10.
Klasse

Realschule MSA Bayern 2021

Mathematik I

- Ideal für Homeschooling geeignet -

MSA 2021

INKLUSIVE:

- ✓ Original-Prüfungen 2013 - 2020
- ✓ Miniskript „So funktioniert's"
- ✓ Ausführlichen Lösungen zu den einzelnen Prüfungen
- ✓ kostenloser Downloadbereich per QR-Code

SCAN ME

RS 10

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

lernverlag®
www.lern-verlag.de

2020 2021 Schuljahresplaner

September	Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli
1 Di	1 Do	1 So Allerheiligen	1 Di	1 Fr Neujahr	1 Mo 5	1 Mo 9	1 Do	1 Sa Tag der Arbeit	1 Di	1 Do Sozialwesen
2 Mi	2 Fr	2 Mo 45	2 Mi	2 Sa	2 Di	2 Di	2 Fr Karfreitag	2 So	2 Mi	2 Fr Werken
3 Do	3 Sa Tag der Dt. Einheit	3 Di	3 Do	3 So	3 Mi	3 Mi	3 Sa	3 Mo 18	3 Do Fronleichnam	3 Sa
4 Fr	4 So	4 Mi	4 Fr	4 Mo 1	4 Do	4 Do	4 So Ostern	4 Di	4 Fr	4 So
5 Sa	5 Mo 41	5 Do	5 Sa	5 Di	5 Fr	5 Fr	5 Mo Ostermontag 14	5 Mi	5 Sa	5 Mo 27
6 So	6 Di	6 Fr	6 So	6 Mi Heilige Drei Könige	6 Sa	6 Sa	6 Di	6 Do	6 So	6 Di
7 Mo 37	7 Mi	7 Sa	7 Mo 50	7 Do	7 So	7 So	7 Mi	7 Fr	7 Mo 23	7 Mi
8 Di	8 Do	8 So	8 Di	8 Fr	8 Mo 6	8 Mo 10	8 Do	8 Sa	8 Di	8 Do
9 Mi	9 Fr	9 Mo 46	9 Mi	9 Sa	9 Di	9 Di	9 Fr	9 So Muttertag	9 Mi	9 Fr
10 Do	10 Sa	10 Di	10 Do	10 So	10 Mi	10 Mi	10 Sa	10 Mo 19	10 Do	10 Sa
11 Fr	11 So	11 Mi	11 Fr	11 Mo 2	11 Do	11 Do	11 So	11 Di	11 Fr	11 So
12 Sa	12 Mo 42	12 Do	12 Sa	12 Di	12 Fr	12 Fr	12 Mo 15	12 Mi	12 Sa	12 Mo 28
13 So	13 Di	13 Fr	13 So	13 Mi	13 Sa	13 Sa	13 Di	13 Do Christi Himmelfahrt	13 So	13 Di
14 Mo 38	14 Mi	14 Sa	14 Mo 51	14 Do	14 So	14 So	14 Mi	14 Fr	14 Mo 24	14 Mi
15 Di	15 Do	15 So	15 Di	15 Fr	15 Mo Rosenmontag 7	15 Mo 11	15 Do	15 Sa	15 Di	15 Do
16 Mi	16 Fr	16 Mo 47	16 Mi	16 Sa	16 Di	16 Di	16 Fr	16 So	16 Mi	16 Fr
17 Do	17 Sa	17 Di	17 Do	17 So	17 Mi	17 Mi	17 Sa	17 Mo 20	17 Do	17 Sa
18 Fr	18 So	18 Mi	18 Fr	18 Mo 3	18 Do	18 Do	18 So	18 Di	18 Fr	18 So
19 Sa	19 Mo 43	19 Do	19 Sa	19 Di	19 Fr	19 Fr	19 Mo 16	19 Mi	19 Sa	19 Mo 29
20 So	20 Di	20 Fr	20 So	20 Mi	20 Sa	20 Sa	20 Di	20 Do	20 So	20 Di
21 Mo 39	21 Mi	21 Sa	21 Mo 52	21 Do	21 So	21 So	21 Mi	21 Fr	21 Mo 25	21 Mi
22 Di	22 Do	22 So	22 Di	22 Fr	22 Mo 8	22 Mo 12	22 Do	22 Sa	22 Di Fremdsprachen	22 Do
23 Mi	23 Fr	23 Mo 48	23 Mi	23 Sa	23 Di	23 Di	23 Fr	23 So Pfingsten	23 Mi Deutsch	23 Fr
24 Do	24 Sa	24 Di	24 Do Heiligabend	24 So	24 Mi	24 Mi	24 Sa	24 Mo Pfingstmontag 21	24 Do Französisch	24 Sa
25 Fr	25 So Ende der Sommerzeit	25 Mi	25 Fr 1. Weihnachtstag	25 Mo 4	25 Do	25 Do	25 So	25 Di	25 Fr Englisch	25 So
26 Sa	26 Mo 44	26 Do	26 Sa 2. Weihnachtstag	26 Di	26 Fr	26 Fr	26 Mo 17	26 Mi	26 Sa	26 Mo 30
27 So	27 Di	27 Fr	27 So	27 Mi	27 Sa	27 Sa	27 Di	27 Do	27 So	27 Di
28 Mo 40	28 Mi	28 Sa	28 Mo 53	28 Do	28 So	28 So Beginn der Sommerzeit	28 Mi	28 Fr	28 Mo Mathe 26	28 Mi
29 Di	29 Do	29 So 1. Advent	29 Di	29 Fr		29 Mo 13	29 Do	29 Sa	29 Di BwR	29 Do
30 Mi	30 Fr	30 Mo 49	30 Mi	30 Sa		30 Di	30 Fr	30 So	30 Mi Physik	30 Fr
	31 Sa Reformationstag		31 Do Silvester	31 So		31 Mi		31 Mo 22		31 Sa

Sonn- und Feiertage Ferien Abschlussprüfungen

cleverlag®

Original-Prüfungen Mathematik WPFG I Realschule Bayern 2021

erstellt

für Schülerinnen und Schüler der Realschule Bayern mit der Wahlpflichtfächergruppe I

www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem speziellen Prüfungsvorbereitungsbuch **Original-Prüfungen Mathematik I Realschule Bayern 2021** sind die letzten acht zentral gestellten Originalprüfungen der Jahre 2013 bis 2020 enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch Original-Pprüfungen Mathematik I Realschule Bayern 2021 ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.
Sie finden im ersten Teil eine kompakte Übersicht als Naschschlagewerk aller prüfungsrelaventer Themengebiete. Im Anschluss daran finden Sie die Prüfungsaufgaben und ausführliche Lösungen.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2021 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am Montag **28.06.2021** statt und dauert **150 Minuten**.
(Stand 01.09.2020 - Angaben ohne Gewähr)
Als **Hilfsmittel** ist ein elektronischer Taschenrechner und eine Formelsammlung zugelassen.
Alle Zeichnungen haben einen Hinweis erhalten, da die Zeichnungen durch die Skalierung des Buches nicht maßstabsgetreu sind.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig an sich auf die Abschlussprüfung vorzubereiten und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernzielkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie die Notenschlüssel der letzten acht Prüfungsjahrgänge.

Jahrgang 2013 – 2020

Note 1:	53 – 45	Punkte
Note 2:	44 – 36	Punkte
Note 3:	35 – 27	Punkte
Note 4:	26 – 18	Punkte
Note 5:	17 – 9	Punkte
Note 6:	8 – 0	Punkte

Impressum
lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, lern.de und cleverlag sind eingetragene Marken von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
Sascha Jankovic, Simon Rümmler und das Team aus Pädagogen und Naturwissenschaftlern der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Originalprüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

6. ergänzte Auflage ©2020 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0068-1
Artikelnummer:
EAN 9783743000681

Inhaltsverzeichnis

1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Dabei existiert eine Symmetrieachse, die durch den Scheitelpunkt der Parabel geht.

Die allgemeine Form: $y = ax^2 + bx + c \qquad b, c \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

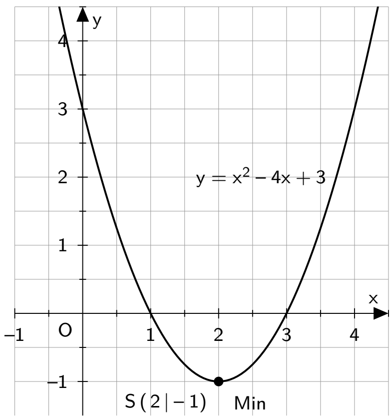
Die Normalparabel $(a = 1)$: $y = x^2 + bx + c$ bzw. $y = x^2 + px + q$.

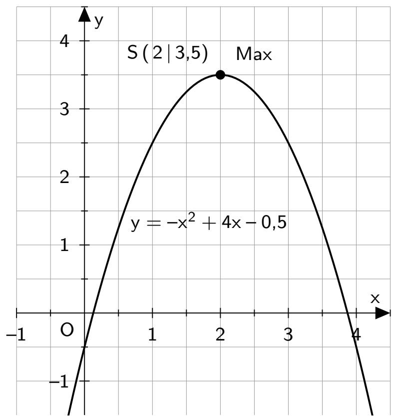
Scheitelpunkt: $S\left(x_S \,|\, y_S\right)$ $\qquad S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ bzw. $S\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, q - \frac{p^2}{4}\right)$

Scheitelpunktform: $y = a(x - x_S)^2 + y_S \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Die Parameter a, b und c haben folgende Bedeutung:

Parameter	Bedingung	Bedeutung
a	$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	Falls $a > 0$: nach oben geöffnete Parabel, mit Minimum Falls $a < 0$: nach unten geöffnete Parabel, mit Maximum Falls $\lvert a\rvert > 1$: gestreckte Parabel (schmaler als Normalparabel) Falls $\lvert a\rvert < 1$: gestauchte Parabel (breiter als Normalparabel)
b	$b \in \mathbb{R}$	Steigung, mit der die Parabel die y-Achse schneidet
c	$c \in \mathbb{R}$	Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse „y-Achsenabschnitt“





Lösen von quadratischen Gleichungen - Nullstellen berechnen

Lösungsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ bzw. $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante D: $D = b^2 - 4ac$ bzw. $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Es gilt:
$D > 0$: Zwei Lösungen
$D = 0$: Eine Lösung
$D < 0$: Keine Lösung

Beim Lösen einer quadratischen Gleichung haben sich folgende Schritte bewährt:

1. **Schritt:** a, b und c neben der gegeben Funktion untereinander schreiben.
2. **Schritt:** Berechnen der Diskriminante.
3. **Schritt:** Einfügen aller Zahlen in die Lösungsformel.

