-1} für $-3 \leq x \leq 3$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartetisches Koordinatensystem ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$). Planen Sie in y-Richtung etwa $-4 \leq y \leq 4$ ein. **4 BE**

1.6.0 Die Funktion f_{-1} ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich).

1.6.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion von f_{-1}. Geben Sie auch die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f_{-1} an. **4 BE**

1.6.2 Der Punkt $Q\,(2\,|?)$ liegt auf dem Graphen der Umkehrfunktion von f_{-1}. Berechnen Sie die Steigung der Tangente im Punkt Q an den Graphen der Umkehrfunktion von f_{-1}. **3 BE**

1.7 Der Graph von f_{-1} schließt mit der x-Achse und den senkrechten Geraden bei $x = \ln(2)$ und $x = \ln(15)$ eine endliche Fläche ein. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein rotationssymetrischer Körper.
Zeigen Sie zunächst, dass gilt: $\left(1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}\right)^2 = 1 + \frac{4e^x}{(e^x - 1)^2}$. Berechnen Sie anschließend die Maßzahl der Volumens des rotationsymmetrischen Körpers. **7 BE**

Lösungsvorschlag A12 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2019, AII 1 - adaptiert

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = 1 - \frac{2 \cdot e^x}{e^x + a}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 **Definitionsmenge**

Die Definitionsmenge wird eingeschränkt, da nicht durch null geteilt werden darf. Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

Fall 1: $a > 0$

In diesem gilt für $e^x + a > 0$. Somit kann nie durch nie dividiert werden und die Definitionsmenge in diesem Fall lautet $\underline{\underline{D_{f_a} = \mathbb{R}}}$.

Fall 2: $a < 0$

In diesem Fall muss speziell die Bedingung $e^x + a \neq 0$ gefordert werden:

$$\begin{aligned} & e^x + a \neq 0 && \mid -a \\ \Longleftrightarrow\quad & e^x \neq -a && \mid \ln(\ ) \\ \Longleftrightarrow\quad & x \neq \ln(-a) \end{aligned}$$

In diesem Fall lautet die Definitionsmenge also $\underline{\underline{D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{\ln(-a)\}}}$.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Um diesen zu bestimmen wird $x = 0$ in die Funktionsgleichung eingesetzt. Gemäß der eben bestimmten Definitionsmenge muss dabei bereits jetzt der Fall $a = -1$ ausgeschlossen werden, da in diesem Fall $x = 0 = \ln(-(-1)) \notin D_{f_{-1}}$ ist. Für alle Fälle $a \neq -1$ gilt also:

$$f_a(0) = 1 - \frac{2 \cdot e^0}{e^0 + a} = 1 - \frac{2 \cdot 1}{1 + a} = 1 - \frac{2}{1 + a}$$

Für $a \neq -1$ lauten die Koordinaten des Schnittpunkts mit der y-Achse also $\underline{\underline{\left(0 \,\middle|\, 1 - \frac{2}{1+a}\right)}}$.

1.2 **Darstellung durch einen einzigen Bruchterm**

Der Gegebene Term wird erweitert und zusammengefasst:

$$f_{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} - \frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - 2e^x}{e^x - 1} = \frac{-1 - e^x}{-1 + e^x} = \frac{\cancel{(-1)}(1 + e^x)}{\cancel{(-1)}(1 - e^x)} = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$$

Nachweis der Punktsymmetrie

Wenn Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung vorliegen soll, muss die Bedingung $f_{-1}(-x) = -f_{-1}(x)$ erfüllt sein.

$$f_{-1}(-x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1 + e^x}{(-1)(1 - e^x)} = -\frac{1 + e^x}{1 - e^x} = -f_{-1}(x) \quad \text{q.e.d.}$$

1.3 **Gleichungen der waagrechten Asymptoten**

Um die Gleichungen zu bestimmen wird das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ betrachtet.

$$x \to -\infty: f_{-1}(x) = \frac{1 + \overbrace{e^x}^{\to 0}}{1 - \underbrace{e^x}_{\to 0}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Somit liegt eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = 1}}$ vor. Aufgrund der Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung existiert eine weitere Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = -1}}$.

1.4 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe der Quotientenregel wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$
\begin{aligned}
f_{-1}(x) &= \frac{1+e^x}{1-e^x} \\
f'_{-1}(x) &= \left[\frac{(1+e^x)'\cdot(1-e^x)-(1+e^x)\cdot(1-e^x)'}{(1-e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{e^x\cdot(1-e^x)-(1+e^x)\cdot(-e^x)}{(1-e^x)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{e^x-e^{2x}+e^x+e^{2x}}{(1-e^x)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{2e^x}{(1-e^x)^2} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Monotonieverhalten

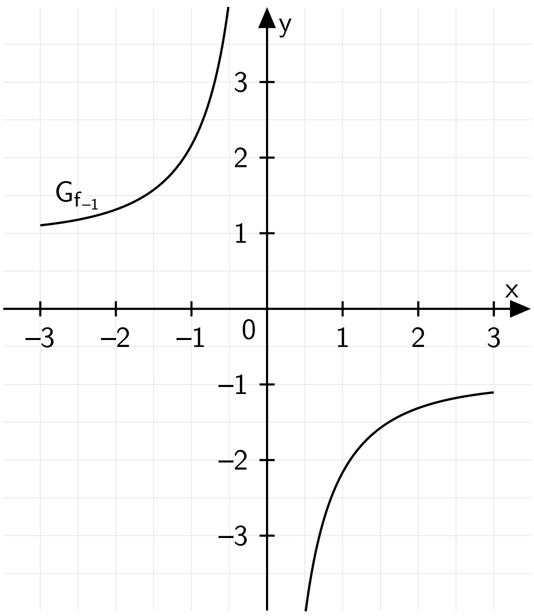
Weil die Exponentialfunktion stets positive Werte annimmt, gilt für den Zählerterm stets $2e^x > 0$. Auch der Nennerterm ist aufgrund des Quadrates und unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs stets positiv.
Somit ist für alle $x \in D_{f_{-1}}$ die Bedingung $f'_{-1}(x) > 0$ erfüllt. Der Graph $G_{f_{-1}}$ ist damit streng monoton steigend in $]-\infty; 0[$ und $]0; \infty[$.

