13.
Klasse

FOS·BOS
Abitur Bayern 2021

Mathematik Nichttechnik

- Ideal für Homeschooling geeignet -

LehrplanPLUS

INKLUSIVE:
- ✓ Miniskript mit zusätzlichen Übungen nach jedem Themengebiet
- ✓ Prüfungsaufgaben angepasst an den neuen LehrplanPLUS
- ✓ Musterprüfungen im Stil der neuen Abi-Prüfung sowie
- ✓ kostenloser Downloadbereich per QR-Code

SCAN ME

FOS·BOS 13

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

lernverlag®
www.lern-verlag.de

2020 2021 Schuljahresplaner

September	Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli
1 Di	1 Do	1 So Allerheiligen	1 Di	1 Fr Neujahr	1 Mo 5	1 Mo 9	1 Do	1 Sa Tag der Arbeit	1 Di	1 Do
2 Mi	2 Fr	2 Mo 45	2 Mi	2 Sa	2 Di	2 Di	2 Fr Karfreitag	2 So	2 Mi	2 Fr
3 Do	3 Sa Tag der Dt. Einheit	3 Di	3 Do	3 So	3 Mi	3 Mi	3 Sa	3 Mo 18	3 Do Fronleichnam	3 Sa
4 Fr	4 So	4 Mi	4 Fr	4 Mo 1	4 Do	4 Do	4 So Ostern	4 Di	4 Fr	4 So
5 Sa	5 Mo 41	5 Do	5 Sa	5 Di	5 Fr	5 Fr	5 Mo Ostermontag 14	5 Mi	5 Sa	5 Mo 27
6 So	6 Di	6 Fr	6 So	6 Mi Heilige Drei Könige	6 Sa	6 Sa	6 Di	6 Do	6 So	6 Di
7 Mo 37	7 Mi	7 Sa	7 Mo 50	7 Do	7 So	7 So	7 Mi	7 Fr	7 Mo 23	7 Mi
8 Di	8 Do	8 So	8 Di	8 Fr	8 Mo 6	8 Mo 10	8 Do	8 Sa	8 Di	8 Do
9 Mi	9 Fr	9 Mo 46	9 Mi	9 Sa	9 Di	9 Di	9 Fr	9 So Muttertag	9 Mi	9 Fr
10 Do	10 Sa	10 Di	10 Do	10 So	10 Mi	10 Mi	10 Sa	10 Mo 19	10 Do	10 Sa
11 Fr	11 So	11 Mi	11 Fr	11 Mo 2	11 Do	11 Do	11 So	11 Di	11 Fr	11 So
12 Sa	12 Mo 42	12 Do	12 Sa	12 Di	12 Fr	12 Fr	12 Mo 15	12 Mi	12 Sa	12 Mo 28
13 So	13 Di	13 Fr	13 So	13 Mi	13 Sa	13 Sa	13 Di	13 Do Christi Himmelfahrt	13 So	13 Di
14 Mo 38	14 Mi	14 Sa	14 Mo 51	14 Do	14 So	14 So	14 Mi	14 Fr	14 Mo 24	14 Mi
15 Di	15 Do	15 So	15 Di	15 Fr	15 Mo Rosenmontag 7	15 Mo 11	15 Do	15 Sa	15 Di	15 Do
16 Mi	16 Fr	16 Mo 47	16 Mi	16 Sa	16 Di	16 Di	16 Fr	16 So	16 Mi	16 Fr
17 Do	17 Sa	17 Di	17 Do	17 So	17 Mi	17 Mi	17 Sa	17 Mo Deutsch 20	17 Do	17 Sa
18 Fr	18 So	18 Mi	18 Fr	18 Mo 3	18 Do	18 Do	18 So	18 Di BwR, IBV, Bio, Physik, PäPsy	18 Fr	18 So
19 Sa	19 Mo 43	19 Do	19 Sa	19 Di	19 Fr	19 Fr	19 Mo 16	19 Mi	19 Sa	19 Mo 29
20 So	20 Di	20 Fr	20 So	20 Mi	20 Sa	20 Sa	20 Di	20 Do Englisch	20 So	20 Di
21 Mo 39	21 Mi	21 Sa	21 Mo 52	21 Do	21 So	21 So	21 Mi	21 Fr Mathematik	21 Mo 25	21 Mi
22 Di	22 Do	22 So	22 Di	22 Fr	22 Mo 8	22 Mo 12	22 Do	22 Sa	22 Di	22 Do
23 Mi	23 Fr	23 Mo 48	23 Mi	23 Sa	23 Di	23 Di	23 Fr	23 So Pfingsten	23 Mi	23 Fr
24 Do	24 Sa	24 Di	24 Do Heiligabend	24 So	24 Mi	24 Mi	24 Sa	24 Mo Pfingstmontag 21	24 Do	24 Sa
25 Fr	25 So Ende der Sommerzeit	25 Mi	25 Fr 1. Weihnachtstag	25 Mo 4	25 Do	25 Do	25 So	25 Di	25 Fr	25 So
26 Sa	26 Mo 44	26 Do	26 Sa 2. Weihnachtstag	26 Di	26 Fr	26 Fr	26 Mo 17	26 Mi	26 Sa	26 Mo 30
27 So	27 Di	27 Fr	27 So	27 Mi	27 Sa	27 Sa	27 Di	27 Do	27 So	27 Di
28 Mo 40	28 Mi	28 Sa	28 Mo 53	28 Do	28 So	28 So Beginn der Sommerzeit	28 Mi	28 Fr	28 Mo 26	28 Mi
29 Di	29 Do	29 So 1. Advent	29 Di	29 Fr		29 Mo 13	29 Do	29 Sa	29 Di	29 Do
30 Mi	30 Fr	30 Mo 49	30 Mi	30 Sa		30 Di	30 Fr	30 So	30 Mi	30 Fr
	31 Sa Reformationstag		31 Do Silvester	31 So		31 Mi		31 Mo 22		31 Sa

Sonn- und Feiertage   Ferien   Abschlussprüfungen

Abiturprüfung Mathematik
Nichttechnik
13. Klasse
FOS | BOS Bayern
2021

erstellt

für Schülerinnen und Schüler der Beruflichen Oberschule nichttechnischer Zweig in Bayern.

Nach dem neuen LehrplanPLUS

www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler, liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

im Prüfungsbuch **Abiturprüfung Mathematik Nichttechnik FOS/BOS Bayern 13. Klasse 2021** sind die letzten drei zentral gestellten Original-Prüfungen der Jahre 2018 bis 2020 und eine Musterprüfung nach LehrplanPLUS enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2021 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **21.05.2021** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2020) Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neuerungen - Immer auf dem aktuellen Stand sein

Der aktuelle Band wurde mit einem **Miniskript** versehen und alte Prüfungsaufgaben nach LehrplanPLUS angepasst. Direkt nach jeder Aufgabengruppe einzelner Prüfungsjahrgänge wurde gleich die entsprechende Lösungen eingefügt. So kommt nach AI bspw. die Lösung AI, nach BI die Lösung BI usw.. Sie finden auf dem **Cover** einen **QR-Code**, der Sie auf die lernverlag Seite in den Downloadbereich führt. Dort finden Sie weitere Übungsaufgaben und Lösungen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, cleverlag und lern.de sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Dr. Michael Fuchs (Berufliche Oberschule Memmingen), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

6. überarb. Auflage © 2020 1.Druck
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0061-2
Artikelnummer:
EAN 9783743000612

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis

Seite

MINISKRIPT - Analytische Geometrie

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2021

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2021 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant:

- Aus LB 2: bestimmen anhand ausreichend vieler Informationen über eine gebrochen-rationale Funktion bzw. ihres Graphen einen geeigneten Funktionsterm, um damit weitere Eigenschaften des Graphen der betrachteten Funktion zu ermitteln
- Aus LB 2: berechnen uneigentliche Integrale 1. und 2.Art gebrochen-rationaler Funktionen, um damit Maßzahlen der Flächeninhalte von Flächen zu ermitteln, die in x-oder y-Richtung unbegrenzt sind, sofern diese existieren
- Aus LB 4: ermitteln Stammfunktionen von Funktionen, die sich auf die Form $x \mapsto e^{ax+b}$ oder $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ zurückführen lassen
- Aus LB 4: bestimmen mithilfe der partiellen Integration Stammfunktionen von Funktionen, deren Terme sich als Produkte darstellen lassen, insbesondere $x \mapsto x \cdot e^x$, $x \mapsto 1 \cdot \ln(x)$, $x \mapsto x \cdot \ln(x)$

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**" zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

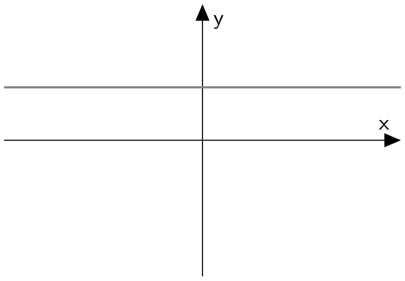
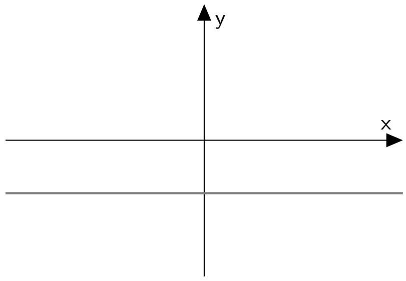
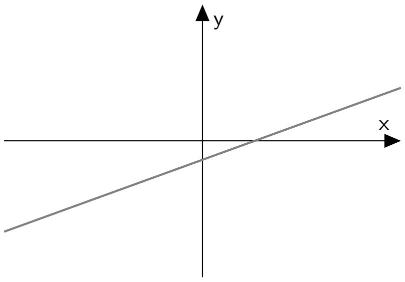
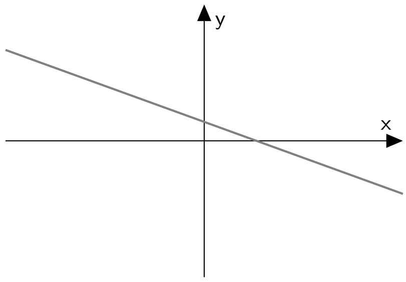
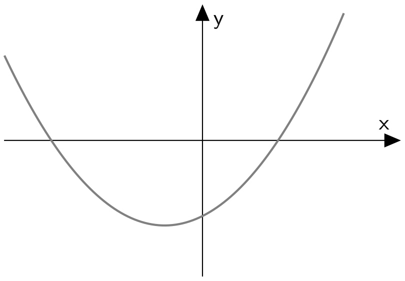
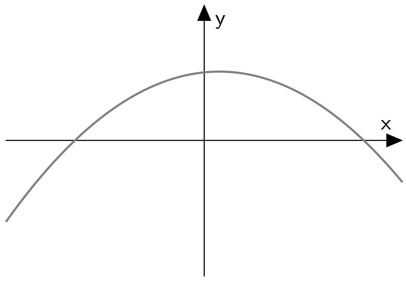
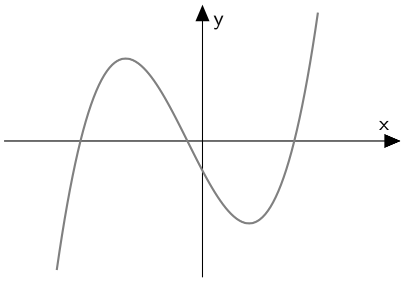
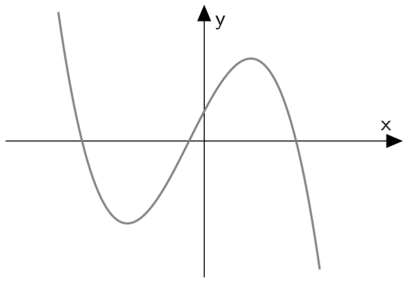
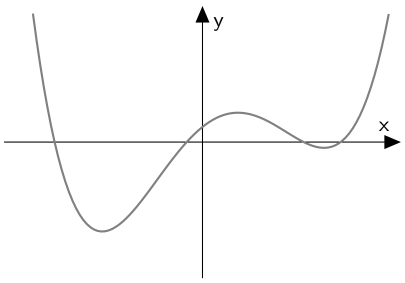
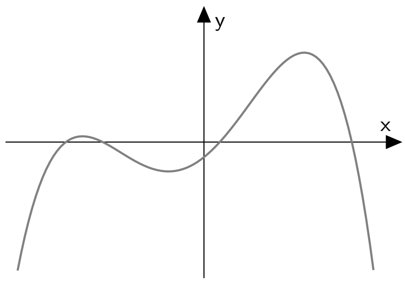
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan" zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**" der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
  - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte", „Steigungswerte" und „Krümmungswerte" definiert bzw. berechnet.
  - Funktionen kann man ableiten.
  - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**".
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, \ldots)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient" a niemals null sein darf. Dies ist „logisch", da ja der „namensgebende" Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**", die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich" sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
  - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über"– bzw. „unterhalb der x-Achse".
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**".