Quadratische Funktionen bestimmen

Die Parameter k, a, b und c haben folgende Bedeutung:

Parameter	Bedingung	Bedeutung
k	$k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	Streckfaktor: Stauchung oder Streckung in y-Richtung Falls k negativ: Spiegelung an x-Achse
a	$a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	Falls $a > 1$: monoton Steigend Falls $a < 1$: monoton fallend
b	$b \in \mathbb{R}$	Verschiebung in x-Richtung Für $b > 0$: Verschiebung nach rechts Für $b < 0$: Verschiebung nach links
c	$c \in \mathbb{R}$	Verschiebung in y-Richtung

1.4 Abbildungen

Abbildungen lassen sich in zwei Kategorien einordnen: Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen. Jede Kongruenzabbildung ist auch eine Ähnlichkeitsabbildung. Anders ausgedrückt: Eine Kongruenzabbdildung ist eine spezielle Ähnlichkeitsabbildung. Deshalb gelten alle Eigenschaften einer Ähnlichkeitsabbildung auch für eine Kongruenzabbildung. Beide Abbildungsarten sind

- geradentreu
- parallelentreu
- mittelpunktstreu
- kreistreu
- winkelmaßtreu
- streckenverhältnistreu

Zusätzliche Eigenschaften der Kongruenzabbildung

- streckenlängentreu
- flächeninhaltstreu
- „umlaufsinntreu“ (außer Achsenspiegelung)

Eigenschaft	Bedeutung
Geradentreue	Jede Gerade wird wieder auf eine Gerade abgebildet
Paralellentreue	Parallelität bleibt erhalten
Mittelpunkstreue	Mittelpunkte bleiben Mittelpunkte
Kreistreue	Jeder Kreis wird wieder auf einen Kreis abgebildet
Winkelmaßtreue	Winkelmaße werden nicht verändert
Streckenlängentreue	Streckenlängen bleiben erhalten
Flächeninhaltstreue	Flächeninhalte werden nicht verändert
„Umlaufsinntreue“	Der Umlaufsinn bleibt gleich
Streckenverhältnistreue	Das Längenverhältnis zweier Strecken bleibt unverändert

Übersicht über die Zugehörigkeit der einzelnen Abbildungen:

Ähnlichkeitsabbildung	**Kongruenzabbildung**
• Zentrische Streckung • Kongruenzabbildung • jede Verknüpfung davon	• Punktspiegelung • Achsenspiegelung • Drehung • Parallelverschiebung • jede Verknüpfung davon

Alle Abbildungsgleichungen können immer in der Matrixform angegeben und berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Matrixform

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + v_x \\ y' &= cx + dy + v_y \end{aligned}$$

dazu äquivalente Koordinatenform

Der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ stellt die Koordinaten der anfänglichen Situation dar. Der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ beinhaltet die Koordinaten nach der Abbildung. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ beinhaltet die abbildungspezifischen Koeffizienten; der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} v_x \\ v_y \end{smallmatrix}\right)$ gehört ebenfalls zur jeweiligen Abbildung.

Übersicht der Abbildungen mit zugehörigen Abbildungsgleichungen:

Zentrische Streckung

Zentrum $Z\,(x_Z \,|\, y_Z)$, Streckungsfaktor $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus (1-k) \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

Matrixform

$$\begin{aligned} x' &= kx + (1-k)x_Z \\ y' &= ky + (1-k)y_Z \end{aligned}$$

Koordinatenform

Drehung

Drehzentrum $Z\,(x_Z \,|\, y_Z)$, Drehwinkelmaß α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x - x_z \\ y - y_z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

Matrixform

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha \cdot (x - x_z) - \sin\alpha \cdot (y - y_z) + x_Z \\ y' &= \sin\alpha \cdot (x - x_z) + \cos\alpha \cdot (y - y_z) + y_Z \end{aligned}$$

Koordinatenform

Punktspiegelung

Eine Punktspiegelung ist eine Drehung mit dem Drehwinkelmaß $\alpha = 180°$.

Achsenspiegelung

Spiegelachse $a: y = mx$ (Ursprungsgerade) wobei $m = \tan\alpha$ gilt und α der Winkel zwischen x-Achse und Spiegelachse ist.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrixform

$$\begin{aligned} x' &= \cos 2\alpha \cdot x + \sin 2\alpha \cdot y \\ y' &= \sin 2\alpha \cdot x - \cos 2\alpha \cdot y \end{aligned}$$

Koordinatenform

Parallelverschiebung

Verschiebungsvektor $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Matrixform

$$\begin{aligned} x' &= x + v_x \\ y' &= y + v_y \end{aligned}$$

Koordinatenform

Orthogonale Affinität

Diese Abbildung ist keine Ähnlichkeitsabbildung. Dennoch ist sie zumindest *geradentreu, parallelentreu, mittelpunktstreu* und für einen Affinitätsmaßstab $k > 0$ auch *„umlaufsinntreu“*.

Affinitäsachse $a: y = 0$, Affinitätsmaßstab $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrixform

$$x' = x$$
$$y' = ky$$

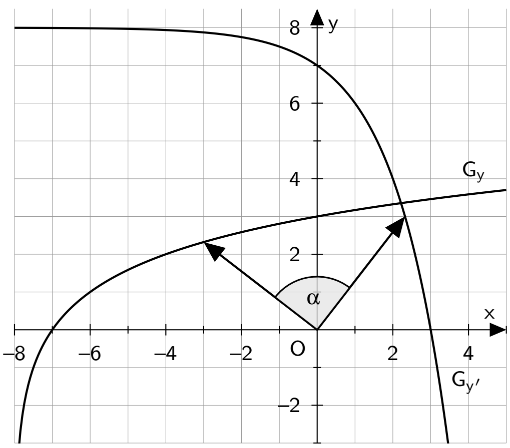
Koordinatenform

Werden verschiedene Abbildungen hintereinander ausgeführt, so berechnet man zuerst $\binom{x'}{y'}$ der einen Abbildung und dann ausgehend von $\binom{x'}{y'}$ die Koordinaten nach der zweiten Abbildung $\binom{x''}{y''}$ usw.
Ist in einer Aufgabe eine Funktion gegeben, deren Graph bereits aus verschiedenen Abbildungen hervorgegangen ist, so berechnet man die ursprüngliche Funktion, indem man die Abbildungen von hinten her „herausrechnet“.

Nachfolgend finden sich **Beispielrechnungen** der gängigsten Abbildungstypen.
In allen Beispielen wird die Funktion $y = \log_2(x + 8)$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ abgebildet. Für y gilt: $\mathbb{D} = \{x \mid x > -8\}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.

Drehung

Bsp. 1.4.1 Drehung der Funktion y um den Punkt $O\,(0\,|\,0)$ mit dem Drehwinkelmaß $\alpha = -90°$.



Zuerst ordnet man einem Punkt (z. B. A) die Koordinaten der Funktion y zu: $A\,(x\,|\,\log_2(x+8))$. Die abgebildete Funktion y′ wird einem zweiten Punkt (z. B. B) zugeordnet: $B\,(x'\,|\,y')$. Dann wird die Drehung wie folgt beschrieben: $\overrightarrow{OA} \xmapsto{O(0|0);\alpha=-90°} \overrightarrow{OB}$. Mit der Matrixform ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
& \binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix} \odot \binom{x}{\log_2(x+8)} + \binom{0}{0} \\
\iff \quad & \binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \odot \binom{x}{\log_2(x+8)} \\
\iff \quad & \binom{x'}{y'} = \binom{\log_2(x+8)}{-x}
\end{aligned}$$

Somit sind die Koordinaten von $B\,(\log_2(x+8)\,|\,-x)$.

Um y′ zu bestimmen (Trägergraphen berechnen), betrachtet man nun das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
& x' = \log_2(x+8) \\
\wedge \quad & y' = -x
\end{aligned}$$

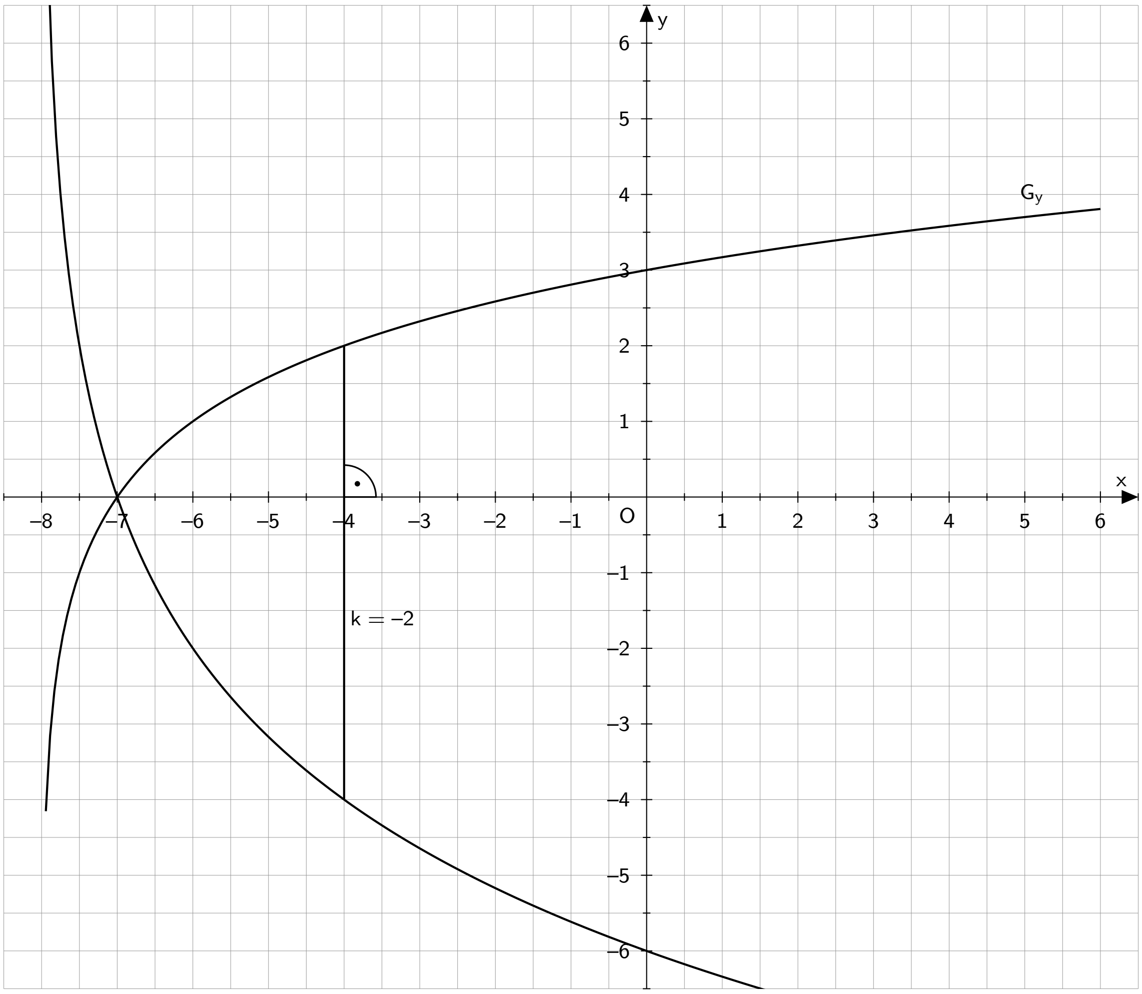
Umformen der ersten Gleichung nach x:

$$\begin{aligned}
& x' = \log_2(x+8) && |\exp(\ ) \\
\iff \quad & 2^{x'} = x + 8 && |-8 \\
\iff \quad & x = 2^{x'} - 8
\end{aligned}$$

Einsetzen von x in die zweite Gleichung ergibt die gedrehte Funktion: $y' = -2^{x'} + 8$.