1.5 **Graphische Darstellung**

Die Zeichnung soll folgende Elemente enthalten: Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

x	–3	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	3
$f_{-1}(x)$	1,10	1,31	2,16	4,08	–4,08	–2,16	–1,31	–1,10

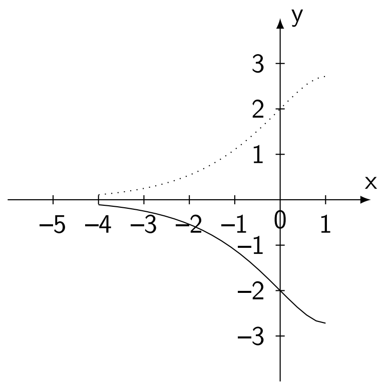
Mithilfe dieser Werte kann nun die grafische Darstellung erfolgen:



Übungsteil

Aufgabe 15 - Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2015, AII 2 - adaptiert

1.0 Die Mantelfläche eines drehsymmetrischen Glaskelchs entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion k mit $k(x) = (x - 2) \cdot e^x, D_k = [-4; 1]$, um die x-Achse. Der Graph von k sowie sein Spiegelbild sind nebenstehender Skizze zu entnehmen. Der Kelch wird anschließend bei $x = -4$ senkrecht verschlossen, aufgestellt und mit einem Ständer versehen. Bei allen Rechnungen soll die Wandstärke des Kelchs vernachlässigt werden. Runden Sie alle Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.



1.1 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Kelchs. **7 BE**

Die weitere Aufgabe 1.2 ist nicht mehr relevant.

Lösungsvorschlag A15 Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2015, AII 2 - adaptiert

1.1 Das Rotationsvolumen ergibt sich nach folgender Formel. Zur Lösungsfindung wird partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Abräumer“; durch mehrmaliges partielles Integrieren verschwindet im Integral das Polynom als Faktor)

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_{-4}^{1} (k(x))^2 dx \\
&= \pi \cdot \int_{-4}^{1} (x-2)^2 \cdot e^{2x} dx \\
&= \pi \cdot \left(\left[(x-2)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-4}^{1} - \int_{-4}^{1} 2(x-2) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx \right) \\
&= \pi \cdot \left(\left[(x-2)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-4}^{1} - \left(\left[(x-2) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-4}^{1} - \int_{-4}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx \right) \right) \\
&= \pi \cdot \left(\left[(x-2)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - (x-2) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \right]_{-4}^{1} \right) \\
&= \pi \cdot \Big((1-2)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2\cdot 1} - (1-2) \cdot \frac{1}{2} e^{2\cdot 1} + \frac{1}{4} e^{2\cdot 1} - \\
&\quad \left((-4-2)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2\cdot(-4)} - (-4-2) \cdot \frac{1}{2} e^{2\cdot(-4)} + \frac{1}{4} e^{2\cdot(-4)} \right) \Big) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2} - (-1) \frac{1}{2} e^{2} + \frac{1}{4} e^{2} - \left(36 \cdot \frac{1}{2} e^{-8} - (-6) \cdot \frac{1}{2} e^{-8} + \frac{1}{4} e^{-8} \right) \right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{5}{4} e^{2} - \frac{85}{4} e^{-8} \right) \\
&\approx \underline{\underline{29{,}0\ [VE]}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 22 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2016, AI 4

1 Gegeben ist die separierbare Differenzialgleichung
$(x^2-4)\cdot y' = 4y^2$ mit $x > 2$ und $y > 0$.
Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $y(3) = \dfrac{1}{\ln(5)}$. **6 BE**

Lösungsvorschlag A22 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2016, AI 4

1 Die gegebene DGL wird zunächst mithilfe der Trennung der Variablen umgeformt:

$$\begin{aligned}
& & (x^2-4)\cdot y' &= 4y^2 & \\
&\iff & (x^2-4)\cdot \frac{dy}{dx} &= 4y^2 & \quad | : (x^2-4)\\
&\iff & \frac{dy}{dx} &= \frac{4y^2}{x^2-4} & \quad | : y^2\\
&\iff & \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} &= \frac{4}{x^2-4} & \quad | \cdot dx\\
&\iff & \frac{1}{y^2}dy &= \frac{4}{x^2-4}dx & \\
&\iff & \int \frac{1}{y^2}dy &= \int \frac{4}{x^2-4}dx &
\end{aligned}$$

Dabei werden zunächst beide Seiten der Gleichung explizit betrachtet:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy = (-1)\cdot y^{-1} = -\frac{1}{y}$$

Die Integrationskonstante wird auf der rechten Seite der obigen Gleichung beachtet, kann hier also weggelassen werden. Für das Integral auf der rechten Seite der Gleichung werden zwei verschiedene Lösungsalternativen betrachtet:

1. Möglichkeit: Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{-4}{4-x^2}dx = -4\cdot \int \frac{1}{4-x^2}dx$$

Um das Integral zu lösen nimmt man eine Partialbruchzerlegung des Integranden vor:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1+0x}{(2+x)(2-x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} = \frac{A(2-x)+B(2+x)}{(2+x)(2-x)} = \frac{2A+2B+x(B-A)}{(2+x)(2-x)}$$

Vergleicht man nun den zweiten und den fünften Term miteinander, so fällt auf, dass die Nennerterm gleich sind. Entsprechend müssen also auch die Zählerterm übereinstimmen. Dazu wird ein Koeffizientenvergleich vorgenommen (Vergleich der Koeffizienten vor x und ohne x jeweils auf beiden Seiten).