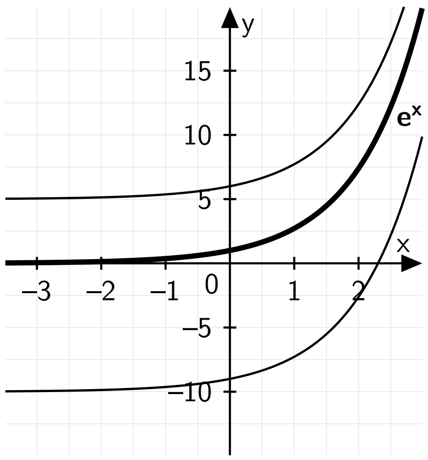
  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**"!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

<table>
<tr><th>Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung</th><th>dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen</th></tr>
<tr><td>Konstante Funktion
$f(x) = a$
mit $a \in \mathbb{R}$
Funktionsgrad: 0</td><td>Konstante Funktionsgleichung
$a = 0$
mit $a \in \mathbb{R}$
Keine „Werkzeuge“ notwendig</td></tr>
<tr><td>Lineare Funktion
$f(x) = ax + b$
mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
Funktionsgrad: 1</td><td>Lineare Funktionsgleichung
$ax + b = 0$
mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
- Äquivalenzumformung</td></tr>
<tr><td>Quadratische Funktion
$f(x) = ax^2 + bx + c$
mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
Funktionsgrad: 2</td><td>Quadratische Funktionsgleichung
$ax^2 + bx + c = 0$
mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
- Ausklammern ($c = 0$)
- Radizieren ($b = 0$)
- „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)</td></tr>
<tr><td>Kubische Funktion
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
Funktionsgrad: 3</td><td>Kubische Funktionsgleichung
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
- Ausklammern ($d = 0$)
- Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)</td></tr>
<tr><td>(Polynom)Funktion 4. Grades
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
Funktionsgrad: 4</td><td>Funktionsgleichung 4. Grades
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$
mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$
- Ausklammern ($e = 0$)
- Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
- Substitution ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)</td></tr>
</table>

mögliche Graphentypen für a $>$ 0	**mögliche** Graphentypen für a $<$ 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Einfluss des Parameters k für $e^x + k$
Der Parameter k bewirkt eine **Verschiebung** nach oben ($k > 0$) oder nach unten ($k < 0$) entlang der **y-Achse**.



Parameter im Überblick

Nachfolgend dargestellt im Überblick, welchen Einfluss die einzelnen Parameter in der Form

$$f(x) = a \cdot e^{c \cdot x + d} + k$$

auf den Verlauf des Graphen haben:

a	Stauchung ($\lvert a\rvert < 1$) oder Streckung ($\lvert a\rvert > 1$ entlang der y-Achse; für $a < 0$ wird der Graph zudem entlang der x-Achse gespiegelt
c	Stauchung ($\lvert c\rvert > 1$) oder Streckung ($\lvert c\rvert < 1$ entlang der x-Achse; für $c < 0$ wird der Graph zudem entlang der y-Achse gespiegelt
d	Verschiebung entlang der x-Achse nach links ($d > 0$) oder rechts ($d < 0$)
k	Verschiebung entlang der y-Achse nach oben ($k > 0$) oder unten ($k < 0$)

$\Rightarrow$ Extrempunkte und Monotonieverhalten

Nullstellen und Vorzeichentabelle **zweite** Ableitung

$\Rightarrow$ Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Für die Erstellung der Vorzeichentabelle ist es hilfreich, die jeweilige Ableitung in zwei Faktoren zu zerlegen, und dann für jeden einzeln und daraus resultierend für deren Produkt das Vorzeichenverhalten zu bestimmen.
In der nachfolgenden Box sind kompakt alle wichtigen Regeln für das Ableiten von e-Funktionen und verknüpfte Funktionen dargestellt.

Ableitungsregeln

e-Funktion allgemein: Die einfache e-Funktion abgeleitet ist die e-Funktion selbst:

$$(e^x)' = e^x$$

Summenregel: Ist die Funktion eine Summe, werden alle Summanden einzeln abgeleitet.

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) + h(x) && \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = e^x + 3 && \Rightarrow \quad f'(x) = (e^x)' + (3x)' = e^x + 3 \end{aligned}$$

Faktorregel: Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.

$$\begin{aligned} & f(x) = C \cdot g(x) && \Rightarrow \quad f'(x) = C \cdot g'(x)) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = 4 \cdot e^x && \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot (e^x)' = 4 \cdot e^x \end{aligned}$$

Kettenregel: Für verkettete Funktionen ist die Ableitung der Gesamtfunktion die Ableitung der inneren mal die Ableitung der äußeren Funktion.

$$\begin{aligned} & f(x) = g(h(x)) && \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = e^{-2x+4} && \Rightarrow \quad f'(x) = e^{-2x+4} \cdot (-2x+4)' = -2 \cdot e^{-2x+4} \end{aligned}$$

Produktregel: Ist die Funktion ein Produkt aus zwei einzelnen Funktionen, so gilt für deren Ableitung die Produktregel in der Form

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \cdot h(x) && \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = (x^2+3) \cdot e^x && \Rightarrow \quad f'(x) = (x^2+3)' \cdot e^x + (x^2+3) \cdot (e^x)' \\ & && \qquad\qquad = 2x \cdot e^x + (x^2+3) \cdot e^x = (x^2+2x+3) \cdot e^x \end{aligned}$$

All diese Regeln kommen bei der Berechnung der Ableitung in folgendem Beispiel zum Einsatz.
Abgeleitet werden soll die Funktion $f(x) = 4 \cdot (x^2+3x-7) \cdot e^{-2x-1} + 12$. Zuerst wird der Term als Summe betrachtet, wobei ein Summand die verkettete Funktion und der andere Summand die konstante Zahl 12 ist. Nach **Summenregel** gilt nun:

$$f'(x) = (4 \cdot (x^2+3x-7) \cdot e^{-2x-1} + 12)' = (4 \cdot (x^2+3x-7) \cdot e^{-2x-1})' + \overbrace{(12)'}^{=0}$$

Gebrochen-rationale Funktionen

Definition

Eine gebrochen-rationale Funktion ist eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

bei der es sich bei Z(x) (Zählerterm) und N(x) (Nennerterm) um ganzrationale Funktionen (Polynome) handelt. N(x) ist mindestens eine lineare Funktion oder N(x) muss unabhängig die Variable x enthalten.

Zählergrad (ZG) und Nennergrad (NG)

Bei Zähler- und Nennergrad handelt es sich jeweils um den höchsten Exponenten der Variable x, der im Zähler- oder Nennerpolynom auftritt. Dies ist an nebenstehendem Beispiel gezeigt. Zähler- und Nennergrad spielen unter anderem eine Rolle bei der Ermittlung von Asymptoten oder Grenzwerten.

ZG = 3

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 7}{2x^2 - 5x + 4}$$

NG = 2

Beispiel 1:

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 4}{x^3 + 3x^2 - 2x + 7}$ ist eine gebrochen-rationale Funktion mit Zählergrad ZG = 2 und Nennergrad NG = 3. Funktionen wie diese, für die **ZG < NG** gilt, werden als **echt gebrochen-rationale Funktionen** bezeichnet.

Beispiel 2:

Die Funktion $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$ ist eine gebrochen-rationale Funktion mit Zählergrad ZG = 2 und Nennergrad NG = 1. Funktionen wie diese, für die **ZG ≥ NG** gilt, werden als **unecht gebrochen-rationale Funktionen** bezeichnet. Eine solche kann per Polynomdivision stets in einen ganzrationalen und einen echt gebrochen-rationalen Teil aufgeteilt werden:

$$
\begin{array}{rlllcl}
 & (x^2 & +\,4x & +\,5) & : (x+3) = & \overbrace{x+1}^{\text{ganzrat.Teil}} + \overbrace{\dfrac{2}{x+3}}^{\text{echt gebr.rat.Teil}} \\
- & (x^2 & +\,3x &) & & \\
\hline
 & & x & +\,5 & & \\
 & - & (x & +\,3) & & \\
\hline
 & & & 2 & &
\end{array}
$$

Definitionsmenge und Definitionslücken

Da nie durch null geteilt werden kann, weist eine gebrochen-rationale Funktion bei den Nullstellen des Nennerterms Definitionslücken auf. Diese sind aus der Definitionsmenge auszuschließen. Dabei unterscheidet man zwei Arten von Definitionslücken:

- **Polstellen** (oder Unendlichkeitsstellen) mit oder ohne Vorzeichenwechsel (VZW)
  - mit VZW: links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht gleich ($-\infty$ und $+\infty$)
  - ohne VZW: links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich (beide $-\infty$ oder $+\infty$)
- **behebbare Definitionslücken**

Die Unterscheidung erfolgt über die Nullstellen von Zähler- und Nennerterm und ggf. deren Vielfachheit (VFH) gemäß folgender Übersicht:

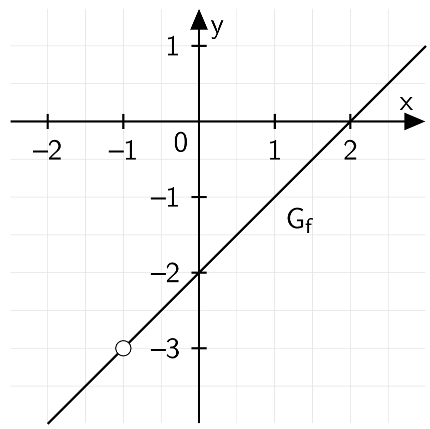
x_0 ist Nullstelle des...		
Zählerterms?	Nennerterms?	x_0 ist eine...
ja	nein	Nullstelle
nein	ja	Polstelle (siehe Bsp. 2)
ja	ja	**1. Fall:** behebbare Definitionslücke, genau dann, wenn VFH Zähler-NST$\geq$VFH Nenner-NST (siehe Bsp. 1) **2. Fall:** nicht behebbar, also Polstelle, wenn VFH Zähler-NST$<$VFH Nenner-NST (siehe Bsp. 3)

Beispiel 1:

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Gesucht ist die Nullstelle, D_f und Art der Definitionslücke.