Orthogonale Affinität

Bsp. 1.4.4 Die Funktion y wird durch ortognale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitsmaßstab $k = -2$ auf die Funktion y' abgebildet.



Einsetzen in die Matrixdarstellung ergibt:

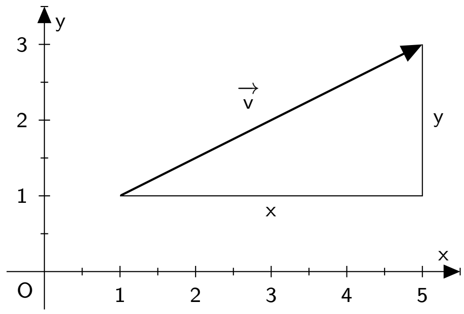
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \log_2(x+8) \end{pmatrix}$$
$$\iff \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot \log_2(x+8) \end{pmatrix}$$

Da $x' = x$ ist, kann die Funktion y' sofort abgelesen werden: $y' = -2 \log_2(x + 8)$.

2 Ebene Geometrie

2.1 Punkte und Vektoren

$A\,(x_A \mid y_A)$	Punkt A mit Koordinaten x_A (Abszisse) und y_A (Ordinate)
$B\,(x_B \mid y_B)$	Punkt B mit Koordinaten x_B (Abszisse) und y_B (Ordinate)
$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	Ortspfeil von A (Pfeil von Ursprung O zum Punkt A)
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_B \end{pmatrix}$	Pfeil $\overrightarrow{AB}$: Spitze (Punkt B) minus Fuß (Punkt A)

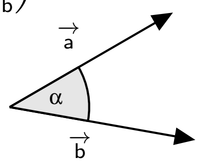


Betrag („Pfeillänge“) eines Vektors:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}\,\text{LE}$

Skalarprodukt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$:

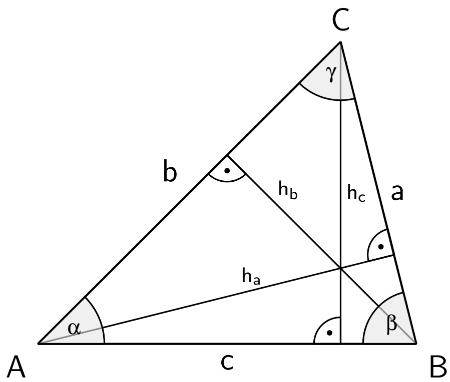
$\vec{a} \odot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ oder:



$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

Spezialfall: $\alpha = 90^\circ \implies \vec{a} \odot \vec{b} = 0$

2.2 Ebene Figuren



Dreieck

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha =$

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin\beta$

Flächeninhalt im Kartesischen Koordinatensystem:

Zwei Vektoren mit gemeinsamen Fußpunkt, z. B. $\overrightarrow{AB} = \vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

Drehsinn: gegen den Uhrzeigersinn: $\implies A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_c & x_b \\ y_c & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_c)$

Sonderfälle:

Gleichschenkliges Dreieck	*Gleichseitiges Dreieck*	*Rechtwinkliges Dreieck*
Zwei gleichlange Schenkel	Alle drei Seiten sind gleich lang	Ein rechter Winkel existiert, gegenüberliegende Seite: Hypotenuse, andere Seiten: Katheten

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ (rechtwinkliges Dreieck mit Katheten a, b und Hypotenuse c)

3 Raumgeometrie

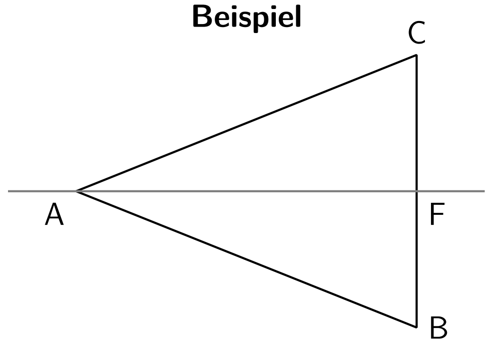
3.1 Schrägbild

Ein Schrägbild mit Verzerrungswinkel ω und Verzerrungsfaktor q wird am besten folgendermaßen eingezeichnet: Dazu sei folgendes **Beispiel** gegeben:

Bsp. 3.1 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit Grundseite [BC] ist Grundfläche der Pyramide ABCS mit der Höhe $h = 5\,\text{cm}$. Die Seitenlängen haben folgende Maße: $[AB] = [AC] = 3\,\text{cm}$, $[BC] = 4\,\text{cm}$. Der Punkt F ist der Fußpunkt der Höhe des Dreiecks ABC und es gilt $[BF] = 2\,\text{cm}$. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt F. Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei die Strecke [AF] auf der Schrägbildachse liegen soll. Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Schritte | **Beispiel**

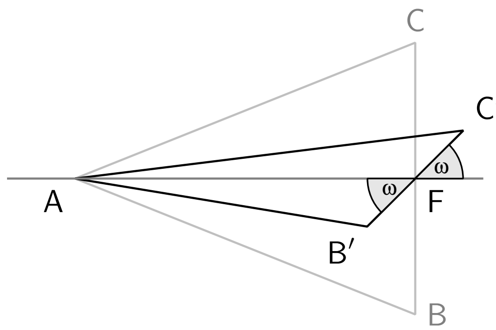
1. Schritt: Die geforderte Grundfläche wird als normale, ebene Figur gezeichnet; dabei ist darauf zu achten, dass die gewünschte Schrägbildachse in der Horizontalen liegt.



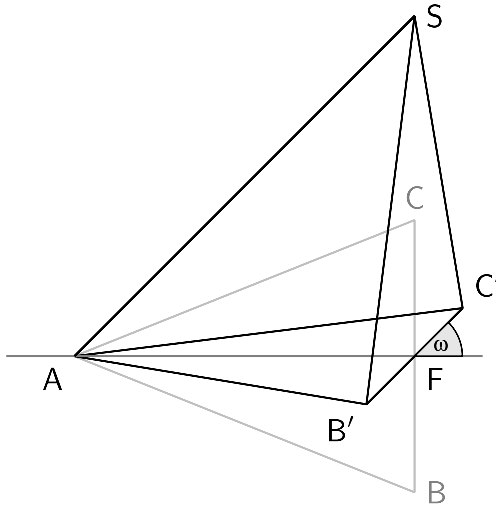
2. Schritt: Von jedem Punkt der Grundfläche, der ober- bzw. unterhalb der Schrägbildachse liegt, fällt man das Lot auf die Schrägbildachse.

Die Lotstrecken sind bereits eingezeichnet: [BF] bzw. [FC]

3. Schritt: Vom Lotpunkt aus zeichnet man mit dem gegebenen Verzerrungswinkel ω die mit dem Verzerrungsfaktor q gestreckten neuen Strecken. So gilt z. B. $\overline{FC'} = q \cdot \overline{FC}$.



4. Schritt: Das Schrägbild wird z. B. zum Prisma oder zur Pyramide vervollständigt.



3.2 Prisma und Pyramide

Zu unterscheiden sind *Prismen* und *Pyramiden*.

Prisma

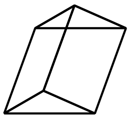
Die Seiten*kanten* sind parallel zueinander.

Die Seiten*flächen* sind stets Parallelogramme.

Die Grund- und Deckfläche sind kongruente Vielecke.

Gerades Prisma: Die Seitenkanten sind senkrecht zur Grundfläche.

Schiefes Prisma: Die Seitenkanten sind *nicht* senkrecht zur Grundfläche.

Beispiele: Würfel, Quader, 

$V = G \cdot h$

$O = 2G + M$

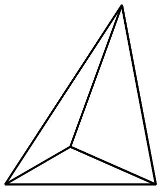
Pyramide

Alle Seiten*kanten* laufen in einen Punkt (die Spitze).

Die Seiten*flächen* sind stets Dreiecke.

Die Grundfläche ist ein Vieleck.

Reguläre Pyramide: Alle Seitenkanten sind gleich lang.

Beispiel: 

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

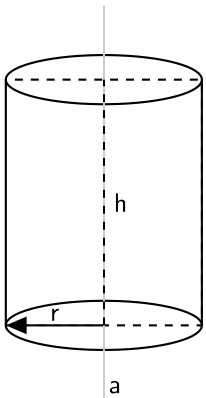
$O = G + M$

Wobei V das Volumen, G die Grundfläche, h die Höhe, O die Oberfläche und M die Mantelfläche ist.

3.3 Rotationskörper

Dreht man eine zweidimensionale Figur um eine Drehachse, so entsteht ein Rotationskörper. Dieser ist symmetrisch zu seiner Drehachse. Ein Axialschnitt eines Rotationskörpers ist ein Schnitt durch diesen entlang seiner Drehachse: Man erhält wieder die zweidimensionale Figur, aus der der Rotationskörper entstanden ist. Im wesentlichen gibt es den geraden Kreiszylinder und Kreiskegel:

Gerader Kreiszylinder



Drehachse: a

Axialschnitt: Rechteck

Grund- und Deckfläche: Kreis

Radius: r

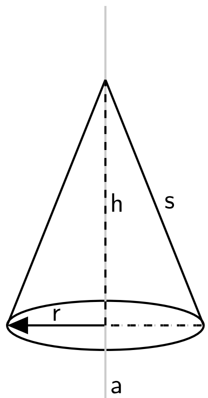
Höhe: h

$V = \pi r^2 h$

$O = 2G + M$

$M = \pi 2rh$

Gerader Kreiskegel



Drehachse: a

Axialschnitt: Gleichseitiges Dreieck

Grundfläche: Kreis

Radius: r

Höhe: h

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$O = G + M$

$M = \pi rs$

Wobei V das Volumen, G die Grundfläche, O die Oberfläche und M die Mantelfläche ist.