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) & 1 &= 2A+2B & & \\
&(\mathrm{II}) & 0 &= B-A & \iff \quad & 0 = -A+B
\end{aligned}$$

Aus der unteren Zeile folgt $A = B$. Setzt man dies in Zeile (I) ein, folgt:

$$(\mathrm{I}) \qquad 1 = 2A+2B$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow & 1 &= 4A & &|:4\\
&\Longleftrightarrow & A &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Es ist also $A = B = \frac{1}{4}$. Damit gilt für den Integranden:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right)$$

Dies kann nun in obiges Integral eingesetzt werden, damit dieses schließlich gelöst werden kann:

$$
\begin{aligned}
-4 \cdot \int \frac{1}{4-x^2}dx &= -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \int \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right) dx = -\int \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right) dx\\
&= -\left(\ln|2+x| - \ln|2-x|\right) + C = -\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + C
\end{aligned}
$$

Die gesamte Umformung ist zulässig, da laut Angabe $x > 2$ gelten muss (deswegen ändert sich auch das Vorzeichen von $|2-x|$).

<u>*2. Möglichkeit:* Merkhilfe</u>
Um das Integral mit der Merkhilfe zu lösen wird es zunächst etwas umgeformt:

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{-4}{4-x^2}dx = -4\int \frac{1}{4-x^2}dx = -4\int \frac{1}{2^2-x^2}dx$$

Für Integrale dieses Typs gilt laut Merkhilfe:

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

Mit $a = 2$ gilt also:

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = -4\int \frac{1}{2^2-x^2}dx = -4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C = -\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$$

Da laut Angabe $x > 2$ ist der Nennerterm stets negativ. Löst man danach die Betragsstriche auf, ergibt sich die endgültige Lösung des Integrals:

$$-\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C = -\ln\left(-\frac{2+x}{2-x}\right) + C = -\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + C$$

Dieses Ergebnis kann nun in obige Gleichung eingesetzt werden (setze Konstante $-C = D$):

$$
\begin{aligned}
& & \int \frac{1}{y^2}dy &= \int \frac{4}{x^2-4}dx\\
&\Longleftrightarrow & -\frac{1}{y} &= -\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + C & &|\cdot(-1)\\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{y} &= \ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D & &|\cdot y\\
&\Longleftrightarrow & 1 &= y \cdot \left(\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D\right) & &|:\left(\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D\right)\\
&\Longleftrightarrow & y(x) &= \frac{1}{\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D}
\end{aligned}
$$

Damit hat man die allgemeine Lösung der DGL erhalten. Gegeben ist zusätzlich noch die Nebenbedingung $y(3) = \frac{1}{\ln(5)}$. Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
 & y(3) = \frac{1}{\ln(5)} \\
\iff \quad & \frac{1}{\ln\left(\frac{2+3}{3-2}\right) + D} = \frac{1}{\ln(5)} \\
\iff \quad & \frac{1}{\ln(5) + D} = \frac{1}{\ln(5)} \\
\iff \quad & D = 0
\end{aligned}$$

Die spezielle Lösung lautet also

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right)}}}$$

Aufgabe 2 - Original-Prüfung FOS12 MNT 2018 Stochastik-Teil SII

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einem internationalen Fußballwettbewerb überlegt der Veranstalter schon im Vorfeld, aus welchen Gruppen sich die Besucher in den Stadien zusammensetzen. Man rechnet mit 60 % fanatische Anhänger (F) der jeweiligen Mannschaften. Die restlichen Besucher sind neutral (N). Die Hälfte aller Personen in den Stadien wird wohl Alkohol trinken (A). Ohne Alkoholgenuss geht man bei 2 % der Besucher von einer gewissen Gewaltbereitschaft (G) aus. Durch Alkoholgenuss verfünffacht sich diese Wahrscheinlichkeit. Sowohl der Alkoholgenuss als auch die Gewaltbereitschaft sind unabhängig von der Gruppenzugehörigkeit zu den Gruppen (F) oder (N).
Zu welcher der verschiedenen Kategorien eine beliebig herausgegriffene Person im Stadion zählt, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. **5 BE**

1.2 Es werden folgende Ereignisse definiert:
E_1: „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt keinen Alkohol."
E_2: „Die Person ist fanatisch und friedlich oder neutral und gewaltbereit."
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und prüfen Sie sie auf stochastische Unabhängigkeit.

1.3 Geben Sie in Mengenschreibweise ein Ereignis E_3 an, das unvereinbar mit E_1 ist und dessen Wahrscheinlichkeit 42 % von $P(E_1)$ beträgt. **2 BE**

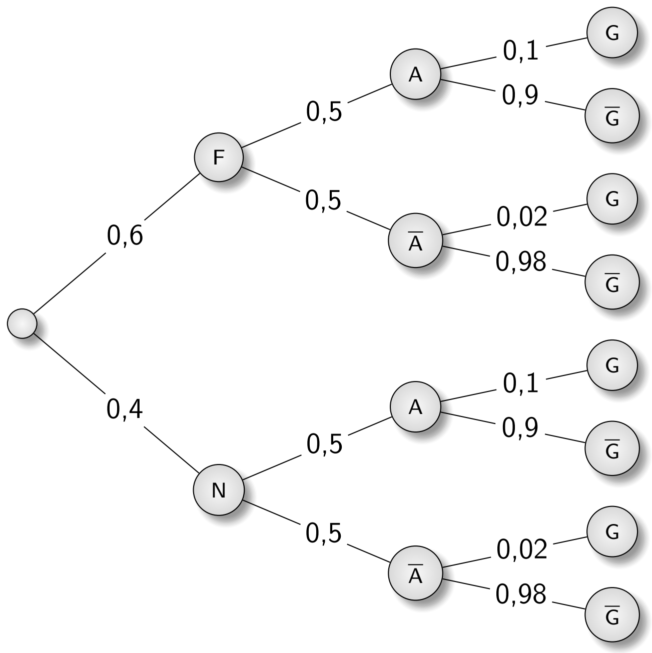
2 Während der gesamten Spiele sind 400 Fußballer im Einsatz. 80 % von ihnen werden erfahrungsgemäß in Zweikämpfen in regelwidrigen Körperkontakt mit dem Gegner kommen (K). 180 Spieler bekommen eine gelbe Karte als Verwarnung (V), zwei Drittel davon im Zusammenhang mit einem unerlaubten Körperkontakt.
Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{K \cup \overline{V}}$ und interpretieren Sie E_4 im Sinne der vorliegenden Thematik. **5 BE**