Lösung

Wie beschrieben werden zunächst die Nullstellen des Zähler- und Nennerterms bestimmt:



$$\text{Zählerterm } Z(x): \quad x^2 - x - 2 = 0$$
$$0 = x^2 - x - 2$$
$$\Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2$$

$$\text{Nennerterm } N(x): \quad x + 1 = 0$$
$$0 = x + 1$$
$$\Rightarrow \quad x_3 = -1$$

Ableitungsregeln

Mithilfe von Ableitungen können wichtige Informationen wie beispielsweise das Monotonie- oder Krümmungsverhalten analysiert werden. Neben **Produktregel** und **Kettenregel**, die auch für viele andere Funktionstypen relevant sind, ist dabei für gebrochen-rationale Funktionen zusätzlich die **Quotientenregel** sehr wichtig.

Kettenregel

$$\begin{array}{rlcl} & f(x) = g(h(x)) & \Rightarrow & f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ \text{Bsp.:} & f(x) = e^{x^2} & \Rightarrow & f'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x \cdot e^{x^2} \end{array}$$

Produktregel

$$\begin{array}{rlcl} & f(x) = g(x) \cdot h(x) & \Rightarrow & f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ \text{Bsp.:} & f(x) = x^2 \cdot e^x & \Rightarrow & f'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \end{array}$$

Quotientenregel

$$\begin{array}{rlcl} & f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2} \\ \text{Bsp.:} & f(x) = \dfrac{e^x}{x} & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{x \cdot e^x - e^x}{x^2} \end{array}$$

Beispiel:

Es wird erneut die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 3}$ betrachtet, für welche die erste Ableitung gesucht ist.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 3} \\ f'(x) &= \left[\frac{(x^2 + 4x + 5)' \cdot (x + 3) - (x^2 + 4x + 5) \cdot (x + 3)'}{(x + 3)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{(2x + 4) \cdot (x + 3) - (x^2 + 4x + 5) \cdot 1}{(x + 3)^2} && \text{(Anwendung Quotientenregel)} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 6x + 12 - (x^2 + 4x + 5)}{(x + 3)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= \frac{x^2 + 6x + 7}{(x + 3)^2} \end{aligned}$$

Finden von Stammfunktionen

Die Stammfunktion einer gebrochen-rationalen Funktion kann grundsätzlich anhand einer der folgenden fünf Fälle gefunden werden (ausführliche Beispiele nachfolgend):

1. Der Funktionsterm ist von einfacher Struktur, d.h. im Nennerpolynom ist neben einem konstanten Faktor ausschließlich ein x, x^2, x^3...
   $\Rightarrow$ Term „auseinanderziehen“, kürzen und einzeln integrieren

Beispiel

Gesucht ist eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{3x^3 - 6x^2 + x - 1}{5x^2}$.

$$\text{„auseinanderziehen:“} \quad f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + x - 1}{5x^2} = \frac{3x^3}{5x^2} - \frac{6x^2}{5x^2} + \frac{x}{5x^2} - \frac{1}{5x^2}$$

$$\text{kürzen:} \quad f(x) = \frac{3x^{\cancel{3}1}}{5\cancel{x^2}} - \frac{6\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}} + \frac{\cancel{x}}{5x^{\cancel{2}1}} - \underbrace{\frac{1}{5x^2}}_{=\frac{1}{5}x^{-2}} = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5} + \frac{1}{5x} - \frac{1}{5}x^{-2}$$

$$\text{einzeln integrieren:} \quad F(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\mathbf{2}}x^{\mathbf{2}} - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5}\ln(|x|) - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(\mathbf{-1})} \cdot x^{\mathbf{-1}} = \frac{3}{10}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5}\ln(|x|) + \underbrace{\frac{1}{5}x^{-1}}_{=\frac{1}{5x}}$$

Finden von Stammfunktionen

2. Im Zählerterm ist eine konstante Zahl und im Nennerpolynom ein linearer Term (evtl. auch potenziert) vorhanden.
   $\Rightarrow$ Term zu Produkt mit negativer Potenz „umschreiben“, und integrieren

Beispiele

Gesucht sind die Stammfunktionen von $f(x) = \dfrac{-3}{4x-5}$ und $g(x) = \dfrac{-3}{(4x-5)^2}$.

„umschreiben“ : $f(x) = \dfrac{-3}{4x-5} = -3(4x-5)^{-1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{-3}{(4x-5)^2} = -3(4x-5)^2$

integrieren: $F(x) = -\dfrac{3}{\mathbf{4}}\ln(|\mathbf{4}x-5|)$ $\qquad G(x) = \dfrac{-3}{(\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{4}}(\mathbf{4}x-5)^{\mathbf{-1}} = \dfrac{3}{4(4x-5)}$

Finden von Stammfunktionen

3. Das Zählerpolynom ist die Ableitung oder ein Vielfaches des Nennerpolynoms.
   $\Rightarrow$ (falls nötig) geschicktes Umformen, sodass das Zählerpolynom genau die Ableitung des Nennerpolynoms ist; dann mit ln-Funktion integrieren

Beispiel

Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{3x-1}{3x^2-2x}$.

$$\text{geschickt umformen:} \quad f(x) = \frac{3x-1}{3x^2-2x} = \frac{\frac{1}{2}(6x-2)}{3x^2-2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6x-2}{3x^2-2x}$$

$$\text{mit ln-Funktion integrieren:} \quad F(x) = \frac{1}{2}\ln(|3x^2-2x|)$$

Vektoren

Vektoren

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ werden als Spaltenvektoren dargestellt und durch ihre Koordinaten beschrieben. Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein **Ortsvektor** entspricht dem Pfeil vom Koordinatenursprung zu einem bestimmten Punkt. Die Koordinaten des Ortsvektors ergeben sich aus den Koordinaten des Punktes. Beispiel:

$$\text{Punkt } P\,(\,3\,|\,2\,|\,6) \quad \Rightarrow \quad \text{Ortsvektor } \overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ein Pfeil, der zwei Punkte verbindet, repräsentiert einen Vektor zwischen diesen beiden Punkten. Die Koordinaten dieses Vektors ergeben sich aus den Koordinaten der beiden Punkte nach der Merkregel „Spitze minus Fuß“. Beispiel:

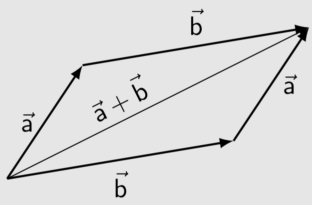
$$\text{Punkte } P\,(\,3\,|\,2\,|\,6) \text{ und } Q\,(\,4\,|\,-1\,|\,3) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Einfache Vektoroperationen

Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren und das Produkt eines Skalares (Zahl) mit einem Vektor wird jeweils komponentenweise berechnet:

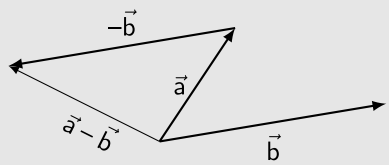
Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



Subtraktion von Vektoren

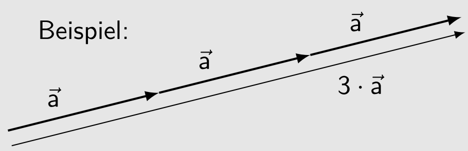
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel:



Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A\,(\,1\,|\,-2\,|\,4)$, $B\,(\,3\,|\,2\,|\,5)$ und der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die Koordinaten der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$, außerdem die Koordinaten von $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{b} - \vec{c}$ und $\vec{f} = 4 \cdot \vec{c}$.
Die Koordinaten der Ortsvektoren ergeben sich aus den Koordinaten der Punkte und der Verbindungsvektor gemäß der Merkregel „Spitze minus Fuß“:

$$A\,(\,1\,|\,-2\,|\,4) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad B\,(\,3\,|\,2\,|\,5) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die anderen Vektoren ergeben sich, indem die Operationen wie beschrieben immer komponentenweise ausgeführt werden:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -2+1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

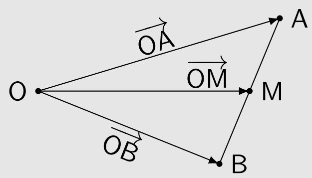
$$\vec{e} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ 2-1 \\ 5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = 4 \cdot \vec{c} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Besondere Ortsvektoren - Mittelpunkt einer Strecke

Für den Ortsvektor des Mittelpunktes M einer Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$



Beispiel

Gesucht sind die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke zwischen $A\,(\,1\,|\,-2\,|\,4)$ und $B\,(\,3\,|\,2\,|\,5)$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+3 \\ -2+2 \\ 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M\,(\,2\,|\,0\,|\,4{,}5)$$

2. Die Punkte $A(1 \mid -2 \mid 4)$, $B(3 \mid 2 \mid 5)$ und $C(-3 \mid 1 \mid -2)$ bilden ein Dreieck. Gesucht ist der exakte Wert dessen Flächeninhalt.
   Aus den Koordinaten der Punkte ergeben sich zwei Vektoren, die das Dreieck aufspannen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 1-(-2) \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

   Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt dann nach obiger Formel:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \cdot (-6) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-6) \\ 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -27 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-27)^2 + 8^2 + 22^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1277}\,[\text{FE}]$$

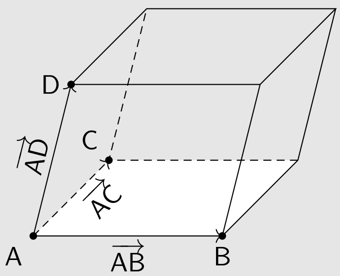
Spatprodukt

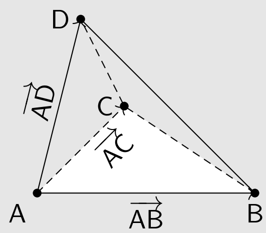
Das Spatprodukt von drei Vektoren ist ein gemischtes Produkt aus Skalar- und Vektorprodukt und wie folgt definiert:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Anwendung
Spannen drei Vektoren eine Pyramide oder einen Spat/Parallelepiped auf, so kann mithilfe des Spatprodukts dessen Volumen berechnet werden.

$$V_{Spat} = |\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| \qquad V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$$





<u>**Beispiel**</u>

Die Punkte $A(1 \mid 1 \mid 1)$, $B(-2 \mid 2 \mid 2)$, $C(-2 \mid 4 \mid 1)$ und $D(0 \mid 2 \mid 3)$ spannen eine Pyramide auf. Gesucht ist deren Volumen.
Zunächst werden die Koordinaten von drei Vektoren festgelegt, die die Pyramide aufspannen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus

Lineares Gleichungssystem

Ein System von mindestens zwei Gleichungen, die in Zusammenhang stehen und in denen die gleichen Unbekannten nur in erster Potenz vorkommen, wird als **lineares Gleichungssystem** bezeichnet. Beispiel (es ist üblich, die Gleichungen mit römischen Zahlen zu nummerieren):

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 3x + 2y - 3z = 3 \\ \text{II} & -1x - 4y + 7z = -1 \\ \text{III} & 2x + 1y + 2z = 5 \end{array}$$

Ein lineares Gleichungssystem kann entweder

- genau eine Lösung haben,
- keine Lösung haben oder
- unendlich viele Lösungen haben.