A 1.0 In einer Medikamentenstudie wird in drei zeitgleich beginnenden Laborversuchen die Vermehrung von Krankheitserregern untersucht.
Bei allen Versuchen geht man von anfänglich 10 000 Krankheitserregern aus.

A 1.1 Im ersten Versuch wird festgestellt, dass sich die Anzahl der Krankheitserreger ohne Zugabe eines Medikaments täglich um 16 % vergrößert. 2 P
Bestimmen Sie durch Rechnung, am wievielten Tag nach Versuchsbeginn sich die Anzahl der Krankheitserreger verdreifacht hat.

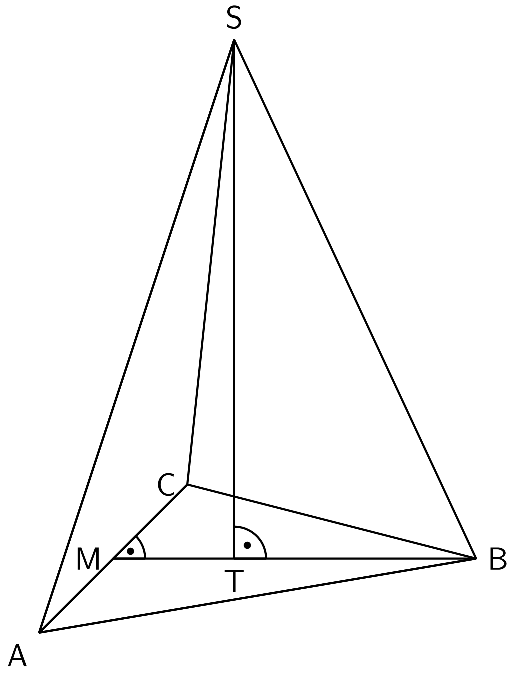
A 1.2 Beim zweiten Versuch wird zu Beginn ein Medikament A zugegeben. Nach Ablauf von 12 Tagen beträgt die Anzahl der Krankheitserreger 45 000. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl der Krankheitserreger mit Medikament A täglich zunimmt. Runden Sie auf ganze Prozent. 1 P

A 1.3 Beim dritten Versuch wird ein Medikament B zugegeben, mit dem die Anzahl der Krankheitserreger täglich nur um 8 % zunimmt. Bestimmen Sie durch Rechnung, am wievielten Tag nach Versuchsbeginn die Anzahl der Krankheitserreger mit Medikament B halb so groß ist wie die Anzahl der Krankheitserreger aus dem Versuch aus 1.1 ohne Medikament. 2 P

A 2.0 Die nebenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCS, deren Grundfläche das gleichseitige Dreieck ABC ist. Der Fußpunkt T der Pyramidenhöhe [ST] teilt die Dreieckshöhe [MB] des gleichseitigen Dreiecks ABC im Verhältnis $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$.
Es gilt: $\overline{MB} = 6\,\text{cm}$; $\sphericalangle SBM = 65°$.

In der Zeichnung (nicht maßstabsgetreu) gilt:
$q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$; [MB] liegt auf der Schrägbildachse.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 2.1 Berechnen Sie die Länge der Strecke [ST]. 1 P
[Ergebnis: $\overline{ST} = 8{,}58\,\text{cm}$]

A 2.2 Die Punkte P_n liegen auf der Strecke [BS]. Die Winkel BMP_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [0°; 76{,}88°]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten A und C die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken AP_nC mit der Basis [AC]. 1 P
Zeichnen Sie das Dreieck AP_1C für $\varphi = 20°$ in das Schrägbild zu 2.0 ein.

A 2.3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5{,}44}{\sin(\varphi + 65°)}\,\text{cm}$. 2 P

A 1.1 Da es sich hierbei um ein exponentielles Wachstum handelt (Anzahl der Krankheitserreger vergrößert sich täglich um 16 %) und anfänglich 10 000 Krankheitserreger vorhanden sind, berechnet man den Tag $x \in \mathbb{R}_0^+$, an dem sich Anzahl der Krankheitserreger verdreifacht hat ($10\,000 \cdot 3 = 30\,000$), wie folgt:

$$\begin{aligned} & 30\,000 = 10\,000 \cdot 1{,}16^x && |:10\,000 \\ \iff\quad & 3 = 1{,}16^x && |\log(\ ) \\ \iff\quad & x = \log_{1{,}16} 3 && \\ \iff\quad & \underline{\underline{x = 7{,}4}} && \mathbb{L} = \{7{,}4\} \end{aligned}$$

Am 8. Tag nach Versuchsbeginn hat sich die Anzahl der Krankheitserreger verdreifacht.

A 1.2 Auch hierbei muss eine Exponentialgleichung aufgestellt werden. Für $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} & 45\,000 = 10\,000 \cdot k^{12} && |:10\,000 \\ \iff\quad & 4{,}5 = k^{12} && |\sqrt[12]{\ } \\ \iff\quad & \underline{\underline{k = 1{,}13}} && \mathbb{L} = \{1{,}13\} \end{aligned}$$

Die Anzahl der Krankheitserreger nimmt täglich um 13 % zu.

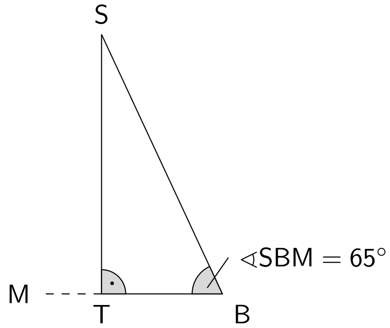
A 1.3 Die Anzahl der Krankheitserreger nach x Tagen aus dem Versuch aus 1.1 ohne Medikament ist $10\,000 \cdot 1{,}16^x$. Die zu lösende Gleichung für $x \in \mathbb{R}_0^+$ lautet also:

$$\begin{aligned} & 0{,}5 \cdot 10\,000 \cdot 1{,}16^x = 10\,000 \cdot 1{,}08^x && \\ \iff\quad & 5\,000 \cdot 1{,}16^x = 10\,000 \cdot 1{,}08^x && |:5\,000\ |:1{,}08^x \\ \iff\quad & \left(\frac{1{,}16}{1{,}08}\right)^x = 2 && |\log(\ ) \\ \iff\quad & x = \log_{1{,}07} 2 && \\ \iff\quad & \underline{\underline{x = 9{,}7}} && \mathbb{L} = \{9{,}7\} \end{aligned}$$

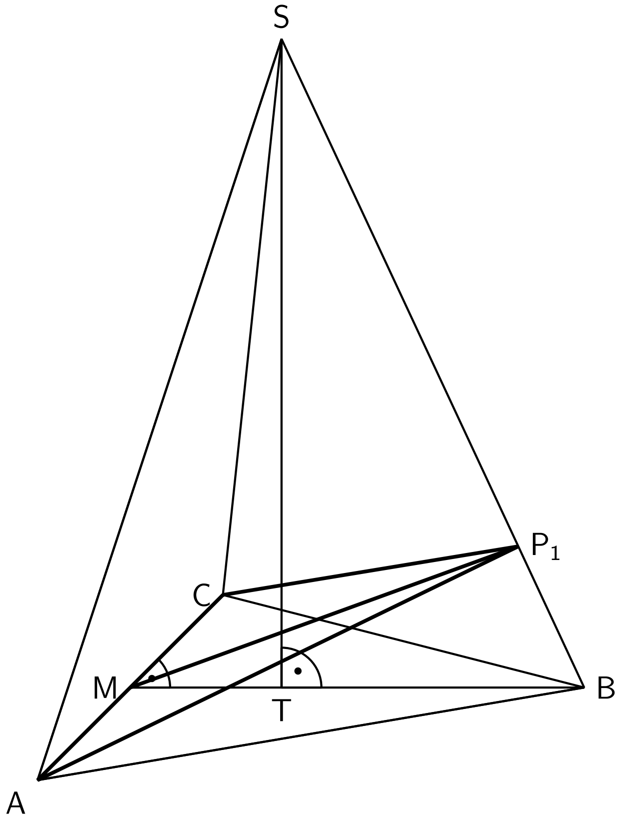
Am 10. Tag ist die Anzahl der Krankheitserreger halb so groß wie die Anzahl aus dem Versuch zu 1.1.

A 2.1 Aufgrund des Teilungsverhältnisses $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$ und $\overline{MB} = 6\,\text{cm}$ ist die Strecke $\overline{TB} = 4\,\text{cm}$ lang. Dann gilt mit dem Winkel $\sphericalangle SBM = 65°$:

$$\begin{aligned} & \tan\sphericalangle SBM = \frac{\overline{TS}}{\overline{TB}} && \\ \iff\quad & \tan 65° = \frac{\overline{ST}}{4\,\text{cm}} && |\cdot 4\,\text{cm} \\ \iff\quad & \underline{\underline{\overline{ST} = 8{,}58\,\text{cm}}} && \end{aligned}$$



A 2.2 Einzeichnen des Dreiecks AP_1C für $\varphi = 20°$:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 2.3 Mithilfe des Sinussatzes im Dreieck MBP_n berechnet sich die Strecke $\overline{MP_n}$ in Abhängigkeit von $\varphi \in [0°;\ 76{,}88°]$ und mit der Eigenschaft $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$ folgendermaßen:

$$\frac{\overline{MP_n}(\varphi)}{\sin 65°} = \frac{\overline{MB}}{\sin(180° - (\varphi + 65°))} \qquad | \cdot \sin 65°$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \overline{MP_n}(\varphi) = \frac{\sin 65° \cdot 6\,\text{cm}}{\sin(\varphi + 65°)}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \underline{\underline{\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5{,}44}{\sin(\varphi + 65°)}\,\text{cm}}}$$

A 2.4 Im gleichseitigen Dreieck ABC gilt $\overline{MB} = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot \sqrt{3}$ also $\overline{AC} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}}\,\text{cm} = 6{,}93\,\text{cm}$. Dann gilt für den Flächeninhalt der Dreiecke AP_nC:

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MP_2}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}93 \cdot \frac{5{,}44}{\sin(\varphi + 65°)}\,\text{cm}^2$$

$$\Longleftrightarrow \qquad A_{AP_nC} = \frac{18{,}85}{\sin(\varphi + 65°)}\,\text{cm}^2$$

B 1.0 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 0{,}75^{x+2} - 3$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

B 1.1 Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der Funktion f_1 an. 3 P
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 für $x \in [-9; 4]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leqq x \leqq 5$; $-4 \leqq y \leqq 8$

B 1.2 Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -2$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet. 4 P
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = -2 \cdot 0{,}75^{x+4} + 7$ besitzt ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [-9; 4]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