Übungsteil

Lösungsvorschlag A2: Original-Prüfung FOS12 MNT 2018 Stochastik-Teil SII

1.0 Ermittlung aller Elementarereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms. Für gegebene Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten angeben, sowie auf stoch. Unabhängigkeit prüfen. Prüfen auf Vereinbarkeit von Ereignissen.

1.1 **Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse**
Aus den Angaben sind die Wahrscheinlichkeiten $P(F) = 0{,}6$, $PN) = 0{,}4$, $P(A) = 0{,}5$ gegeben. Entsprechend gilt für die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Gegenereignisse: $P(\overline{D}) = 0{,}1$, $P(F) = 0{,}9$ und $P(E) = 0{,}8$. Durch Multiplikation der jeweiligen Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben sich sich die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse:
Anmerkung: Die Struktur/der Aufbau des Baumdiagramms ist bei 1.20 unter E_2 ersichtlich.



$P(\{FAG\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

$P(\{FA\overline{G}\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$

$P(\{F\overline{A}G\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}006$

$P(\{F\overline{AG}\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}98 = 0{,}294$

$P(\{NAG\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$

$P(\{NA\overline{G}\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$

$P(\{N\overline{A}G\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}004$

$P(\{N\overline{AG}\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}98 = 0{,}196$

1.2 **E_1 und E_2 in aufzählender Mengenschreibweise**

Für E_1:
Es werden alle Ereignisse aufgezählt, bei denen ein zufällig ausgwählter Besucher keinen Alkohol trinkt.

$$\underline{\underline{E_1 = \{F\overline{A}G; F\overline{AG}; N\overline{A}G; N\overline{AG}\}}}$$

$$\Rightarrow P(E_1) = 0{,}5$$

Für E_2:
Es werden alle Ereignisse aufgezählt, bei denen die Personen fanatisch und friedlich oder neutral und gewaltbereit ist.

$$\underline{\underline{E_2 = \{FA\overline{G}; F\overline{AG}; NAG; N\overline{A}G\}}}$$

$$\Rightarrow P(E_2) = 0{,}588$$

Prüfen ob E_1 und E_2 stoch. Unabhängig sind

Anmerkung: Stoch. Unabhängigkeit gilt dann, wenn $P(E_1) \cdot P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$, ansonsten abhängig.

Für die Ereignisse E_1 und E_2 gilt:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= 0{,}298 \\ P(E_1) \cdot P(E_2) &= 0{,}5 \cdot 0{,}588 = 0{,}294 \\ P(E_1 \cap E_2) &\neq P(E_1) \cdot P(E_2) \end{aligned}$$

Somit sind E_1 und E_2 stochastisch abhängig.

1.3 **Die Mengenschreibweise von E_3 angeben, welche unvereinbar mit E_1 ist und 42 % von $P(E_1) = 0{,}5$ ist**
Somit ist $\underline{\underline{E_3 = \{FAG; NA\overline{G}\}}} = 0{,}18 + 0{,}03 = 0{,}21$.
$\Rightarrow P(E_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}42 = \underline{\underline{0{,}21}}$

2 **Mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit bestimmen**
Von 400 Fußballern kommen 80 % in einen regelwidrigen Körperkontakt (K). Somit gibt es bei 20 % keinen regelwidrigen Körperkontakt ($\overline{K}$). Es bekommen 180 Spieler eine gelbe Karte (V) und damit 220 keine gelbe Karte ($\overline{V}$). Zwei Drittel der der Spieler, die eine gelebe Karte bekommen, haben die gelbe Karte wegen einem regelwidrigen Körperkontakt erhalten. Somit sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(K) = 0{,}8; \quad P(\overline{K}) = 0{,}2; \quad P(V) = 0{,}45; \quad P(\overline{V}) = 0{,}55; P(V \cap K) = 0{,}3$$

Damit ergibt sich die Vierfeldertafel wie folgt (gegebene Wahrscheinlichkeiten sind grau hinterlegt):

VFT mit rel. Häufigkeiten

	K	$\overline{K}$	$\sum$
V	0,3	0,15	0,45
$\overline{V}$	0,5	0,05	0,55
$\sum$	0,8	0,2	1

VFT mit abs. Häufigkeiten

	K	$\overline{K}$	$\sum$
V	120	60	180
$\overline{V}$	200	20	220
$\sum$	320	80	400

Alle Werte durch 400 teilen um auf die rel. Häufigkeiten zu kommen.

Über das De-Morgan-Gesetz und das Gesetz des doppelten Komplements gilt:

$$E_4 = \overline{K \cup \overline{V}} = \overline{K} \cap \overline{\overline{V}} = \overline{K} \cap V$$

Da in der Mengenlehre eine Vereinigung ($\cup$) in der Aussagenlogik einem Oder ($\vee$) entspricht, lautet die Beschreibung dieses Ereignisses in Worten: „Kein regelwidriger Körperkontakt, dennoch wird der Spieler mit einer gelben Karte verwarnt."