Gauß-Algorithmus

Für die Anwendung des Gauß-Algorithmus wird das Gleichungssystem in Form einer **erweiterten Koeffizientenmatrix** dargestellt. Für obiges Beispiel sieht diese wie folgt aus:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Mithilfe des Gauß-Algorithmus wird das Gleichungssystem in die sogenannte **Dreiecksform** gebracht. Dabei sind alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonale der Matrix null. Entsprechend der nachfolgenden Darstellung werden dafür die Einträge auf null gebracht. Dafür werden die einzelnen Zeilen oder deren Vielfache addiert/subtrahiert.

Hauptdiagonale

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Dreiecksform

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ \text{1. null} \rightarrow \\ \text{2. null} \rightarrow \\ \text{3. null} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Liegt die erweiterte Koeffizientenmatrix in Dreiecksform vor, können die Gleichungen zeilenweise aufgelöst werden.

Beispiele

1. Gesucht ist die Lösung des folgenden Gleichungssystems. Zunächst wird die erweiterte Koeffizientenmatrix erstellt:

$$\begin{array}{rrrrr} \mathrm{I} & 2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & = -2 \\ \mathrm{II} & -4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = 0 \\ \mathrm{III} & 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Die nächste Überlegung ist nun jeweils, wie man die einzelnen Einträge zu null umformen kann. Die erste null kann beispielsweise erhalten werden, indem zur zweiten Zeile das zweifache der ersten addiert wird. Mit analogen Überlegungen kann nun durch Umformung noch die zweite und die dritte null erhalten werden, sodass die Matrix in Dreiecksform vorliegt:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & 8 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} + 2 \cdot \mathrm{I} \\ 2 \cdot \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

Die beiden Zeilen mit der 0 als erstes Element werden mit II' und III' bezeichnet.

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ 6 \cdot \mathrm{III}' + 8 \cdot \mathrm{II}' \end{array}$$

Die Zeile mit der 0 als erstes und zweites Element wird mit III'' bezeichnet. Für deren Berechnung dürfen nur II' und III' verwendet werden, um die 0 an der ersten Position zu erhalten.

Nun liegt die Matrix in Dreiecksform vor. Gleichung III'' kann nun aufgelöst werden:

$$\begin{array}{rrcl} \text{aus } \mathrm{III}'' \Rightarrow & 4x_3 = 16 & & \mid : 4 \\ \Longleftrightarrow & \underline{x_3 = 4} & & \end{array}$$

Dieser Wert wird in Gleichung II' eingesetzt und wieder aufgelöst:

$$\begin{array}{rrl} x_3 \text{ in } \mathrm{II}' \Rightarrow & -6x_2 + 2 \cdot 4 = -4 & \mid -8 \\ \Longleftrightarrow & -6x_2 = -12 & \mid : (-6) \\ \Longleftrightarrow & \underline{x_2 = 2} & \end{array}$$

Schließlich werden beide Werte $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$ in Gleichung I eingesetzt:

$$\begin{array}{rrl} x_2; x_3 \text{ in I} \Rightarrow & 2x_1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = -2 & \\ \Longleftrightarrow & 2x_1 = -2 & \mid : 2 \\ \Longleftrightarrow & \underline{x_1 = -1} & \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat **genau eine Lösung** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$, also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ und die Ebene $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$.
   Gefragt ist nach der gegenseitigen Lage von g und F.
   Es kann komponentenweise in die Gleichung der Ebene eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} && x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 &= 0 \\ \Rightarrow && (-1+3\sigma) + (-1+\sigma) + 2(2-2\sigma) - 2 &= 0 \\ \Longleftrightarrow && -1 + 3\sigma - 1 + \sigma + 4 - 4\sigma - 2 &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 0 &= 0 \qquad \text{(wahre Aussage)} \end{aligned}$$

   Es ergibt sich unabhängig vom Wert von σ eine wahre Aussage, sodass die Gleichung unendlich viele Lösungen hat. Die Gerade g liegt demnach in der Ebene F.

Lagebeziehung Ebene-Ebene

Zwei Ebenen können...

... identisch sein,

... echt parallel liegen oder

... sich in einer Schnittgerade schneiden.

Die rechnerische Unterscheidung erfolgt wieder in Abhängigkeit der Form, in welcher die Ebenengleichungen vorliegen.

Beide Ebenengleichungen in Parameterform

Die rechten Seiten beider Gleichungen werden gleichgesetzt. Dadurch ergibt sich ein LGS mit drei Gleichungen und vier Unbekannten. Mithilfe des Gauß-Algorithmus wird dieses aufgelöst. Dabei können drei Fälle auftreten:

- Auftreten eines Widerspruch $\Rightarrow$ die Ebenen sind echt parallel
- man erhält eine Nullzeile $\Rightarrow$ die Ebenen sind identisch
- einer der Parameter einer Ebenengleichung lässt sich durch den anderen ausdrücken $\Rightarrow$ Schnittgerade

Eine Ebenengleichung in Parameterform, eine in Koordinatenform

Hier wird wieder komponentenweise in die Gleichung der Ebene in Koordinatenform eingesetzt. Somit entsteht eine Gleichung mit zwei Unbekannten.

- keine Lösung $\Rightarrow$ die Ebenen sind echt parallel
- unabhängig von den Parametern unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ die Ebenen sind identisch
- ein Parameter durch den anderen darstellbar $\Rightarrow$ Schnittgerade

Beide Ebenengleichungen in Koordinatenform

Es wird ein LGS mit den beiden Gleichungen angesetzt und mit dem Gauß-Algorithmus umgeformt.

- Auftreten eines Widerspruch $\Rightarrow$ die Ebenen sind echt parallel
- man erhält eine Nullzeile $\Rightarrow$ die Ebenen sind identisch
- eine Variable bleibt frei wählbar $\Rightarrow$ Schnittgerade

Beispiele

1. Gegeben sind die Ebenen $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\10\end{pmatrix}$ und $F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-9\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}-8\\-6\\2\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu,\sigma,\tau \in \mathbb{R}$. Gefragt ist die gegenseitige Lage der beiden Ebenen.
Die rechten Seiten der Gleichungen werden gleichgesetzt, woraus sich Zeilenweise drei Gleichungen ergeben:

$$\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-9\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}-8\\-6\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 6-2\lambda+2\mu = 2+1\sigma-8\tau \\ \text{II} & 2-1\lambda+0\mu = 0+2\sigma-6\tau \\ \text{III} & 4-3\lambda+10\mu = -2-9\sigma+2\tau \end{array} \iff \begin{array}{ll} \text{I} & -2\lambda+2\mu-1\sigma+8\tau = -4 \\ \text{II} & -1\lambda+0\mu-2\sigma+6\tau = -2 \\ \text{III} & -3\lambda+10\mu+9\sigma-2\tau = -6 \end{array}$$

An dieser Stelle kann der Gauß-Algorithmus verwendet werden:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\lambda & \mu & \sigma & \tau\end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{r}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & -1 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ -3 & 10 & 9 & -2 & -6 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r}\\\text{II}'\\\text{III}'\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & -1 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 14 & 21 & -28 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}\\ 2\cdot\text{II}-\text{I} \\ 2\cdot\text{III}-3\cdot\text{I}\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r}\\\\\text{III}''\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & -1 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}\\\\ \text{III}+2\cdot\text{II}\end{array}$$

Es ergibt sich eine Nullzeile. Gemäß obiger Übersicht sind die Ebenen also identisch.

2. Gegeben sind nun die Ebenen $E\colon 3x_1 - 6x_2 + 6 = 0$ und $F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Gefragt ist, ob sich die Ebenen schneiden. Für diesen Fall ist eine Gleichung der Schnittgeraden s gesucht.
Es kann komponentenweise in die Gleichung E eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rrcll} & 3x_1-6x_2+6 &=& 0 & \\ \Rightarrow & 3(1+3\lambda+\mu)-6(3-\mu)+6 &=& 0 & \\ \iff & 3+9\lambda+3\mu-18+6\mu+6 &=& 0 & \\ \iff & 9\lambda+9\mu-9 &=& 0 & \mid -(9\mu-9) \\ \iff & 9\lambda &=& -9\mu+9 & \mid :9 \\ \iff & \lambda &=& -\mu+1 & \end{array}$$

Der Parameter λ kann also durch μ dargestellt werden. Laut der Übersicht schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgeraden. Um eine Gleichung dieser zu erhalten, setzt man $\mu = \sigma$ und daraus resultierend $\lambda = -\sigma + 1$ in die Gleichung der Ebene F ein:

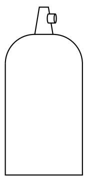
$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix} + (-\sigma+1)\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3(-\sigma+1)+\sigma\\3-\sigma\\7+2(-\sigma+1)+\sigma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2\sigma\\3-\sigma\\9-\sigma\end{pmatrix}$$

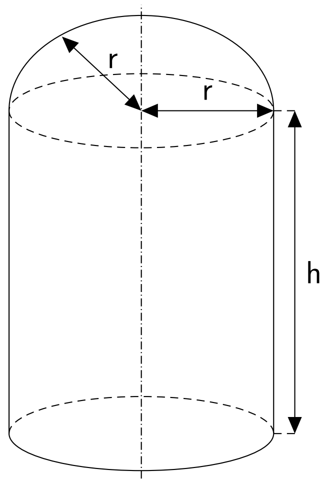
2.1 Aus der Gleichung der schiefen Asymptote können $\lim\limits_{x\to\infty}(h(x) - (0{,}25x + 0{,}75))$ und $\lim\limits_{x\to\infty} h'(x)$ gefolgert werden. Geben Sie diese Grenzwerte an und begründen Sie Ihre Ergebnisse. **4 BE**

2.2 Für diese Teilaufgabe gilt $x > 1$. Lesen Sie aus der Abbildung die Lösungsmenge der Ungleichung $h(x) < 2$ ab. **2 BE**

2.3 Bestimmen Sie die Parameter a und b und geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion h an. **3 BE**

2.4 Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = \ln(h(x))$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_k \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_k. Geben Sie die Definitionsmenge D_k von k und die Gleichungen der senkrechten Asymptoten von G_k an. **4 BE**

3.0  In hochwertigen Edelstahlfläschchen sollen jeweils $100\,\text{cm}^3$ Parfüm abgefüllt werden. Die Form des Fläschchens ist durch einen geraden Kreiszylinder mit einer oben aufgesetzten Halbkugel vorgegeben. Die Aussparung für den Sprühkopf wird nicht berücksichtigt. Für die Oberfläche O (in cm^2) des Fläschchens in Abhängigkeit von seinem Radius r (in cm) erhält man die Funktionsgleichung $O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}$ mit der Definitionsmenge $D_O =]0; 3{,}5]$. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.