B 1.3 Punkte $A_n\,(x \,|\, 0{,}75^{x+2} - 3)$ auf dem Graphen zu f_1 und Punkte $C_n\,(x \,|\, -2 \cdot 0{,}75^{x+4} + 7)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x und sind für $x > -6{,}61$ zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Drachenvierecken $A_nB_nC_nD_n$. 2 P
Die Strecken $[A_nC_n]$ leigen auf den Symmetrieachsen der Drachenvierecke $A_nB_nC_nD_n$.
Es gilt: $\overrightarrow{A_nB_n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Zeichnen Sie das Drachenviereck $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -5$ und das Drachenviereck $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

B 1.4 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[A_nC_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_nC_n}(x) = (-2{,}125 \cdot 0{,}75^{x+2} + 10)$ LE. 2 P

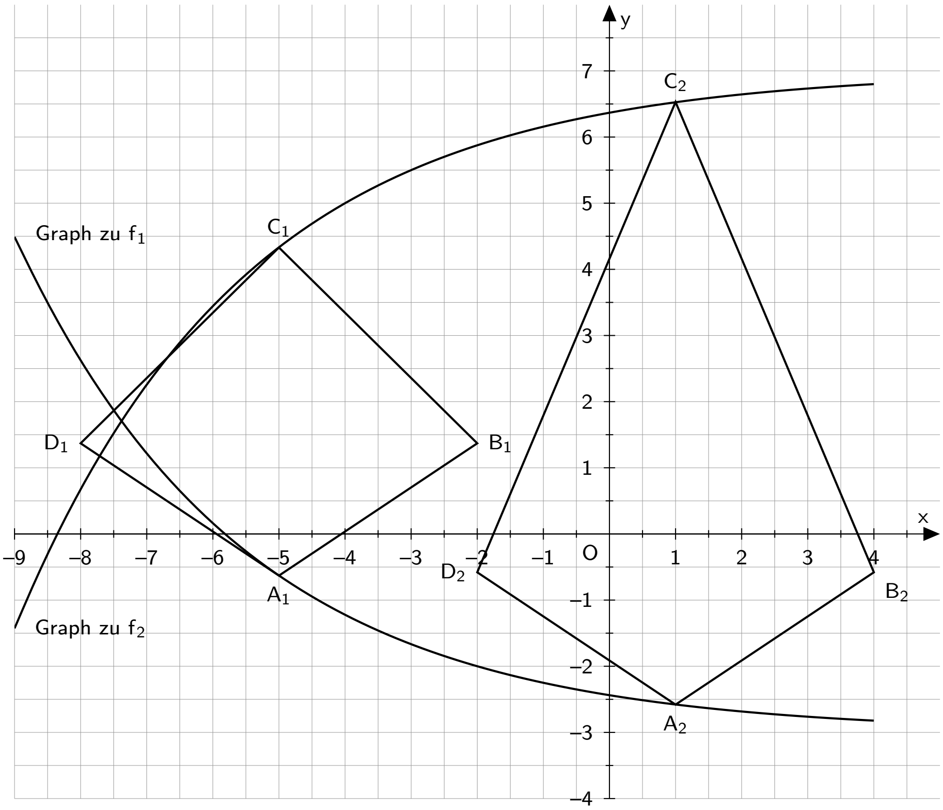
B 1.5 Unter den Drachenvierecken $A_nB_nC_nD_n$ gibt es die Raute $A_3B_3C_3D_3$. 3 P
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_3 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

B 1.6 Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Drachenvierecke $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $A(x) = (-6{,}375 \cdot 0{,}75^{x+2} + 30)$ FE. 3 P
Begründen Sie sodann, dass für den Flächeninhalt aller Drachenvierecke $A_nB_nC_nD_n$ gilt: $A < 30$ FE.

2015

B 1.1 Für die Definitionsmenge gibt es keine Einschränkung, da für x alle Werte zugelassen sind, also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Da f_1 eine Exponentialfunktion der Form $a^{x-b} + c$ ist, für welche stets $\mathbb{W} = \{y \mid y > c\}$ gilt, lautet die Wertemenge für f_1: $\mathbb{W} = \{y \mid y > -3\}$.

Zeichnung von f_1 für $x \in [-9; 4]$:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



B 1.2 Die Abbildungsgleichung der orthogonalen Affinität mit der x-Achse lautet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Setzt man in diese den Affinitätsmaßstab $k = -2$ und die Funktion f_1 ein, so gilt mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 0{,}75^{x+2} - 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot (0{,}75^{x+2} - 3) \\ 0 \cdot x + (-2) \cdot (0{,}75^{x+2} - 3) \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot 0{,}75^{x+2} + 6 \end{pmatrix}}\end{aligned}$$

Dies führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & x' = x \\ \wedge \quad & y' = -2 \cdot 0{,}75^{x'+2} + 6 \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = x'$ in die untere Gleichung ergibt $\underline{y' = -2 \cdot 0{,}75^{x'+2} + 6.}$

Jetzt fehlt noch die Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \binom{-2}{1}$. Für $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $x' \in \mathbb{R}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x' \\ -2 \cdot 0{,}75^{x'+2} + 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} x' - 2 \\ -2 \cdot 0{,}75^{x'+2} + 7 \end{pmatrix}}\end{aligned}$$

Dies führt wiederum zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & x'' = x' - 2 \\ \wedge \quad & y'' = -2 \cdot 0{,}75^{x'+2} + 7 \end{aligned}$$

Umformen der ersten Gleichung ergibt $x' = x'' + 2$. In die zweite Gleichung eingesetzt erhält man:

$$\begin{aligned} y'' &= -2 \cdot 0{,}75^{x''+2+2} + 7 \\ &= \underline{\underline{-2 \cdot 0{,}75^{x''+4} + 7}} \end{aligned}$$

Somit lautet die Gleichung der Funktion $f_2 : y = -2 \cdot 0{,}75^{x+4} + 7$, $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Einzeichnen des Graphen zu f_2: siehe Koordinatensystem von Aufgabe B 1.1.

B 1.3 Es gilt $A_1\,(-5\,|-0{,}63)$, $B_1\,(-5\,|\,4{,}33)$, $A_2\,(1\,|-2{,}58)$ und $B_2\,(1\,|\,6{,}53)$.

Einzeichnen der Drachenvierecke $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$: siehe Koordinatensystem zu Aufgabe B 1.1.

B 1.4 Da die Punkte A_n und C_n senkrecht übereinander stehen (gleiche Abszisse x), genügt es, die Differenz der y-Koordinaten von C_n und A_n zu bilden. Für $x > -6{,}61$ gilt also:

$$\begin{aligned} \overline{A_nC_n}(x) &= [-2 \cdot 0{,}75^{x+4} + 7 - (0{,}75^{x+2} - 3)][\text{LE}] \\ &= [-2 \cdot 0{,}75^{x+2+2} + 7 - 0{,}75^{x+2} + 3] \\ &= [-2 \cdot 0{,}75^{2} \cdot 0{,}75^{x+2} - 0{,}75^{x+2} + 10] \\ &= [-1{,}125 \cdot 0{,}75^{x+2} - 0{,}75^{x+2} + 10] \\ &= [-2{,}125 \cdot 0{,}75^{x+2} + 10][\text{LE}] \end{aligned}$$

Somit beträgt die Länge der Strecken $[A_nC_n]$:

$$\overline{A_nC_n} = \left(-2{,}125 \cdot 0{,}75^{x+2} + 10\right)\ [\text{LE}]$$

B 1.5 Bei einer Raute sind alle vier Seiten gleich lang. Da die Punkte A_n und C_n senkrecht übereinander stehen, reicht es zu wissen, dass der Abstand $\overline{A_3C_3}$ doppelt so groß sein muss, wie der Abstand der vertikalen Komponenten von A_3 und B_3. Dieser vertikale Abstand von A_3 und B_3 ist dem

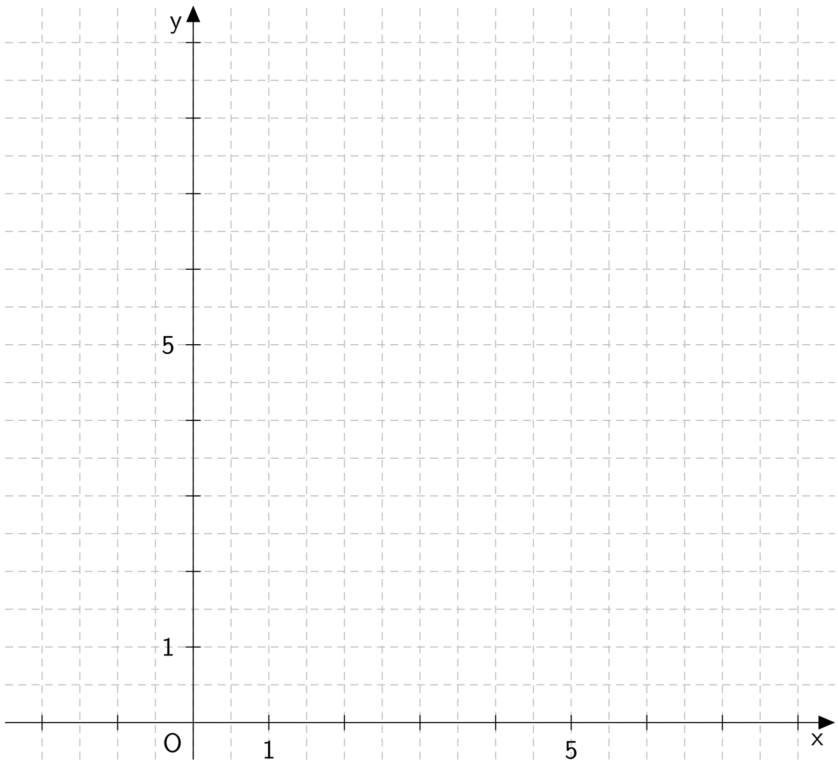
A 2.0 Die Punkte A (− 0,5 | 1) und B (3,5 | 1) legen zusammen mit den Pfeilen

$\overrightarrow{AC_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 0{,}5 \\ \dfrac{1}{\cos \varphi} + 1 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0°; 90°[$ Dreiecke ABC_n fest.

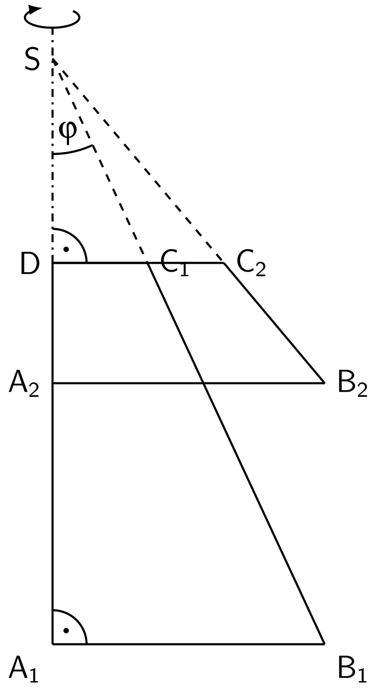
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

A 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 40°$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 80°$. 3 P
Zeichnen Sie anschließend die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 in das Koordinatensystem ein.