Wird in der Vierfeldertafel das entsprechende Ereignisse ($\overline{K} \cap V$) farblich markiert, so erkennt man leicht, welche Wahrscheinlichkeit sich ergibt (siehe Vierfeldertafel rechts $P(E_4) = 0{,}15$):

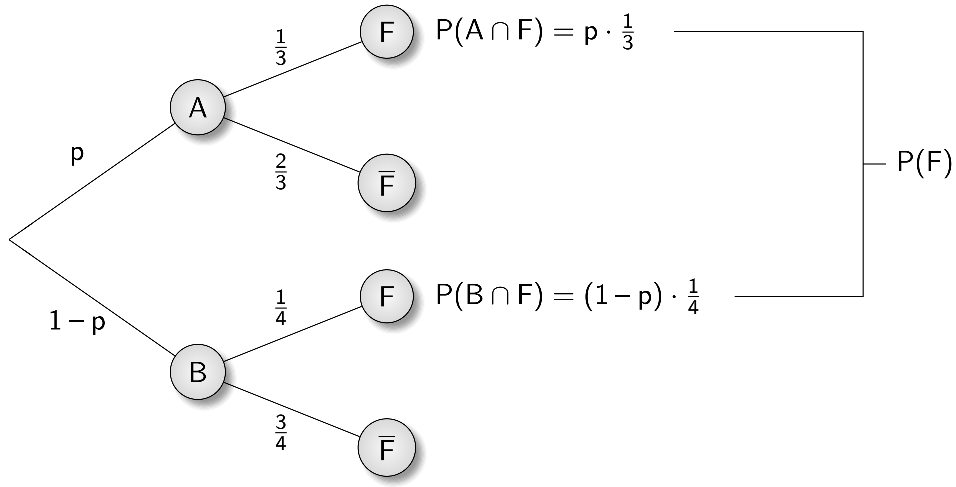
	K	$\overline{K}$	$\sum$
V	0,3	0,15	0,45
$\overline{V}$	0,5	0,05	0,55
$\sum$	0,8	0,2	1

Aufgabe 9 - Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2015, BII 2

1 In einer Jahrgangsstufe sind 51 Schüler und diese werden in den Klassen A und B unterrichtet. Die Schüler der beiden Klassen haben die Möglichkeit an einem gemeinsamen Fremdsprachenkurs teilzunehmen. $\frac{1}{3}$ der Schüler in Klasse A und $\frac{1}{4}$ der Schüler in Klasse B belegen den Fremdsprachenkurs. 60 % der Schüler des Fremdsprachenkurses kommen aus Klasse A. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewählter Schüler in der Klasse B ist und keinen Fremdsprachenkurs besucht. **8 BE**

Lösungsvorschlag A9: Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2015, BII 2

1 Aus den gegebenen Werten lässt sich folgendes Baumdiagramm erstellen:



Weiterhin gilt laut Angabe $P_F(A) = 0{,}60$. Aus der Berechnungsvorschrift von $P_F(A)$ kann p ermittelt werden. Die Werte werden dabei dem Baumdiagramm entnommen.

$$
\begin{aligned}
&& 0{,}6 &= P_F(A) \\
\iff && 0{,}6 &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} \\
\iff && 0{,}6 &= \frac{p \cdot \frac{1}{3}}{p \cdot \frac{1}{3} + (1-p) \cdot \frac{1}{4}} \\
\iff && 0{,}6 &= \frac{4p}{3+p} && \mid \cdot (3+p) \\
\iff && 0{,}6(3+p) &= 4p \\
\iff && 1{,}8 + 0{,}6p &= 4p && \mid -0{,}6p \\
\iff && 1{,}8 &= 3{,}4p && \mid : 3{,}4 \\
\iff && p &= \frac{9}{17}
\end{aligned}
$$

Damit kann schließlich gemäß der Pfadregeln die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmt werden:

$$P(B \cap \overline{F}) = \left(1 - \frac{9}{17}\right) \cdot \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{6}{17}}}$$

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
Muster	oHm AI	$F(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$	**179**	Stammfunktion; Rotationsvolumen
		$h(x) = \frac{x^2+3}{-x^2-2}$ und $k(x) = \arctan(h(x))$	**179**	Symmetrie; Monotonie; Umkehrfunktion
	oHm AII	$h(x) = x \cdot e^{x+1}$ und $g(x) = (x-1) \cdot e^{x+1}$	**183**	Stammfunktion; Monotonie; Extrema; Wendepunkt; Integral
	mHm AI	$f(x) = \frac{2x^2-5x+5}{1-x}$	**193**	Definitionsmenge; NST; Grenzwert; Asymptoten; Monotonie; Extrema; Wendepunkte; Integral
		$h(x) = 10 \cdot e^{-0,2x}$ und $p(x) = 0{,}1 \cdot (x-a)^2 + b$ und $\ell(x) = cx + d$	**193**	Funktionsterm bestimmen; Rotationsvolumen
		$I(t) \cdot R = U - L \cdot \dot{I}(t)$	**194**	spezielle Lösung
	mHm AII	$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$	**201**	Definitionsmenge; NST; Grenzwert; Asymptoten; Monotonie; Extrema; Wertemenge; Umkehrfunktion; Funktionsterm bestimmen
		$\dot{h}(t) = 2 \cdot h(t) - 4 \cdot h^2(t)$	**201**	allgemeine Lösung; Grenzwert
2020	oHm A	$g: x \mapsto \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	**??**	NST; Monotonie
		$f: x \mapsto \frac{5}{4e^x+1}$	**220**	Umkehrfunktion; Definitionsmenge
	mHm AI	$s: x \mapsto 8 - 2\sqrt{x^2-9}$	**227**	Rotationsvolumen
		$f: x \mapsto -\frac{4x+2}{x^2+1}$	**227**	NST; Asymptote; Extrema; Fläche; Umkehrfunktion
		$g: x \mapsto \ln(f(x))$	**228**	Definitionsmenge; NST; Wertemenge
		$\dot{z} + 0{,}03 \cdot e^{0,5 \cdot t} \cdot z = 0{,}5 \cdot z$	**228**	spezielle Lösung
	mHm AII	$f: x \mapsto x + \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$	**235**	Grenzwert; Monotonie; Extrema; Asymptote; NST
		$r: x \mapsto \sqrt{x^2 \ln(x)}$	**235**	Rotationsvolumen
		$\dot{v} = 0{,}484 - 0{,}0040 \cdot v^2$	**236**	spezielle Lösung; Integral; Umkehrfunktion
Lösungen 2017-2020:		StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau) und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		