3.1 Bestimmen Sie das Verhalten von $O(r)$ für $r \to 0$. **2 BE**

3.2 Berechnen Sie den Radius r, für den die Oberfläche O den absolut kleinsten Wert annimmt, und bestätigen Sie, dass $O_{min} \approx 112{,}23\,(\text{cm}^2)$ gilt. **7 BE**

3.3 Erstellen Sie für $1 \leq r \leq 3{,}5$ eine Wertetabelle mit der Schrittweite $\Delta r = 0{,}5$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion O in ein Koordinatensystem im angegebenen Bereich. Wählen Sie hierfür einen geeigneten Maßstab. **5 BE**

3.4 Der Parfümhersteller möchte aus optischen Gründen den Radius $r = 2\,(\text{cm})$ wählen. Berechnen Sie dafür den Mehrbedarf an Edelstahlblech im Vergleich zu O_{min} in Prozent. Begründen Sie stichhaltig, dass für alle Radien mit $r \in [2; 3{,}5]$ weniger als 10 % Mehrbedarf an Blech im Vergleich zu O_{min} benötigt werden. **5 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-0,5x} = (x+1)(x-3)e^{-0,5x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 **Nullstellen**

Anhand der faktorisierten Form $f(x) = (x+1)(x-3)e^{-0,5x}$ können die Nullstellen direkt abgelesen werden, da die Funktion den Wert null annimmt, wenn einer der Faktoren null wird. Die Nullstellen liegen bei $\underline{\underline{x_1 = -1}}$ und $\underline{\underline{x_2 = 3}}$.

Verhalten der Funktionswerte für x $\to \pm\infty$

Es wird eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt:

$$x \to -\infty: f(x) = \underbrace{(x^2 - 2x - 3)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-0,5x}^{\to+\infty}}}_{\to\infty} \to +\infty$$

$$x \to \infty: f(x) = \underbrace{\underbrace{(x^2 - 2x - 3)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\to 0^+}}_{\to 0} \to 0^+ (\text{ da e-Fkt. dominiert})$$

1.2 Um die Extrempunkte der Funktion zu finden wird zunächst mithilfe der Ketten- und Produktregel die erste Ableitung ermittelt:

Ermitteln der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2 - 2x - 3)e^{-0,5x} \\
f'(x) &= \left[(x^2 - 2x - 3)' \cdot e^{-0,5x} + (x^2 - 2x - 3) \cdot (e^{-0,5x})'\right] && \text{(Ansatz Produkt-/Kettenregel)} \\
&= (2x - 2)e^{-0,5x} + (x^2 - 2x - 3) \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) && \text{(Anwendung Produkt-/Kettenregel)} \\
&= (2x - 2)e^{-0,5x} + (-0,5x^2 + x + 1,5)e^{-0,5x} && \text{((}e^{-0,5x}\text{) ausklammern)} \\
&= (-0,5x^2 + 3x - 0,5)e^{-0,5x} && \text{((–0,5) ausklammern)} \\
&= -0,5(x^2 - 6x + 1)e^{-0,5x} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Ermitteln der Punkte mit waagrechter Tangente

Eine waagrechte Tangente liegt vor, wenn die erste Ableitung den Wert null annimmt. Da die Exponentialfunktion nie den Wert null annimmt gilt also:

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\Rightarrow \quad & x^2 - 6x + 1 = 0 \\
\Rightarrow \quad & x_{3;4} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad & x_{3;4} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{8}}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad & x_{3;4} = 3 \pm \sqrt{8} \\
\Longleftrightarrow \quad & x_3 \approx 0,17 \quad \text{und} \quad x_4 \approx 5,83
\end{aligned}$$

Zudem werden die Funktionswerte an diesen Stellen ermittelt:

$f(0,17) = (0,17^2 - 2 \cdot 0,17 - 3)e^{-0,5 \cdot 0,17} \approx -3,04 \qquad f(5,83) = (5,83^2 - 2 \cdot 5,83 - 3)e^{-0,5 \cdot 5,83} \approx 1,05$

Art und Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente

Um zu ermitteln um welche Art von Punkt es sich bei den Punkten mir waagrechter Tangente handelt, wird eine Monotonietabelle erstellt:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \dfrac{x^3-3x^2+4}{2(x-3)(x-2)}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2;3\}$.

1.1 Ermitteln Sie die Art der beiden Definitionslücken. **4 BE**

1.2 Zeigen Sie, dass gilt: $(x^3-3x^2+4):(x-2) = x^2-x-2$.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen. **4 BE**

1.3.0 Im Folgenden wird die Funktion $g\colon x \longmapsto \frac{1}{2}x+1+\dfrac{2}{x-3}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ betrachtet. Ihr Graph heißt G_g.

1.3.1 Stellen Sie durch geeignete Umformung den Zusammenhang zwischen den Funktionen f aus 1.0 und g aus 1.3.0 her. Geben Sie die Bedeutung der Funktion g für die Funktion f an.
(**Hinweis:** Die Bedeutung der Funktion g für die Funktion f ist nicht mehr relevant nach LehrplanPLUS. Die Umformung im ersten Teil der Aufgabe kann dennoch berechnet werden.) **3 BE**

1.3.2 Geben Sie Nullstellen von g und die Gleichungen sowie die Art der Asymptoten des Graphen G_g an. **3 BE**

1.3.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion g und geben Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_g an.
[mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2}$] **7 BE**

1.3.4 Zeichnen Sie G_g mit seinen Asymptoten für $-2 \le x \le 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. **5 BE**

1.3.5 Bestimmen die Wertemenge der Ableitungsfunktion g'. **3 BE**

1.3.6 Der Graph G_g schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein.
Berechnen Sie die Maßzahl dessen Flächeninhalts. **4 BE**

2.0 Betrachtet wird nun die Funktion $h\colon x \longmapsto \ln(2\cdot g(x))$ in der Definitionsmenge $D_h =]-1;\,2[\,\cup\,]3;\,\infty[$, wobei g(x) der Funktionsterm aus Teilaufgabe 1.3.0 ist. Der Graph von h heißt G_h.

2.1 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte h(x) bei Annäherung an die Grenzen der Definitionsmenge. **4 BE**

2.2 Zeigen Sie, dass für die Wertemenge von h gilt: $W_h = \mathbb{R}\setminus\,]0;\,\ln(9)[$. Verwenden Sie dazu auch die bisherigen Ergebnisse von Aufgabe 1.3 und Aufgabe 2.1. **4 BE**

3.0 Zur Bekämpfung von Schädlingsfliegen werden auf einer Insel unfruchtbare Fliegen-Männchen ausgesetzt. Im Folgenden wird die gesamte Fliegenpopulation p in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ durch $p(t) = 10 \cdot e^{-0{,}002t^2+0{,}06t+c}$ mit $c \in \mathbb{R}$ modelliert. Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt, zu dem die Kiste mit den unfruchtbaren Fliegen-Männchen geöffnet wird. Die Population p wird in Millionen Stück und die Zeit t in Tagen angegeben. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden.

3.1 Beim Öffnen der Kiste beträgt die Gesamtpopulation inklusive der ausgesetzten Männchen 6,38 Millionen Fliegen. Berechnen Sie den Wert des Parameters c auf zwei Nachkommastellen gerundet.

[Ergebnis: $c = -0{,}45$] **2 BE**

3.2 Zeigen Sie, dass die Population nach einigen Tagen ihren absoluten Höchststand erreicht. Bestimmen Sie diesen Höchststand und den dazugehörigen Zeitpunkt.

[mögliches Teilergebnis: $\dot{p}(t) = (0{,}6 - 0{,}04t) \cdot e^{-0{,}002t^2+0{,}06t-0{,}45}$] **4 BE**

3.3 Zum Zeitpunkt $t_W = 30{,}81$ (Tage) weist die Funktion p eine Wendestelle auf (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Differenz $p(t_W + 0{,}5) - p(t_W - 0{,}5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. **3 BE**

3.4 Zeichnen Sie für $0 \leq t \leq 60$ auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von p. Erreicht p den Wert 0,5 Millionen, gelten die Fliegen als ausgerottet. Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt näherungsweise aus Ihrer Zeichnung.

Maßstab auf der t-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 5$ Tage,
Maßstab auf der p-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1$ Million Fliegen. **6 BE**

3.5 Die durchschnittliche Population $\bar{p}$ über einen Zeitraum $[t_1;\, t_2]$ beträgt $\bar{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$.

Im Folgenden soll $\bar{p}$ über den Zeitraum [15; 35] geschätzt werden: Markieren Sie dazu ein geeignetes Flächenstück in der Zeichnung aus Teilaufgabe 3.4. Schätzen Sie die Maßzahl A dieses Flächenstücks aus der Zeichnung heraus ab und berechnen Sie damit einen Näherungswert für $\bar{p}$. **4 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{2(x-3)(x-2)}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2;3\}$.

1.1 **Art der Definitionslücken**
Die Definitionslücken $x = 2$ und $x = 3$ entsprechen den Nullstellen des Nennerpolynoms. Um die Art der Definitionslücken festzulegen werden die Werte des Zählerpolynoms $Z(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ an diesen Stellen untersucht:
<u>$x = 2$:</u>

$$Z(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$$

Bei $x = 2$ handelt es sich demnach um eine Nullstelle des Zählerpolynoms. Dementsprechend liegt hier eine **stetig behebbare** Definitionslücke vor, da die NST des Nennerpolynoms von einfacher Vielfachheit ist.

<u>$x = 3$:</u>

$$Z(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 4$$

Das Zählerpolynom hat demnach an dieser Stelle keine Nullstelle. Da zudem eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms vorliegt, handelt es sich hierbei also um eine **Polstelle mit Vorzeichenwechsel**.

1.2 **Nachweis der gegebenen Gleichung**
Um die Gleichung nachzuweisen wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{rllll}
 & (x^3 & -3x^2 & & +4) : (x-2) = x^2 - x - 2 \qquad \text{q.e.d} \\
- & (x^3 & -2x^2 & &) \\
\hline
 & & -x^2 & & +4 \\
 & -(& -x^2 & +2x &) \\
\hline
 & & & -2x & +4 \\
 & & -(& -2x & +4) \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}$$

Nullstellen
Mögliche Nullstellen der Funktion liegen bei den Nullstellen des Zählerpolynoms. Gemäß der Polynomdivision gilt: $x^3-3x^2+4x = (x-2)\cdot(x^2-x-2)$, und somit kann bereits eine Nullstelle des Zählerpolynoms $x_1 = 2$ abgelesen werden. Die beiden weiteren Nullstellen des Zählerpolynoms werden mit der quadratischen Lösungsformel bestimmt:

$$\begin{aligned}
& x^2 - x - 2 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x_{2;3} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
\Longleftrightarrow\quad & x_{2;3} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\
\Longleftrightarrow\quad & x_{2;3} = \frac{1 \pm 3}{2} \\
\Longleftrightarrow\quad & x_2 = -1 \quad \text{und} \quad x_3 = 2
\end{aligned}$$

Zusätzlich muss jedoch der Definitionsbereich beachtet werden, denn es gilt $x_1 = x_3 = 2 \notin D_f$. Somit liegt die einzige Nullstelle der Funktion f bei $\underline{\underline{x_2 = -1}}$.