(**Hinweis:** Die Koordinatensystem ist nicht maßstabsgetreu, da das Koordinatensystem für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.1 Als Winkel $\sphericalangle DSC_2$ wird $\varphi = 40^\circ$ abgetragen. Weiterhin sind die Strecken $\overline{SD} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{A_2B_2} = 4\,\text{cm}$ gegeben. Damit kann das Trapez in die gegebene Darstellung eingezeichnet werden:



A 1.2 Für den Winkel φ gilt im Dreieck DC_nS:

$$\begin{aligned} & \tan\varphi = \frac{\overline{DC_n}}{\overline{SD}} && \mid \cdot \overline{SD} \\ \Longleftrightarrow\quad & \tan\varphi \cdot \overline{SD} = \overline{DC_n} \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\overline{DC_n}(\varphi) = 3 \cdot \tan\varphi\,\text{cm}}} \end{aligned}$$

Im Dreieck SA_nB_n gilt zudem:

$$\begin{aligned} & \tan\varphi = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{SA_n}} && \mid \cdot \overline{SA_n} \\ \Longleftrightarrow\quad & \tan\varphi \cdot \overline{SA_n} = \overline{A_nB_n} && \mid : \tan\varphi \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{SA_n} = \frac{\overline{A_nB_n}}{\tan\varphi} \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\overline{SA_n}(\varphi) = \frac{4}{\tan\varphi}\,\text{cm}}} \end{aligned}$$

A 1.3 Das gesuchte Volumen V des Rotationskörpers ergibt sich aus der Differenz des Rotationskörpers des Dreiecks A_nB_nS abzüglich des Rotationskörpers des Dreiecks DC_nS:

$$V = V_{A_nB_nS} + V_{DC_nS}$$

Bei den Rotationskörpern der Dreiecke handelt es sich jeweils um Kreiskegel. Die Grundseite der Dreiecke ist dabei der Radius der Grundseite. Damit kann das gesuchte Volumen bestimmt werden:

$$V = V_{A_nB_nS} + V_{DC_nS}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot (\overline{A_nB_n})^2 \cdot \overline{SA_n} - \frac{1}{3}\pi \cdot (\overline{DC_n})^2 \cdot \overline{SD}$$

Darin können nun die bekannten Größen und die Zusammenhänge aus Aufgabe A 1.2 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot (\overline{A_nB_n})^2 \cdot \overline{SA_n} - \frac{1}{3}\pi \cdot (\overline{DC_n})^2 \cdot \overline{SD} \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot (4\,\mathrm{cm})^2 \cdot \frac{4}{\tan\varphi}\,\mathrm{cm} - \frac{1}{3}\pi \cdot (3\tan\varphi\,\mathrm{cm})^2 \cdot 3\,\mathrm{cm} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{64}{\tan\varphi} - 27\tan^2\varphi\right)\mathrm{cm}^3}} \end{aligned}$$

A 2.1 Durch Einsetzen der Werte für den Winkel können auf eine Nachkommastelle gerundet die Koordinaten der Pfeile berechnet werden:

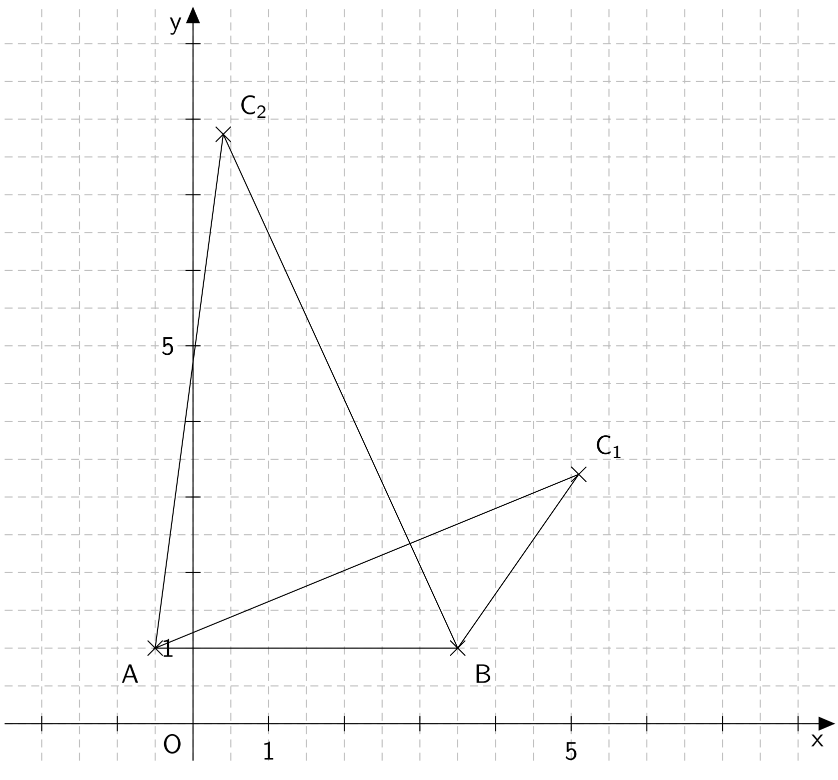
$$\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos(40^\circ) - 0{,}5 \\ \frac{1}{\cos(40^\circ)} + 1 \end{pmatrix} \approx \underline{\begin{pmatrix} 5{,}6 \\ 2{,}3 \end{pmatrix}} \qquad \overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} 8\cdot\cos(80^\circ) - 0{,}5 \\ \frac{1}{\cos(80^\circ)} + 1 \end{pmatrix} \approx \underline{\begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 6{,}8 \end{pmatrix}}$$

Aus den Koordinaten des Punktes A und den berechneten Vektoren können die Koordinaten der Punkte C_1 und C_2 bestimmt werden:

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ 2{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}1 \\ 3{,}3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_1\,(5{,}1\,|\,3{,}3)}}$$

$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 6{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 7{,}8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_2\,(0{,}4\,|\,7{,}8)}}$$

Die Koordinaten der Eckpunkte der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind nun bekannt und können in das Koordinatensystem eingezeichnet werden.
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.0 Es werden zwei Versuche zur Abkühlung von heißem Wasser durchgeführt. Der Temperaturverlauf während dieser Versuche lässt sich jeweils näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = (y_A - y_U) \cdot 0{,}9^x + y_U$
($\mathbb{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, y_A \in \mathbb{R}^+, y_U \in \mathbb{R}^+$) beschreiben.
Dabei ist nach x Minuten die Temperatur des Wassers auf y °C gesunken. Die Anfangstemperatur des Wassers beträgt y_A °C und die Umgebungstemperatur y_U °C. Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

A 1.1 Im ersten Versuch kühlt 95 °C heißes Wasser in einem Raum mit einer Umgebungstemperatur von 20 °C ab. 2 P
Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Wassertemperatur auf 60 °C gesunken ist.

A 1.2 Im zweiten Versuch kühlt 72 °C heißes Wasser in einem ersten Raum mit einer Umgebungstemperatur von 18 °C für 3 Minuten ab. Anschließend wird der Abkühlvorgang in einem zweiten Raum für weitere 8 Minuten fortgesetzt, bis das Wasser eine Temperatur von 39 °C besitzt. 3 P
Berechnen Sie die Umgebungstemperatur im zweiten Raum.

A 1.1 In die gegebene Funktionsvorschrift $y = (y_A - y_U) \cdot 0{,}9^x + y_U$ werden die Werte $y_A = 95$ und $y_U = 20$ eingesetzt. Dann kann ermittelt werden, nach welcher Zeit die Temperatur auf 60° gesunken ist:

$$\begin{aligned} & 60 = (95-20) \cdot 0{,}9^x + 20 && \mid -20 \\ \iff\quad & 40 = 75 \cdot 0{,}9^x && \mid :75 \\ \iff\quad & \frac{8}{15} = 0{,}9^x && \mid \log_{0{,}9} \\ \iff\quad & x = \log_{0{,}9} \frac{8}{15} \\ \iff\quad & \underline{\underline{x \approx 6{,}0}} \end{aligned}$$

Es ergibt sich $\mathbb{L} = \{6{,}0\}$. Die Wassertemperatur ist also nach etwa 6 Minuten auf 60° gesunken.

A 1.2 Es ist nun $y_A = 72$, $y_U = 18$ und $x = 3$:

$$y = (72-18) \cdot 0{,}9^3 + 18 \approx 57{,}4$$

Es wird nun $y_A = 57{,}4$ und $x = 8$ eingesetzt. Damit wird die Umgebungstermperatur rechnerisch bestimmt:

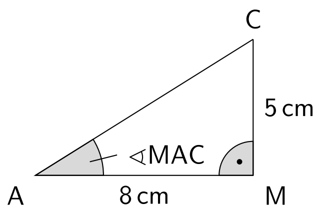
$$\begin{aligned} & (57{,}4 - y_U) \cdot 0{,}9^8 + y_U = 39 \\ \iff\quad & 57{,}4 \cdot 0{,}9^8 + y_U \cdot (1 - 0{,}9^8) = 39 && \mid -57{,}4 \cdot 0{,}9^8 \\ \iff\quad & y_U \cdot (1 - 0{,}9^8) = 39 - 57{,}4 \cdot 0{,}9^8 && \mid : (1 - 0{,}9^8) \\ \iff\quad & y_U = \frac{39 - 57{,}4 \cdot 0{,}9^8}{1 - 0{,}9^8} \\ \iff\quad & \underline{\underline{y_U \approx 25{,}1}} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $\mathbb{L} = \{25{,}1\}$. Die Umgebungstemperatur im zweiten Raum beträgt also 25,1°.

A 2.1 Für den Winkel gilt:

$$\tan \sphericalangle MAC = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{0{,}5 \cdot 10\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = \frac{5}{8}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sphericalangle MAC \approx 32{,}01°}}$$

Skizze



A 2.2 Einzeichnen des Punktes P_1 und der Strecke $[AP_1]$ (Zeichnung siehe nächste Teilaufgabe).

B 1.0 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 10 \cdot 0{,}5^{x+3} + 2$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_1 an. 2 P
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 für $x \in [-2{,}5;\, 5]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 5$; $-6 \leqq y \leqq 10$

B 1.2 Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet. 4 P

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = -10 \cdot 0{,}5^{x+5} - 1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besitzt.