1.0 Gegeben ist die Funktion $F(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ mit $D_{F;max} =]0; \infty[$.

1.1 Zeigen Sie, dass F(x) eine Stammfunktion von $f(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{-x}$ ist. **2 BE**

1.2 Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Volumens der Körpers der entsteht, wenn der Graph von F(x) im Intervall [1; 2] um die x-Achse rotiert. **5 BE**

2 Betrachtet wird nun die gebrochenrationale Funktion $g(x) = \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16}$ mit $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass für die Funktion g(x) und deren erste Ableitung g′(x) der Zusammenhang $\frac{g(x)}{g'(x)} = -x - 4$ gilt. **5 BE**

3.0 Weiterhin sind die Funktionen $h(x) = \frac{x^2 + 3}{-x^2 - 2}$ und $k(x) = \arctan(h(x))$ mit $D_{h;max} = D_{k;max} = \mathbb{R}$ gegeben.

3.1 Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen h(x) und k(x) auf Symmetrie zum Koordinatensystem. **2 BE**

3.2.0 Die erste Ableitung der Funktion h(x) ist gegeben zu $h'(x) = \frac{2x}{(-x^2 - 2)^2}$ (Nachweis nicht erforderlich).

3.2.1 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von h(x). **4 BE**

3.2.2 Schließen Sie aus dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe auf das Monotonieverhalten des Graphen von k(x). **2 BE**

3.3 Begründen Sie, dass die Funktion $u(x) = h(x)$ mit $D_u = [1; \infty[$ umkehrbar ist und weisen Sie nach, dass ihr Graph durch den Punkt $\left(-\frac{4}{3} \middle| 1\right)$ verläuft. **2 BE**

Muster

1.1 Um nachzuweisen, dass es sich um eine Stammfunktion handelt, muss $F'(x) = f(x)$ gezeigt werden. Die erste Ableitung wird mithilfe von Produkt- und Kettenregel berechnet.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sqrt{x} \cdot e^{-x} \\
F'(x) &= \left[(\sqrt{x})' \cdot e^{-x} + \sqrt{x} \cdot (e^{-x})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} + \sqrt{x} \cdot e^{-x} \cdot (-1) && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} - \sqrt{x} \cdot e^{-x} && \text{(e^{-x} Ausklammern)} \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{-x} \\
&= f(x) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

1.2 Für das Volumen muss der Term $\pi\int_1^2 (F(x))^2 dx$ berechnet werden. Zunächst wird das Integral ohne Integrationsgrenzen berechnet. Dafür wird partiell integriert.

$$\begin{aligned}
\int (F(x))^2 dx &= \int (\sqrt{x} \cdot e^{-x})^2 dx = \int (x \cdot e^{-2x}) dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}x - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}
\end{aligned}$$

Für das Rotationsvolumen gilt damit:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^2 (F(x))^2 dx = \pi\left[\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right]_1^2 = \pi\left(\left(-\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{4}\right)e^{-2\cdot 2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\right)e^{-2\cdot 1}\right) \\
&= \pi\left(\left(-1 - \frac{1}{4}\right)e^{-4} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2}\right) = \underline{\underline{\pi\left(-\frac{5}{4}e^{-4} + \frac{3}{4}e^{-2}\right)}}\ [\text{VE}]
\end{aligned}$$

2 Um den gegebenen Zusammenhang zu zeigen, wird zunächst mithilfe der Quotientenregel die erste Ableitung der Funktion $g(x)$ berechnet.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16} \\
g'(x) &= \left[\frac{(\frac{1}{2}x + 2)' \cdot (x^2 + 8x + 16) - (\frac{1}{2}x + 2) \cdot (x^2 + 8x + 16)'}{(x^2 + 8x + 16)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 8x + 16) - (\frac{1}{2}x + 2) \cdot (2x + 8)}{(x^2 + 8x + 16)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{(x^2 + 8x + 16)} - \cancel{(x^2 + 8x + 16)}}{(x^2 + 8x + 16)^{\cancel{2}1}} && \text{(Kürzen)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + 8x + 16} \quad \text{mit } D_{g'} = D_g
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{g'(x)} &= \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16} : \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + 8x + 16} = \frac{\frac{1}{2}x + 2}{\cancel{x^2 + 8x + 16}} \cdot \frac{\cancel{x^2 + 8x + 16}}{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot (-2) \\
&= -x - 4 \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Muster

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$ mit $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie Definitionsmenge und die Nullstelle der Funktion an. Untersuchen Sie weiterhin das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie daraufhin die Gleichung aller Asymptoten an. **5 BE**

1.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f und bestimmen Sie Art und exakte Koordinaten aller Extrempunkte.
$\left[\text{Mögliches Zwischenergebnis: } f'(x) = \frac{x^2-8x}{x^4+(x-4)^2}\right]$ **9 BE**

1.3 Schließen Sie anhand der Ergebnisse der letzten Teilaufgaben auf die Wertemenge der Funktion $f(x)$. **2 BE**

1.4 Stellen Sie den Graphen G_f gemeinsam mit den Asymptoten im Intervall $-2 \leq x \leq 10$ graphisch dar. Maßstab x-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{LE}$; Maßstab y-Achse: $4\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{LE}$ **4 BE**

1.5 Betrachtet wird zusätzlich die Funktion $g(x) = f(x)$ mit $D_g = [1;\,3]$. Begründen Sie, dass die Funktion $g(x)$ umkehrbar ist. Weisen Sie zudem nach, dass der Graph der Umkehrfunktion durch den Punkt $(-\arctan(2)\,|\,2)$ verläuft und bestimmen Sie dessen Steigung in diesem Punkt. **5 BE**

1.6.0 Der Graph der Funktion $f(x)$ kann durch die Parabel mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ angenähert werden. Diese soll dabei ihren absoluten Hochpunkt bei $(0\,|\,0)$ haben und an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ mit dem Funktionswert von $f(x)$ an dieser Stelle übereinstimmen.