1.3.0 Untersucht wird nun die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}$ mit $D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

1.3.1 **Zusammenhang zwischen den Funktionstermen**

Zunächst wird ausgehend vom Funktionsterm von f(x) die in Aufgabe 1.2 nachgewiesene Relation verwendet:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{2(x-3)(x-2)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 - x - 2)}{2(x-3)\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x-3}$$

Für den so entstandenen Bruch kann nun eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$\begin{array}{rlll}
 & (x^2 & - x & - 2) : (x-3) = x + 2 + \frac{4}{x-3} \\
- & (x^2 & - 3x &) \\
\hline
 & & 2x & - 2 \\
 & - & (2x & - 6) \\
\hline
 & & & 4
\end{array}$$

Damit gilt schließlich:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x-3} = \frac{1}{2}\left(x + 2 + \frac{4}{x-3}\right) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3} = g(x) \qquad \text{q.e.d}$$

1.3.2 **Nullstellen**

Da es sich bei g(x) um die stetige Fortsetzung von f(x) handelt und nun auch $2 \in D_g$ gilt, ergeben sich die Nullstellen aus den Ergebnissen der letzten Teilaufgaben zu $\underline{\underline{x_1 = 2}}$ und $\underline{\underline{x_2 = -1}}$.

Gleichung und Art aller Asymptoten

Die Gleichungen können direkt aus der gegebenen Form des Funktionsterms von g(x) abgelesen werden. Aus dem ganzrationalen Teil $\frac{1}{2}x+1$ ergibt sich die Gleichung einer **schiefen Asymptote** $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + 1}}$. Aus dem echt gebrochenrationalen Teil $\frac{2}{x-3}$ des Funktionsterms folgt aus der Nullstelle des Nennerpolynoms zudem die Gleichung einer **senkrechten Asymptote** $\underline{\underline{x = 3}}$.

1.3.3 Zur Bestimmung der Monotonieintervalle wird zunächst u. a. mithilfe der Kettenregel die erste Ableitung ermittelt:

Ermitteln der ersten Ableitung

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3} = \frac{1}{2}x + 1 + 2 \cdot (x-3)^{-1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1)(x-3)^{-2} \cdot 1 \qquad \text{(Anwendung Kettenregel)}$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \cdot (x-3)^{-2} \qquad \text{(Umformen und Zusammenfassen)}$$

1.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

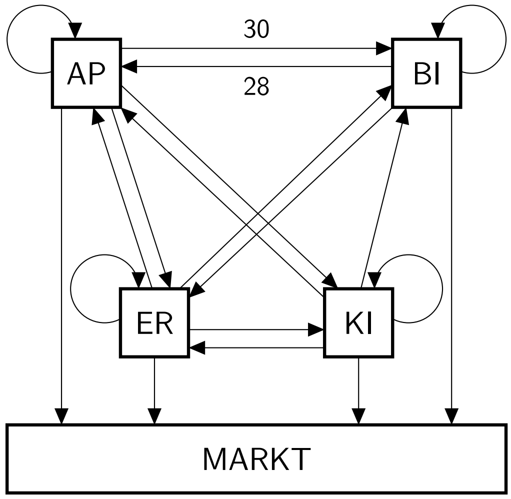
Apfelbauer AP, Birnenbauer BI, Kirschenbauer KI und Erdbeerbauer ER sind vier Obstbauern vom Bodensee, die untereinander die Obstsorten tauschen, um jeweils in ihrem Hofladen den Kunden verschiedene, gemischte Obstkisten anbieten zu können.

1.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Die vier Bauern sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden. Die Inputmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}7 & 0 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Die Gesamtproduktion von KI beträgt 200 ME (Mengeneinheiten), diejenige von ER 600 ME.



Übertragen Sie nebenstehendes Verflechtungsdiagramm auf Ihren Bearbeitungsbogen, berechnen Sie alle fehlenden Zahlenwerte und tragen Sie diese in Ihr Diagramm ein. (7 BE)

1.2.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Nach der Erdbeer-Saison steigt der Bauer ER aus dem gemeinsamen Tausch aus, während AP, BI und KI weiter zusammenarbeiten. Für die neue, veränderte Inputmatrix A^* gilt:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

1.2.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Die Produktionszahlen ändern sich zum Saisonende und werden durch den Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 700 + 2k \\ 600 \\ 150 - k \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}_0^+$ dargestellt.

Berechnen Sie die Produktionsmengen der Bauern, wenn BI 124 ME an den Markt abgibt. (4 BE)

1.2.2 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Nach strukturellen Veränderungen in den Betrieben kalkulieren die Bauern AP, BI und KI für die kommende Saison eine Marktabgabe von 351 ME an Äpfeln, 157 ME Birnen und 76 ME Kirschen.

Bestimmen Sie die Mengen an Obst, die die Bauern bei gleichbleibender Verflechtung jeweils produzieren müssten, um die Konsummengen zu erreichen. (5 BE)

2.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(2\,|\,2\,|\,-1)$, $B(0\,|\,-2\,|\,1)$ und $C_k(k\,|\,-2+k\,|\,-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

2.1 Die Punkte A und B legen die Gerade g fest, die Punkte C_k liegen auf der Geraden h. Geben Sie jeweils eine Gleichung der beiden Geraden an und untersuchen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden. **6 BE**

2.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt $k = -3$. Es ergibt sich $C_{-3}(-3\,|\,-5\,|\,3)$.

2.2.1 Die Punkte A, B und C_{-3} legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.

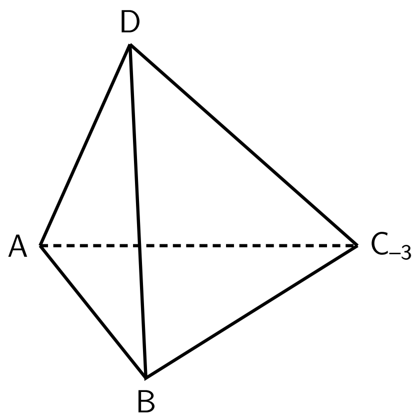
[mögliches Teilergebnis: $E: x_1 + x_2 + 3x_3 - 1 = 0$] **5 BE**

2.2.2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebene E mit der Ebene

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $r, t \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden. **3 BE**

2.2.3 Die Punkte A, B, C_{-3} und $D(3\,|\,5\,|\,5)$ legen ein Tetraeder fest (siehe Skizze).

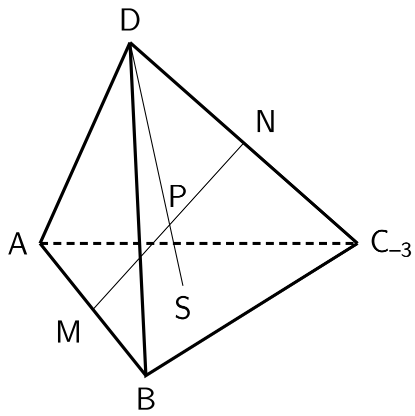
Spiegelt man den Punkt C_{-3} am Punkt D, so erhält man den Punkte C^*_{-3}. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C^*_{-3}. **2 BE**



2.2.4 Der Punkt C^*_{-3} liegt in der Ebene F (Nachweis nicht erforderlich). Eine der Seitenflächen des Tetraeders liegt ganz in der Ebene F. Entscheiden Sie, welche der Flächen das ist und begründen Sie Ihre Entscheidung. **2 BE**

2.2.5 Der Punkt $S\left(-\frac{1}{3}\,\middle|\,-\frac{5}{3}\,\middle|\,1\right)$ ist Schwerpunkt des Dreiecks ABC_{-3}, der Punkt M ist Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$ und der Punkt N ist Mittelpunkt der Kante $\overline{DC_{-3}}$. Die Gerade MN und die Gerade DS schneiden sich im Punkt P.

Berechnen Sie Koordinaten des Punktes P. **6 BE**



1.0 Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS

1.1 Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS

1.2.0 Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS

1.2.1 Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS

1.2.2 Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS

2.0 Gegeben sind die Punkte $A(2|2|-1)$, $B(0|-2|1)$ und $C_k(k|-2+k|-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

2.1 **Gleichungen der Geraden**
Die Punkte A und B legen die Gerade g fest:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ -2-2 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung der Geraden h folgt direkt aus den Koordinaten der Punkte C_k:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OC_k} = \begin{pmatrix} k \\ -2+k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Untersuchen der gegenseitigen Lage
Beim Richtungsvektor von h, sind x_1- und x_2-Komponente gleich, die des Richtungsvektors von g unterscheiden sich jedoch. Die beiden Richtungsvektoren können somit keine Vielfachen voneinander sein und die Geraden somit nicht parallel verlaufen. Um den rechnerischen Nachweis zu erbringen, wird untersucht, ob die Richtungsvektoren $\vec{u}_g$ und $\vec{u}_h$ der Geraden g und h Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus Zeile I folgt $\mu = -2$, aus Zeile II jedoch $\mu = -4$, es ergibt sich ein Widerspruch. Die Richtungsvektoren und damit auch die Geraden liegen also nicht parallel.

Weiterhin müssen die Geraden auf einen Schnittpunkt untersucht werden, indem die Geradengleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Big| - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebenenschar $F_{a;b}: ax_1 + bx_2 + 2x_3 - 2 = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Ebene E schneidet die x_1-Achse bei $x_1 = 2$ und die anderen beiden Achsen bei $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$.

1.1 Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und in Koordinatenform.
[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$] **5 BE**

1.2 Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebenen $F_{a;b}$ im Koordinatensystem in Abhängigkeit von a und b. **3 BE**

1.3.0 Für $a = b = 1$ ergibt sich die Ebene $F_{1,1}$, im Folgenden Ebene F genannt.

1.3.1 Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden h. Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

[mögliches Ergebnis: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$] **3 BE**

1.3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Ebene F mit der x_2-Achse. Zeichnen Sie die Ebenen E und F sowie die Schnittgerade h in ein Koordinatensystem. **4 BE**

1.4.0 Ferner ist die Geradenschar $g_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} c-1 \\ 1+c \\ -c \end{pmatrix}$ mit $c, m \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.4.1 Zeigen Sie, dass es einen Wert für c gibt, für den die zugehörige Gerade g_c echt parallel zur Geraden h verläuft. **3 BE**

1.4.2 Untersuchen Sie die Lage der Geraden g_c zur Ebene E in Abhängigkeit von c. **4 BE**

2.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Die Wirtschaftssektoren U, V und W sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden.

Es gilt die Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}05 \cdot t & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}55 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 20$, $t \in \mathbb{R}$.

2.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Im 1. Quartal des Jahres produzierte Sektor U 1000 ME (Mengeneinheiten) seiner Waren und gab davon 4 % an den Markt ab. Sektor W produzierte 500 ME und Sektor V gab 10 ME an den Markt ab. Bestimmen Sie die Gesamtproduktion von Sektor V, die Marktabgabe von Sektor W sowie den passenden Wert für t. (6 BE)

2.2.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Für die folgenden Teilaufgaben gilt $t = 11$.