Geben Sie sodann die Gleichung ihrer Asymptote an und zeichnen Sie den Graphen zu f_2 für $x \in [-4;\, 5]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

B 1.3 Punkte $A_n\,(x \,|\, 10 \cdot 0{,}5^{x+3} + 2)$ auf dem Graphen zu f_1 und Punkte $C_n\,(x \,|\, -10 \cdot 0{,}5^{x+5} - 1)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$. 2 P
Die Punkte D_n liegen ebenfalls auf dem Graphen zu f_1, ihre Abszisse ist um 2 größer als die Abszisse x der Punkte A_n.
Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -2$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 1{,}5$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

B 1.4 Berechnen Sie das Maß des Winkels $A_1D_1C_1$. 4 P

B 1.5 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $B_n\,(x - 2 \,|\, 5 \cdot 0{,}5^{x+3} - 1)$. 3 P
[Teilergebnis: $D_n\,(x + 2 \,|\, 10 \cdot 0{,}5^{x+5} + 2)$]

B 1.6 Unter den Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$ gibt es die Raute $A_3B_3C_3D_3$. 3 P
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes A_3.

B 2.0 Das Quadrat ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist die Grundfläche des geraden Prismas ABCDEFGH mit der Höhe [AE]. Der Schnittpunkt der Diagonalen [EG] und [FH] des Quadrats EFGH ist der Punkt N.

Es gilt: $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$; $\overline{AE} = 9\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecke [AC] gilt: $\overline{AC} = 9{,}90\,\text{cm}$. 3 P

Zeichnen Sie sodann das Schrägbild des Prismas ABCDEFGH, wobei die Strecke [AC] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

B 2.2 Berechnen Sie die Länge der Strecke [CN] sowie das Maß des Winkels CNG. 2 P

[Ergebnis: $\sphericalangle CNG = 61{,}19°$]

B 2.3 Punkte P_n liegen auf der Strecke [CN]. Die Winkel P_nEN haben das Maß φ mit $\varphi \in\ ]0°; 42{,}27°]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten N und E die Eckpunkte von Dreiecken P_nNE. 2 P

Zeichnen Sie das Dreieck P_1NE für $\varphi = 38°$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein und begründen Sie sodann die obere Intervallgrenze für φ.

B 2.4 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[NP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt: 2 P

$$\overline{NP_n}(\varphi) = \frac{4{,}95 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 118{,}81°)}\,\text{cm}.$$

B 2.5 Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $EFHP_n$ mit den Höhen $[P_nT_n]$, deren Fußpunkte T_n auf der Strecke [EG] liegen. 3 P

Zeichnen Sie die Pyramide $EFHP_1$ und ihre Höhe $[P_1T_1]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $EFHP_n$ in Abhängigkeit von φ.

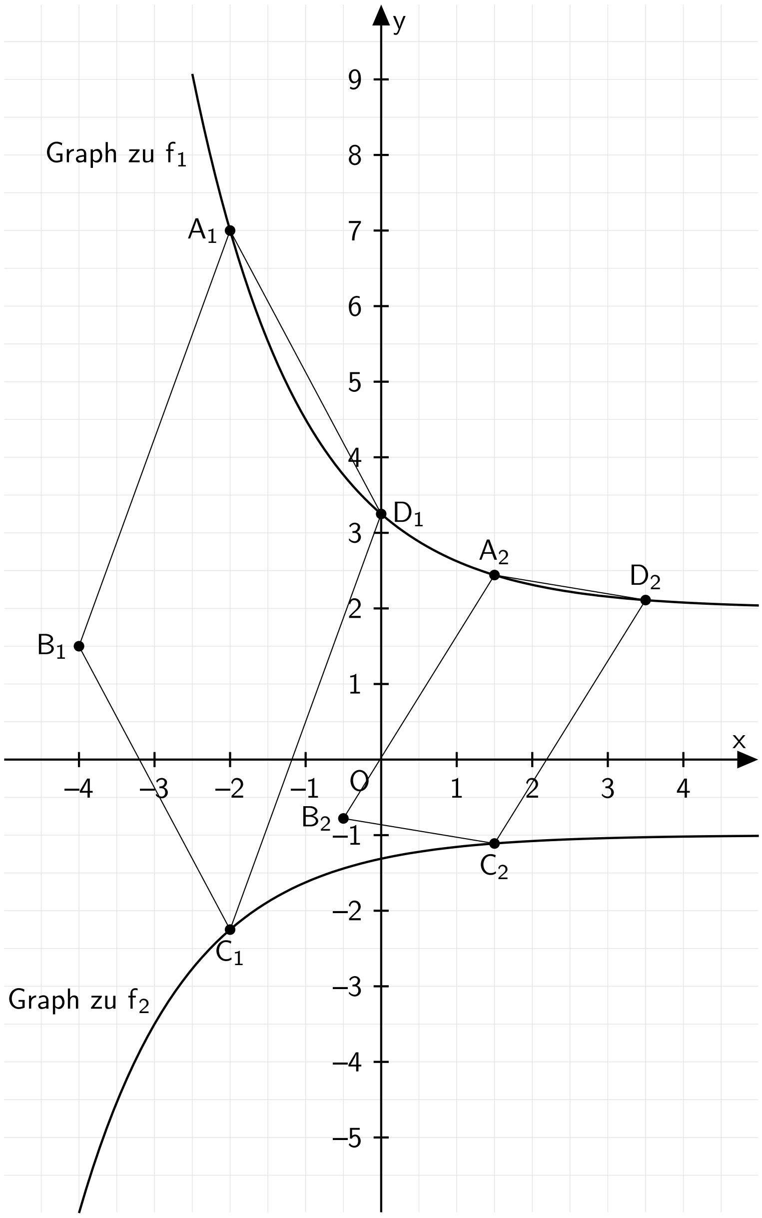
$$\left[\text{Teilergebnis: } \overline{P_nT_n}(\varphi) = \frac{4{,}34 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 118{,}81°)}\,\text{cm}\right]$$

B 2.6 Die Punkte P_n sind auch Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$. 4 P
Für die Pyramiden $EFHP_2$ und $ABCDP_2$ gilt: $V_{EFHP_2} = V_{ABCDP_2}$.

Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ.

B 1.1 Da der Exponent einer Zahl beliebig sein kann, gibt es für x keine Einschränkungen. Demnach ist die Definitionsmenge $\underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{R}}}$.

Darstellung des Graphen zu f_1:
(**Hinweis:** Das Koordinatensystem ist nicht maßstabsgetreu, da es für den Buchdruck skaliert wurde.)



B 1.2 Achsenspiegelung an der x-Achse bedeutet zunächst ein negatives Vorzeichen vor den y-Wert der Funktion. Für die Spiegelung gilt damit zunächst:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -(10 \cdot 0{,}5^{x+3} + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -10 \cdot 0{,}5^{x+3} - 2 \end{pmatrix}$$

Mit $x = x'$ folgt für die Spiegelung also die Gleichung $y' = -10 \cdot 0{,}5^{x'+3} - 2$. Anschließend gilt für die Parallelverschiebung:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -10 \cdot 0{,}5^{x'+3} - 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - 2 \\ -10 \cdot 0{,}5^{x'+3} - 1 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 2 \qquad \mid +2 \\ \Longleftrightarrow \quad x' &= x'' + 2 \end{aligned}$$

Eingesetzt gilt also:

$$y'' = -10 \cdot 0{,}5^{x'+3} - 1 = -10 \cdot 0{,}5^{(x''+2)+3} - 1 = -10 \cdot 0{,}5^{x''+5} - 1$$

Somit ist also $\underline{\underline{f_2 : y = -10 \cdot 0{,}5^{x+5} - 1}}$.

Da die Basis des Exponentialterms mit 0,5 betragsmäßig kleiner als 1 ist, wird dieser Term für große x sehr klein und geht gegen null. Damit ist die Gleichung des waagrechten Asymptote $y = -1$.

Graphische Darstellung siehe Teilaufgabe 1.1.

B 1.3 Für die graphische Darstellung wird zunächst A_1 bei $x = -2$ auf dem Graphen von f_1 und C_1 bei $x = -2$ auf dem Graphen von f_2 eingezeichnet. Anschließend wird der Punkt D_1 bei $x = -2 + 2 = 0$ auf dem Graphen von f_1 eingezeichnet. Es werden nun die Seitenkanten A_1D_1 und D_1C_1 gezeichnet. Werden nun jeweils die parallelen Seiten gezeichnet, ergibt sich an deren Schnittpunkt schließlich der Punkt B_1.

Analog wird für $A_2B_2C_2D_2$ verfahren. Darstellung siehe Teilaufgabe 1.1.

B 1.4 Zunächst werden durch Einsetzen von von $x = -2$ die Koordinaten der Punkte A_1, C_1 und D_1 berechnet.

$$\begin{array}{lll} x_{A_1} = -2 & y_{A_1} = 10 \cdot 0{,}5^{-2+3} + 2 = 7 & \Rightarrow \quad A_1\,(-2\,|\,7) \\ x_{C_1} = -2 & y_{C_1} = -10 \cdot 0{,}5^{-2+5} - 1 = -2{,}25 & \Rightarrow \quad C_1\,(-2\,|\,-2{,}25) \\ x_{D_1} = 0 & y_{D_1} = 10 \cdot 0{,}5^{0+3} + 2 = 3{,}25 & \Rightarrow \quad D_1\,(0\,|\,3{,}25) \end{array}$$

Für die Pfeile zwischen den Punkten gilt ausgehend vom Punkt D_1:

$$\overrightarrow{D_1A_1} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 7-3{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{D_1C_1} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ -2{,}25-3{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für den eingeschlossenen Winkel:

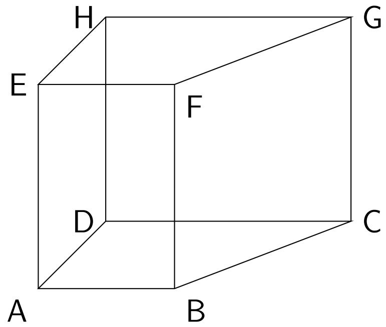
$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle A_1D_1C_1 &= \frac{\overrightarrow{D_1A_1} \odot \overrightarrow{D_1C_1}}{|\overrightarrow{D_1A_1}| \cdot |\overrightarrow{D_1C_1}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 3{,}75^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-5{,}5)^2}} \\ &= \frac{4 - 20{,}625}{\sqrt{18{,}0625} \cdot \sqrt{34{,}25}} \approx -0{,}6684 \end{aligned}$$

Somit ist $\sphericalangle A_1D_1C_1 = \cos^{-1}(-0{,}6684) \approx \underline{\underline{131{,}94^\circ}}$.