Bestimmen Sie zunächst die Werte der Parameter a,b und c. Bestimmen Sie dann die Maßzahl des Volumens des Körpers, der entsteht, wenn die Parabel im Intervall $[0;\,1]$ um die x-Achse rotiert. Geben Sie Zwischen- und Endergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

1.6.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c. Runden Sie bei Bedarf auf drei Nachkommastellen.
[Zwischenergebnis: $p(x) = 0{,}285x^2$] **3 BE**

1.6.2 Bestimmen Sie die Maßzahl des Volumens des Körpers, der entsteht, wenn die Parabel im Intervall $[0;\,1]$ um die x-Achse rotiert. Geben Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen gerundet an. **3 BE**

2.0 Untersucht wird der Holzbestand eines Waldes. Die Funktion $h(t)$ soll den zeitlichen Verlauf des Holzbestandes in Tausend Raummetern angeben, dabei ist der Raummeter eine typische Einheit im Umgang mit Holz. Durch die natürlich auftretende Vervielfältigung der Bäume ist die Zunahme des Holzbestandes normalerweise proportional zum aktuellen Holzbestand.

Da der zu betrachtende Wald allerdings von Schädlingen befallen ist, muss zusätzlich ein Korrekturterm berücksichtigt werden, welcher im Modell als quadratische Abnahme berücksichtigt wird. Insgesamt ist der zeitliche Verlauf des Holzbestandes damit gegeben durch die Differentialgleichung $\dot{h}(t) = 2 \cdot h(t) - 4 \cdot h^2(t)$ mit $t \geq 0$.

2.1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung mithilfe der Methode der Trennung der Variablen.
$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } h(t) = \frac{e^{2t} \cdot D}{1 + 2e^{2t} \cdot D}\right]$ **8 BE**

Muster

1.0 Betrachtet wird die Funktion $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2}{x-4}\right)$.

1.1 **Definitionsmenge**

Da die Arcustangens-Funktion an sich keine Einschränkungen des Definitionsbereichs aufweißt, können Einschränkungen nur durch das Argument auftreten. Da niemals durch null geteilt werden darf, darf auch der Nennerterm des Arguments niemals null werden:

$$x-4 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 4$$

Die Definitionsmenge ergibt sich also zu $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

Nullstelle

Wegen $\arctan(0) = 0$ stimmt die Nullstelle des Arguments mit dem der Funktion $f(x)$ überein. Das Argument wird null, wenn der Zählerterm null wird. Dafür gilt:

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = 0$$

Die Nullstelle der Funktion $f(x)$ liegt also bei $\underline{\underline{x = 0}}$.

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge

$$x \to -\infty\colon f(x) = \arctan \underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to\infty}}{\underbrace{x-4}_{\to-\infty}}\right)}_{\to-\infty,\text{ da ZG>NG}} \to -\frac{\pi}{2}$$

$$x \to \infty\colon f(x) = \arctan \underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to\infty}}{\underbrace{x-4}_{\to\infty}}\right)}_{\to\infty,\text{ da ZG>NG}} \to \frac{\pi}{2}$$

$$x \to 4^-\colon f(x) = \arctan \underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to 16}}{\underbrace{x-4}_{\to 0^-}}\right)}_{\to-\infty} \to -\frac{\pi}{2}$$

$$x \to 4^+\colon f(x) = \arctan \underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to 16}}{\underbrace{x-4}_{\to 0^+}}\right)}_{\to\infty} \to \frac{\pi}{2}$$

Gleichung aller Asymptoten

Aus dem Verhalten der Funktionswerte für $x \to 4^{\pm}$ folgt, dass es sich nicht um eine Polstelle handelt und so keine senkrechte Asymptote vorliegt. Aus dem Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ ergeben sich zwei waagrechte Asymptoten mit den Gleichungen $\underline{\underline{y = -\frac{\pi}{2}}}$ und $\underline{\underline{y = \frac{\pi}{2}}}$.

Muster

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Nach Ihrem Studium arbeiten Sie in einer Süßwarenfabrik, in der Sie unter anderem für die Qualitätssicherung zuständig sind. In der Fabrik werden auch Schokoladentafeln à 100 g hergestellt.

1 In der Qualitätskontrolle wird eine Tafel auf ihr Sollgewicht hin überprüft. Die Zufallsgröße X gibt das gemessene Gewicht in Gramm an. In folgender Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt. Durchschnittlich wiegt eine Tafel 99,94 g.

x	98,5	99	100	101	101,5
$P(X = x)$	0,05	0,10	0,75	0,07	0,03

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Gewicht einer zufällig herausgegriffenen Tafel Schokolade innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. **5 BE**

2 Ein Defekt in der Abfüllanlage der Schokoladenmasse erhöht die Gewichtsschwankungen bei den Tafeln. Die Zufallsgröße Y gibt an, um wie viel Gramm das Gewicht einer Tafel von ihrem Sollgewicht abweicht. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist in folgender Tabelle dargestellt:

y	4 g zu leicht	2 g zu leicht	0 g	2 g zu schwer	4 g zu schwer
$P(Y = y)$	0,30	0,20	0,35	0,10	0,05

Bis zur Reparatur der Anlage soll die Maschine so eingestellt werden, dass das Durchschnittsgewicht einer Tafel 100 g beträgt.
Berechnen Sie den Wert für die einzustellende Gewichtsvorgabe der Abfüllanlage. **2 BE**

3.0 Die Schokoladentafeln gibt es in herkömmlicher Qualität sowie in Bioqualität. Der Hersteller bietet Nussschokoladen (N) und nussfreie Tafeln an. Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass von den Käufern der Nussschokolade 32 % Bioqualität wählen und sich 22 % der Käufer der nussfreien Sorte für das Bioprodukt entscheiden.
Im Verkauf beträgt der Bioanteil (B) insgesamt 25 %.