2.2.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Im folgenden Quartal ist die Marktabgabe $\vec{y} = (40\ 14\ 41)^T$ geplant. Berechnen Sie die Produktionszahlen der drei Sektoren für dieses Quartal. (5 BE)

2.2.2 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Im nächsten Quartal produziert Sektor U 1120 ME. Die Produktionsmengen von V und W verhalten sich wie 2:1. Jeder der drei Sektoren gibt mindestens 8 ME an den Markt ab. Untersuchen Sie für die Sektoren V und W, in welchem Bereich sich die jeweiligen Produktionszahlen bewegen, und geben Sie den Bereich der Marktabgabe von Sektor U an. (7 BE)

1.0 Gegeben ist die Ebenenschar $F_{a;b}: ax_1 + bx_2 + 2x_3 - 2 = 0$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

1.1 Aus den gegebenen Werten der Koordinaten beim Schnitt mit den Achsen können die Koordinaten der 3 Achsen-Schnittpunkte ermittelt werden, da hier jeweils die beiden anderen Koordinaten null sind:

$$\begin{array}{lcl} x_1\text{-Achse bei } x_1 = 2 & \Longleftrightarrow & S_1(\,2\,|\,0\,|\,0) \\ x_2\text{-Achse bei } x_2 = 1 & \Longleftrightarrow & S_2(\,0\,|\,1\,|\,0) \\ x_3\text{-Achse bei } x_3 = 1 & \Longleftrightarrow & S_3(\,0\,|\,0\,|\,1) \end{array}$$

Daraus kann nun die Parametergleichung der Ebene aufstellen:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + r \cdot \overrightarrow{S_1S_2} + s \cdot \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r,s \in \mathbb{R}$$

Die Koordinatenform von E kann auf die zwei üblichen Arten (Gauß, Eliminieren der Parameter) ermittelt werden. Da hier die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen gegeben sind, wird hier mit Möglichkeit 3 eine weitere für diesen Fall **sehr einfache** Methode betrachtet:

Lösungsweg 1: Gauß-Algorithmus

$$E: \vec{x} = \begin{cases} x_1 = 2 - 2r - 2s \\ x_2 = 0 + 1r + 0s \\ x_3 = 0 + 0r + 1s \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rl} -2r - 2s & = x_1 - 2 \\ r & = x_2 \\ s & = x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x_1 - 2 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x_1 - 2 \\ 0 & -2 & 2x_2 + x_1 - 2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ 2 \cdot \text{II} + \text{I} \\ \text{III} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \text{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x_1 - 2 \\ 0 & -2 & 2x_2 + x_1 - 2 \\ 0 & 0 & 2x_3 + 2x_2 + x_1 - 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ \\ 2 \cdot \text{III}' + \text{II}' \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist nur lösbar wenn $x_1+2x_2+2x_3-2 = 0$ erfüllt ist. Für die Ebenengleichung gilt also:

$$\underline{\underline{E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0}}$$

Lösungsweg 2: Eliminieren der Parameter

$$\text{(I)} \quad x_1 = 2 - 2r - 2s$$

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{(II)}\quad x_2 = r & \Rightarrow r = x_2 \\
 & \text{(III)}\quad x_3 = s & \Rightarrow s = x_3 \\
\hline
r, s \text{ in (I)} : & \text{(I}'\text{)}\quad x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_3 & \\
 & \Rightarrow \quad 0 = 2 - 2x_2 - 2x_3 - x_1 \quad | \cdot (-1) & \\
 & \Rightarrow \quad 0 = -2 + 2x_2 + 2x_3 + x_1 & \\
 & \Rightarrow E : \underline{\underline{x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0}} &
\end{array}
$$

Lösungsweg 3: Achsenabschnittsform

Die Achsenabschnittsform lautet im allgemeinen:

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$$

Dabei sind a, b und c die Werte der Schnitte mit den jeweiligen Achsen, also ist hier $a = 2$ und $b = c = 1$. Demnach gilt für die Ebenengleichung:

$$
\begin{array}{rrl}
 & \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1 & \\
\Rightarrow & \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{1} + \frac{x_3}{1} = 1 & | \cdot 2 \\
\Longleftrightarrow & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 & | - 2 \\
\Longleftrightarrow & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0 &
\end{array}
$$

Auch so ergibt sich die Gleichung der Ebene $\underline{\underline{E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0}}$.

1.2 Es werden drei verschiedene Fälle unterschieden:

Fall 1: $a = 0,\ b \neq 0$

Die Gleichung der Ebenenschar lautet dann $bx_2 + 2x_3 - 2 = 0$. Da in der Gleichung kein x_1 enthalten ist, sind diese Ebenen alle echt parallel zur x_1-Achse.

Fall 2: $a \neq 0,\ b = 0$

Die Gleichung der Ebenenschar lautet dann $ax_1 + 2x_3 - 2 = 0$. Nun enthält die Gleichung kein x_2, entsprechend sind die Ebenen echt parallel zur x_2-Achse.

Fall 3: $a = 0,\ b = 0$

In diesem Fall lautet die Gleichung der Ebene $2x_3 - 2 = 0$. Nun enthält die Gleichung weder x_1, noch x_2. Es ergibt sich damit eine Ebene, die echt parallel zur x_1x_2-Ebene ist.

1.3.0 Im Folgenden ist $a = b = 1$. Damit ergibt sich die Gleichung der Ebene $F : x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0$.

1.3.1 Es bieten sich mehrere Möglichkeiten an, eine Gleichung der Schnittgeraden zu ermitteln:

Lösungsweg 1: Gauß-Algorithmus

Die Gleichungen der Ebenen lauten:

$$
\begin{array}{rl}
F : x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 & \text{(I)} \\
E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 & \text{(II)}
\end{array}
$$

Es wird nun das Gauß-Verfahren verwendet:

2.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Ein landwirtschaftlicher Betrieb (L), eine Mühle (M) und eine Bäckerei (B) sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden. Folgende Verflechtungstabelle stellt die Beziehungen zwischen den einzelnen Sektoren dar (alle Angaben in Mengeneinheiten ME):

	L	M	B	Markt	Gesamtproduktion
L	40	80	a	40	200
M	0	20	120	60	b
B	20	0	40	c	160

2.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Bestimmen Sie die Werte von a, b und c und geben Sie deren Bedeutung im Sinne der vorliegenden Thematik an. (3 BE)

2.2 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Beim landwirtschaftlichen Betrieb beträgt der gesamte Erlös 240.000 €.
Dabei erzielt er pro ME am Markt doppelt so viel wie er von der Bäckerei bzw. Mühle erhält. Berechnen Sie, wie hoch die Einnahmen des landwirtschaftlichen Betriebs am Markt pro ME sind. (4 BE)

2.3.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Der landwirtschaftliche Betrieb stellt seinen Hof auf biologischen Anbau um und produziert deshalb ein Viertel ME weniger als bisher. Die Mühle produziert infolgedessen 40 ME weniger als bisher.

2.3.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Bestimmen Sie, in welchem Intervall sich dann die möglichen Produktionszahlen der Bäckerei bewegen. (6 BE)

2.3.2 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Durch die Umstellung lässt sich am Markt ein höherer Preis für die Produkte von L von nun 3.000 € pro ME erzielen. Weiterhin zahlen die Abnehmer Mühle und Bäckerei jeweils die Hälfte des Marktpreises für eine ME von L. Prüfen Sie, ob die Umstellung zu einer Verringerung der Einnahmen führt (vgl. Teilaufgabe 2.2), wenn man davon ausgeht, dass die Bäckerei 60 ME insgesamt produziert. (4 BE)

2.4 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

Nach der erfolgreichen Umstellung auf Bio-Anbau verkauft der landwirtschaftliche Betrieb im folgenden Jahr mehr in seinem Hofladen, sodass die Marktabgabe auf 52 ME steigt. Sowohl die Mühle als auch die Bäckerei hingegen leiden an starker sich im Umland ansiedelnder Konkurrenz. Deshalb gibt die Mühle nur noch 39 ME und die Bäckerei 78 ME an den Markt ab. Bestimmen Sie die daraus resultierenden Produktionszahlen der drei Betriebe. (5 BE)

2.3.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

2.3.2 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

2.4 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*

1.0 In einem Snowpark wird als neue Attraktion ein kurzer Steilhang errichtet. Dieser soll zunächst flach beginnen, dann sehr steil fallen und im Auslauf wieder flacher werden.

Die Modellfunktion, nach der der Steilhang modelliert werden soll, ist gegeben durch $s(x) = \frac{5}{1+e^{2x}} - 2{,}5$. Dabei gibt x die horizontale Position und der Funktionswert s(x) die Höhe über dem Niveau des restlichen Areals in Metern an. Die konstante Verschiebung von –2,5 wurde vom Planungsbüro dabei bewusst gewählt, da so ein Teil des Steilhangs oberhalb und ein Teil unterhalb des Niveaus des restlichen Parks liegt und so beim Aufschütten des oberen Teils direkt das ausgehobene Material des unteren Teils verwendet werden kann.

Sofern nicht anders angegeben, sind alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen zu runden. Auf das Mitführen von Einheiten bei den Rechnungen kann verzichtet werden.

1.1 Das Planungsbüro schlägt vor, sich die natürlichen Begebenheiten zunutze zu machen und einen bereits vorhanden Hang als Basis für den geplanten Steilhang zu verwenden. Dafür wird für drei potentielle Hänge ein Profil vermessen. Der Hang eignet sich, wenn die Höhe an allen Stellen nicht mehr als 10 % vom Modell abweicht.

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle und entscheiden Sie, welcher Hang als Basis für den Steilhang geeignet ist.

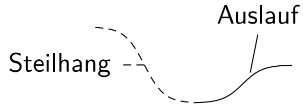
x	–2,5	–1,5	–0,5	0,5	1,5	2,5
s(x)						
s(x) + 10 %						
s(x) – 10 %						
Hang 1	2,3	2,3	1,3	–0,5	–2,3	–2,8
Hang 2	2,2	2,1	1,1	–1,2	–2,2	–2,3
Hang 3	2,6	2,4	1,7	–1,2	–2,2	–2,3

4 BE

1.2 Anhand der berechneten Werte vermutet das Planungsbüro, dass die Modellfunktion s(x) symmetrisch ist, was die Produktion der Stützstruktur erleichtern würde. Weisen Sie rechnerisch nach, dass Punktsymmetrie zum Punkt $(0\,|\,0)$ vorliegt. **3 BE**

1.3.0 Da das Feedback zum neuen Steilhang nicht positiv genug ausfällt, soll die Attraktion erweitert werden. Dafür soll entsprechend nebenstehender Skizze ein neuer Auslauf aufgeschüttet werden, der mehr Möglichkeiten bietet als ein ebener Auslauf.
Der in der Skizze gestrichelte Steilhang wird im Intervall [–4; 4] weiterhin durch die Funktion s(x) beschrieben.

Skizze:



Der Auslauf wird im Intervall [4; 12] beschrieben durch eine Funktion $a(x) = \frac{b}{1+e^{-2x+c}} + d$ mit $b,c,d \in \mathbb{R}$, die ebenfalls in Abhängigkeit der horizontalen Position x die Höhe a(x) in Metern angibt. Bei x = 4 stimmen die Höhe von Steilhang und Auslauf im Rahmen der Rundungsgenauigkeit überein.

Muster

1.0 Betrachtet wird die Funktion $s(x) = \dfrac{5}{1+e^{2x}} - 2{,}5$, die in Abhängigkeit der horizontalen Position x die Höhe eines Steilhangs angibt.