B 1.0 Das Trapez ABCD mit [AB] || [DC] ist die Grundfläche des Prismas ABCDEFGH mit der Höhe [AE] (siehe Skizze).

Es gilt: $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$; $\overline{AD} = 7\,\text{cm}$; $\sphericalangle BAD = 90°$;
$\overline{DC} = 9\,\text{cm}$; $\overline{AE} = 7{,}5\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 1.1 Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas ABCDEFGH mit der Strecke [HC], wobei [AB] auf der Schrägbildachse und A links von B liegen soll. 4 P

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels DHC und die Länge der Strecke [HC].
[Teilergebnis: $\sphericalangle DHC = 50{,}19°$]

B 1.2 Der Punkt K liegt auf der Strecke [BF]. Die Strecke [EK] verläuft parallel zur Strecke [HC]. Punkte P_n liegen auf der Strecke [EK]. Die Winkel P_nAE haben das Maß φ mit $\varphi \in]0°;\ 56{,}31°]$. 1 P
Zeichnen Sie die Strecke [EK] sowie das Dreieck AP_1E für $\varphi = 15°$ in das Schrägbild zu B 1.1 ein.

B 1.3 Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[AP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt: 3 P

$$\overline{AP_n}(\varphi) = \frac{5{,}76}{\sin(\varphi + 50{,}19°)}\ \text{cm}.$$

Die Länge der Strecke $[AP_0]$ ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für φ an.

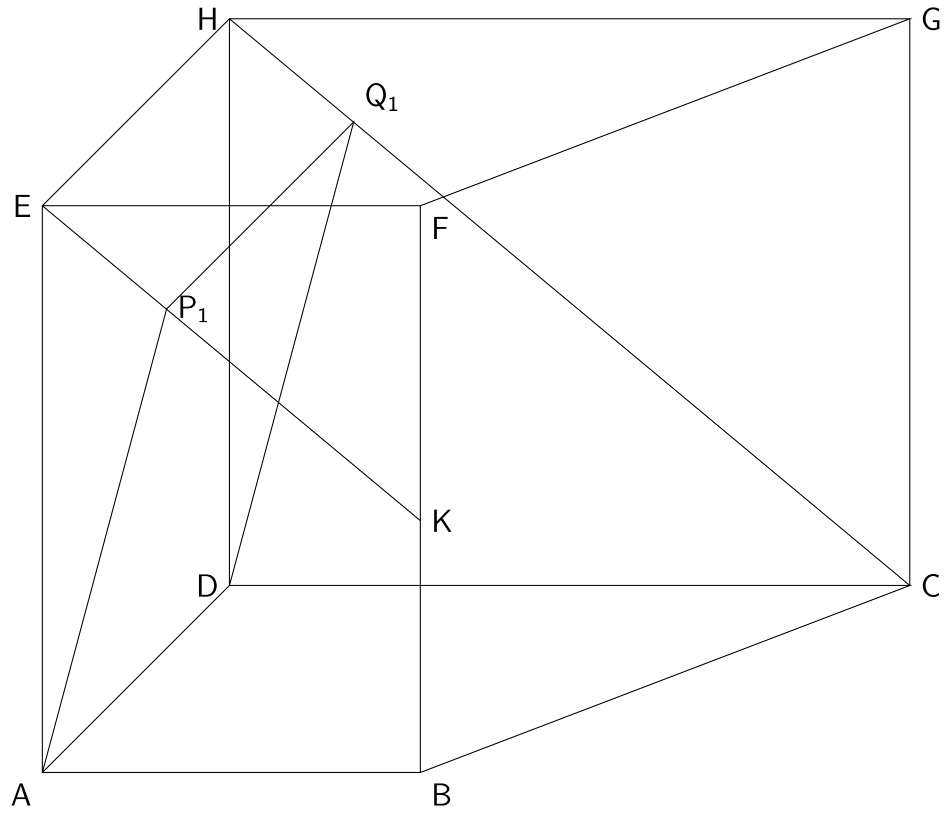
B 1.4 Für Punkte $Q_n \in [HC]$ gilt: $\overline{EP_n} = \overline{HQ_n}$. Die Dreiecke AP_nE sind die Grundflächen der Prismen AP_nEDQ_nH. 3 P
Zeichnen Sie das Prisma AP_1EDQ_1H in das Schrägbild zu B 1.1 ein.
Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen der Prismen AP_nEDQ_nH in Abhängigkeit von φ.

$$\left[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{151{,}2 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 50{,}19°)}\ \text{cm}^3\right]$$

B 1.5 Das Volumen des Prismas AP_2EDQ_2H ist um 70 % kleiner als das Volumen des Prismas ABCDEFGH. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ. 4 P

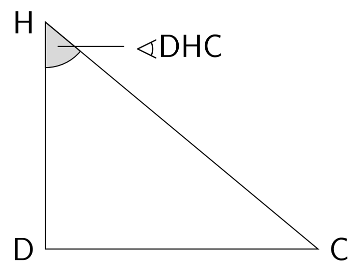
B 1.6 Bestätigen Sie durch Rechnung die obere Intervallgrenze für φ. 3 P

B 1.1 Zeichnen des Schrägbildes des Prismas ABCDEFGH mit der Strecke [HC]:
(**Hinweis:** Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu, da sie für den Buchdruck skaliert wurde.)



Weiterhin wird das Dreieck DCH betrachtet.

$$\tan \sphericalangle DHC = \frac{\overline{DC}}{\overline{DH}} \qquad \tan^{-1}(\ )$$
$$\Longleftrightarrow \quad \sphericalangle DHC = \frac{9}{7{,}5}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\sphericalangle DHC = 50{,}19^\circ}}$$



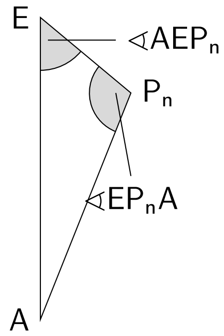
$$\overline{HC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DH}^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$\Longleftrightarrow \quad \overline{HC} = \sqrt{9^2 + 7{,}5^2}\,\text{cm}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\overline{HC} = 11{,}72\,\text{cm}}}$$

B 1.2 Einzeichnen der Strecke [EK] und des Dreiecks AP_1E: siehe Teilaufgabe 1.1.

B 1.3 Da $[EK] || [HC]$ ist, ist $\sphericalangle AEK = \sphericalangle DHC = 50{,}19^\circ$. Da alle Punkte P_n auf [EK] liegen, ist zudem $\sphericalangle AEP_n = \sphericalangle AEK = 50{,}19^\circ$. Da $\sphericalangle AEF$ ein rechter Winkel ist und wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck AP_nE gilt:

$$\begin{aligned}\sphericalangle EP_nA &= 180^\circ - \sphericalangle P_nAE - \sphericalangle AEP_n\\ &= 180^\circ - \varphi - 50{,}19^\circ\\ &= 129{,}81^\circ - \varphi\end{aligned}$$

Mit dem Sinussatz im Dreieck AP_nE gilt dann:



$$\frac{\overline{AP_n}}{\sin\sphericalangle AEP_n} = \frac{\overline{AE}}{\sin\sphericalangle EP_nA} \qquad |\cdot \sin\sphericalangle AEP_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{AP_n}(\varphi) = \frac{7{,}5}{\sin(129{,}81^\circ - \varphi)} \cdot \sin(50{,}19^\circ)\,\text{cm}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{AP_n}(\varphi) = \frac{5{,}76}{\sin(129{,}81^\circ - \varphi)}\,\text{cm}$$

Mit $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$ ergibt sich der gesuchte Zusammenhang:

$$\overline{AP_n}(\varphi) = \frac{5{,}76}{\sin(129{,}81^\circ - \varphi)}\,\text{cm} = \frac{5{,}76}{\sin(180^\circ - (129{,}81^\circ - \varphi))}\,\text{cm}) = \underline{\underline{\frac{5{,}76}{\sin(\varphi + 50{,}19^\circ)}\,\text{cm}}}$$

B 1.4 Zeichnen des Prismas AP_1EDQ_1H in das Schrägbild: Siehe Teilaufgabe 1.1.
Das Volumen des Prismas ergibt sich aus der Grundfläche des Dreiecks AP_nE und der Höhe $\overline{AD} = 7\,\text{cm}$.

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= A_{AP_nE} \cdot \overline{AD} \\ &= \left(\frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{AP_n} \cdot \sin\varphi\right) \cdot \overline{AD} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot \frac{5{,}76}{\sin(\varphi + 50{,}19^\circ)} \cdot \sin\varphi\right) \cdot 7\,\text{cm}^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{151{,}2 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 50{,}19^\circ)}\,\text{cm}^3}} \end{aligned}$$

B 1.5 Zunächst wird das Volumen des Prismas ABCDEFGH berechnet. Dieses ergibt sich aus der Grundfläche des Trapezes ABCD mit der Höhe $\overline{AE} = 7{,}5\,\text{cm}$ des Prismas.

$$\begin{aligned} V_{ABCDEFGH} &= \left(\frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{AD}\right) \cdot \overline{AE} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot (5 + 9) \cdot 7\right) \cdot 7{,}5\,\text{cm}^3 \\ &= 376{,}5\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen des Prismas AP_2EDQ_2H soll um 70 % kleiner sein, also $V_{AP_2EDQ_2H} = 0{,}3 \cdot 376{,}5\,\text{cm}^3 = 110{,}25\,\text{cm}^3$. Für diesen Wert wird der Winkel φ bestimmt:

$$V(\varphi) = 110{,}25\,\text{cm}^3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{151{,}2 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 50{,}19^\circ)} = 110{,}25 \qquad |:110{,}25$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1{,}3714 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 50{,}19^\circ)} = 1 \qquad |\cdot \sin(\varphi + 50{,}19^\circ)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1{,}3714 \cdot \sin\varphi = \sin(\varphi + 50{,}19^\circ)$$

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

Original-Abschlussprüfungen Mathematik I Realschule 10. Klasse Bayern 2021

- ✓ Original-Abschlussprüfungen 2013 - 2020
- ✓ Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- ✓ Ideal zur Vorbereitung auf einzelne Schulaufgaben geeignet
- ✓ Mit übersichtlicher Darstellung aller Themengebiete und Beispielen zur Vorbereitung auf die einzelnen Schulaufgaben
- ✓ Kostenloser Downloadbereich mit Übungen und Lösungen
- ✓ Mit Ferien- und Prüfungsplaner 2020/2021

Mathematik WPFG I Trainer für Realschule 2021

- Ideal für das SELBSTLERNEN ZU HAUSE geeignet -

Aus unserem Lernprogramm sind viele weitere Titel erhältlich!

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr.:
EAN 9783743000681

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

ISBN 978-3-7430-0068-1

€ 10,90

9 783743 000681 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de