3.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil der Nussschokoladen im Verkauf. **5 BE**

3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 24 verkauften Schokoladentafeln genau 25 % Bioqualität haben. **2 BE**

1 **Wahrscheinlichkeit, dass das Gewicht einer zufälligen Tafel innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen**

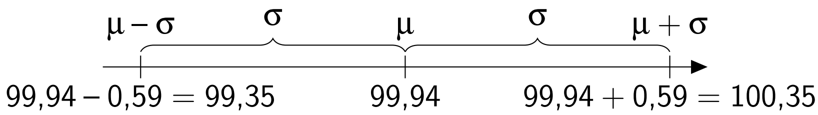
Der Erwartungswert ist mit $\mu(X) = 99{,}94$ bereits gegeben. Weiterhin wird die Varianz und daraus die Standardabweichung berechnet:

$$\begin{aligned} V(X) &= 0{,}05 \cdot (98{,}5 - 99{,}94)^2 + 0{,}1 \cdot (99 - 99{,}94)^2 + 0{,}75 \cdot (100 - 99{,}94)^2 \\ &\quad + 0{,}07 \cdot (101 - 99{,}94)^2 + 0{,}03 \cdot (101{,}5 - 99{,}94)^2 = 0{,}3464 \\ \sigma(X) &= \sqrt{0{,}3464} \approx \underline{0{,}59} \end{aligned}$$

Es wird nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass die Werte höchstens die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(99{,}35 < X < 100{,}53) = P(X = 100) = \underline{\underline{0{,}75}}$$

Zur Veranschaulichung



2 **Einzustellende Gewichtsvorgabe für ein Durchschnittsgewicht von 100 g**

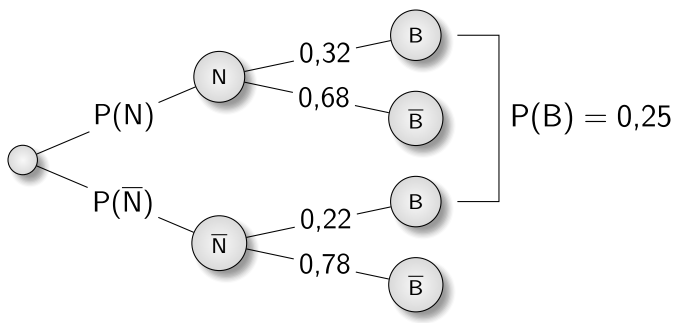
Aus der gegebenen Verteilung wird der Erwartungswert der aktuellen Abweichungen berechnet (negative Werte stehen dabei für „zu leicht" und positive Werte für „zu schwer"):

$$E(Y) = (-4) \cdot 0{,}3 + (-2) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}05 = -1{,}2$$

Im Mittel sind die Tafeln 1,2 g zu leicht. Damit das Durchschnittsgewicht bei 100 g liegt, muss die Maschine also auf $\underline{\underline{101{,}2\,\text{g}}}$ eingestellt werden.

3.1 **Erstellen eines Baumdiagramms zur Bestimmung des prozentualen Anteils der Nussschokoladen**

Laut Angabe entscheiden sich 32 % der Käufer von Nussschokolade für Bioqualität ($P_N(B) = 0{,}32$, damit $P_N(\overline{B}) = 0{,}68$). Von den Käufern der nussfreien Sorte entscheiden sich 22 % für Bioqualität ($P_{\overline{N}}(B) = 0{,}22$, damit $P_{\overline{N}}(\overline{B}) = 0{,}78$). Damit kann folgendes Baumdiagramm mit der noch unbekannten Wahrscheinlichkeit $x = P(N)$ (und damit $P(\overline{N}) = 1 - x = 1 - P(N)$) für die Entscheidung für eine Nussschokolade erstellt werden:



Die Wahrscheinlichkeit $P(N)$ gilt es nun zu bestimmen. Aus den Angaben ist weiterhin gegeben, dass der gesamte Anteil der Bioschokolade bei 25 % = 0,25 liegt. Da dies im Baumdiagramm dem ersten und dem dritten Ast von oben entspricht, gilt entsprechend der Pfadregeln:

$$P(N) \cdot 0{,}32 + P(\overline{N}) \cdot 0{,}22 = 0{,}25$$

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

K

M

N

R

Das könnte Sie auch interessieren:

11. - 13. KLASSE

Optimal zur Vorbereitung auf Schulaufgaben, Kurzarbeiten und die Abschlussprüfung.

PRÜFUNGSVORBEREITUNG BERUFLICHE OBERSCHULE

- **ABSCHLUSSPRÜFUNGEN**
  - MATHEMATIK NICHTTECHNIK
  - MATHEMATIK TECHNIK
  - BWR / IBV

ZEIT FÜR LERNEN!

TIPP! ABITUR-VORBEREITUNG IN MATHE ODER BWR/IBV OSTERN 2021
IN 5 TAGEN FIT FÜR DAS ABITUR 2021 - Mehr unter https://lern.de

Alle unsere Titel sind im Buchhandel oder direkt auf https://www.lern-verlag.de zu bestellen!

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

Original-Abschlussprüfungen
Mathematik Technik
FOS·BOS 13 Bayern 2021

- ✓ An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- ✓ Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- ✓ Miniskript mit Beispielen sowie ausführlichen Lösungen
- ✓ Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- ✓ Mit Ferien- und Prüfungsplaner 2020/2021 im Innenteil

Abi-Trainer für FOS · BOS 13 MT 2021

- Ideal für das SELBSTLERNEN ZU HAUSE geeignet -

Bestell-Nr.: EAN 9783743000636

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0063-6

€ 10,90

9 783743 000636 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de