1.1 Die Werte der Tabelle werden durch Einsetzen bestimmt, was am Beispiel $x = -2{,}5$ gezeigt wird.

$$\begin{aligned} s(-2{,}5) &= \frac{5}{1+e^{2\cdot(-2{,}5)}} - 2{,}5 \approx 2{,}47 \\ \text{„s(-2,5)+10 \%“} &= s(-2{,}5)\cdot 1{,}1 \approx 2{,}71 \\ \text{„s(-2,5)-10 \%“} &= s(-2{,}5)\cdot 0{,}9 \approx 2{,}22 \end{aligned}$$

Vollständige Tabelle:

x	–2,5	–1,5	–0,5	0,5	1,5	2,5
s(x)	2,47	2,26	1,16	–1,16	–2,26	–2,47
s(x) + 10 %	2,71	2,49	1,27	–1,27	–2,49	–2,71
s(x) – 10 %	2,22	2,04	1,04	–1,04	–2,04	–2,2
Hang 1	2,3	2,3	1,3	–0,5	–2,3	–2,8
Hang 2	2,2	2,1	1,1	–1,2	–2,2	–2,3
Hang 3	2,6	2,4	1,7	–1,2	–2,2	–2,3

Nur bei Hang 2 liegen alle gemessenen Werte innerhalb des Intervalls von 10 % um den berechneten Wert, weshalb dieser Wert für den Steilhang ausgewählt werden sollte.

1.2 **Nachweis der Symmetrie**
Für Punktsymmetrie muss gezeigt werden, dass $s(-x) = -s(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} s(-x) &= \frac{5}{1+e^{-2x}} - 2{,}5 = \frac{5}{1+e^{-2x}}\cdot\frac{e^{2x}}{e^{2x}} - 2{,}5 = \frac{5e^{2x}}{e^{2x}+1} - 2{,}5 = \frac{5e^{2x}}{e^{2x}+1} - \frac{2{,}5(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} \\ &= \frac{5e^{2x} - 2{,}5 - 2{,}5e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{2{,}5e^{2x} - 2{,}5}{e^{2x}+1} = \frac{2{,}5e^{2x} - 2{,}5 + 2{,}5 - 2{,}5}{e^{2x}+1} \\ &= \frac{-5 + 2{,}5e^{2x} + 2{,}5}{e^{2x}+1} = \frac{-5}{e^{2x}+1} + 2{,}5\cdot\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+1} = \frac{-5}{e^{2x}+1} + 2{,}5 \\ &= -s(x) \quad \text{(q.e.d)} \end{aligned}$$

1.3.0 Die Modellfunktion des Steilhangs ist nun gegeben im Intervall $x \in [-4; 4]$. Zusätzlich wird die Funktion $a(x) = \dfrac{b}{1+e^{-2x+c}} + d$ betrachtet, die im Intervall [4; 12] die Form des Auslaufs beschreibt.

1.3.1 **Ermitteln der Parameter**
Laut Angabe geht a(x) aus s(x) hervor, indem die beschriebenen Schritte auf den Graphen angewendet werden. Spiegelung an der y-Achse wird erreicht, indem im Funktionsterm an jeder

Stelle „x“ durch „-x“ ersetzt wird:

$$\frac{5}{1+e^{2x}} - 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{1+e^{-2x}} - 2{,}5$$

Weiterhin soll entlang der y-Achse auf die Hälfte gestaucht werden. Dazu wird der Term mit 0,5 multipliziert:

$$\frac{5}{1+e^{-2x}} - 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 \cdot \left(\frac{5}{1+e^{-2x}} - 2{,}5\right) = \frac{2{,}5}{1+e^{-2x}} - 1{,}25$$

Dabei wird jedoch gefordert, dass die konstante Verschiebung nicht mit gestaucht werden soll und –2,5 bleibt:

$$\frac{2{,}5}{1+e^{-2x}} - 1{,}25 \quad \Rightarrow \quad \frac{2{,}5}{1+e^{-2x}} - 2{,}5$$

Abschließend ist gegeben, das der Graph um 8 m, also im Modell um 8 Einheiten nach rechts verschoben wird. Dies wird im Funktionsgraph dadurch erreicht, dass an jeder Stelle „x“ durch „(x-8)“ ersetzt wird.

$$\frac{2{,}5}{1+e^{-2x}} - 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{2{,}5}{1+e^{-2(x-8)}} - 2{,}5 = \frac{2{,}5}{1+e^{-2x+16}} - 2{,}5$$

Daraus können die gesuchten Parameter abgelesen werden zu $\underline{\underline{b = 2{,}5}}$, $\underline{\underline{c = 16}}$ und $\underline{\underline{d = -2{,}5}}$.

1.3.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Für beide Funktionen wird mithilfe von Ketten- und Quotientenregel die erste Ableitung ermittelt.

$$\begin{aligned}
s(x) &= \frac{5}{1+e^{2x}} - 2{,}5 \\
s'(x) &= \left[\frac{(5)' \cdot (1+e^{2x}) - 5 \cdot (1+e^{2x})'}{(1+e^{2x})^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \left[\frac{0 - 5 \cdot e^{2x} \cdot (2x)'}{(1+e^{2x})^2}\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \frac{0 - 5 \cdot e^{2x} \cdot 2}{(1+e^{2x})^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{-10e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= \frac{2{,}5}{1+e^{-2x+16}} - 2{,}5 \\
a'(x) &= \left[\frac{(2{,}5)' \cdot (1+e^{-2x+16}) - 2{,}5 \cdot (1+e^{-2x+16})'}{(1+e^{-2x+16})^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \left[\frac{0 - 2{,}5 \cdot e^{-2x+16} \cdot (-2x+16)'}{(1+e^{-2x+16})^2}\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \frac{0 - 2{,}5 \cdot e^{-2x+16} \cdot (-2)}{(1+e^{-2x+16})^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{5e^{-2x+16}}{(1+e^{-2x+16})^2}
\end{aligned}$$

Muster

3.0 Um die Wirksamkeit eines Medikaments zu untersuchen, wird nach dessen Einnahme die Konzentration im Blut der Patienten gemessen. Diese kann näherungsweise durch die Funktion $k : t \mapsto 0{,}75t \cdot e^{-0{,}25t+2}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei gibt der Funktionswert von k die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{mg}{\ell}\right]$ und die Variable t die Zeit in Stunden [h] nach der Einnahme des Medikaments an. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.

3.1 Ermitteln Sie, nach wie vielen Stunden nach der Einnahme gemäß der gewählten Modellfunktion die maximale Konzentration des Medikaments im Blut erreicht ist und berechnen Sie diese maximale Konzentration. **5 BE**

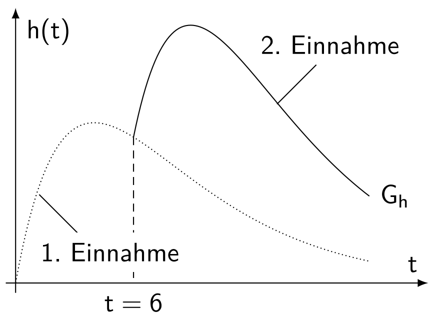
3.2 Berechnen Sie mithilfe partieller Integration den Wert des bestimmten Integrals $\frac{1}{2}\int_0^{20} k(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **6 BE**

3.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion k in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall $0 \leq t \leq 25$. Maßstab für beide Achsen: $1\text{ LE} = 0{,}5\,\text{cm}$.
Übersteigt die Konzentration des verabreichten Medikaments im Blut des Patienten $6\frac{mg}{\ell}$ können Nebenwirkungen auftreten. Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe des Graphen von k, in welchem Zeitraum nach der Einnahme damit zu rechnen ist. **4 BE**

3.4.0 Um Nebenwirkungen zu vermindern, plant der Hersteller des Medikaments geringer zu dosieren. Es soll vier Stunden nach der Einnahme als Höchstwert eine Konzentration von $5\frac{mg}{\ell}$ im Blut auftreten. Die Konzentration im Blut lässt sich dann mit einer Funktionsgleichung der Art $g(t) = c \cdot t \cdot e^{-0{,}25+2}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$; $c \in \mathbb{R}$ modellhaft darstellen. Dabei gibt der Funktionswert von g die Konzentration des Medikaments im Blut des Patienten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{mg}{\ell}\right]$ und die Variable t die Zeit in Stunden [h] nach der Einnahme an.

3.4.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters c. **2 BE**

3.4.2 Einem Patienten wird verordnet, sechs Stunden nach der Ersteinnahme das Medikament nochmals einzunehmen. Die Konzentration im Blut entspricht dann modellhaft den Funktionswerten der Funktion h mit $h(t) = 0{,}46 \cdot e^{-0{,}25t+2} + 0{,}46(t-6) \cdot e^{-0{,}25(t-6)+2}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 6$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_h der Funktion h. Untersuchen Sie, ob der Patient bei dieser Verordnung mit Nebenwirkungen (siehe Teilaufgabe 3.3) zu rechnen hat. **3 BE**



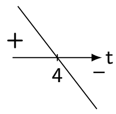
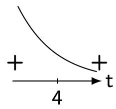
$$= \left[(0{,}75)\cdot e^{-0{,}25t+2} + 0{,}75t\cdot e^{-0{,}25t+2}\cdot(-0{,}25t+2)'\right] \qquad \text{(Ansatz Kettenregel)}$$
$$= 0{,}75\cdot e^{-0{,}25t+2} + 0{,}75t\cdot e^{-0{,}25t+2}\cdot(-0{,}25) \qquad \text{(Anwendung)}$$
$$= 0{,}75\cdot e^{-0{,}25t+2} - 0{,}1875t\cdot e^{-0{,}25t+2} \qquad (e^{-0{,}25t+2}\ \text{ausklammern})$$
$$= (-0{,}1875t+0{,}75)\cdot e^{-0{,}25t+2}$$

Zeitpunkt und Wert der maximalen Konzentration

Zunächst wird die Nullstelle der ersten Ableitung berechnet. Da die Exponentialfunktion nie null wird ($e^{-0{,}25t+2} \neq 0$), entspricht dies der Nullstelle des linearen Terms:

$$\begin{aligned} & \dot{k}(t) = 0 & \\ \Rightarrow \quad & -0{,}1875t + 0{,}75 = 0 & \quad |-0{,}75 \\ \iff \quad & -0{,}1875t = -0{,}75 & \quad |:(-0{,}1875) \\ \iff \quad & t_1 = 4 & \end{aligned}$$

Es kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden:

t	$0 \leq t < 4$	$t = 4$	$4 < t$	Skizzen
$-0{,}1875t + 0{,}75$	$+$	0	$-$	
$e^{-0{,}25t+2}$	$+$	$+$	$+$	
$\dot{k}(t)$	$+$	0	$-$	
G_k	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	

Das einzige Maximum, also der Zeitpunkt mit maximaler Konzentration liegt bei $t = 4$. Es wird zudem der Funktionswert an dieser Stelle ermittelt:

$$k(4) = 0{,}75\cdot 4\cdot e^{-0{,}25\cdot 4+2} = 3e^{-1+2} = 3e \approx 8{,}15$$

Die absolute maximale Konzentration von $\underline{\underline{8{,}15}}\,[\frac{mg}{\ell}]$ ist nach $\underline{\underline{4}}$ Stunden erreicht.

3.2 **Lösen des unbestimmten Integrals**

Zunächst wird mittels partieller Integration das unbestimmte Integral berechnet. Dabei wird folgenden Schritten gefolgt:

1. Schritt: Festlegung von u und v′ im gegebenen integral. Die Auswahl wird anhand der Faustregel „für v′ werden Exponentialfunktionen bevorzugt" getroffen:

$$\int \underbrace{0{,}75t}_{u}\cdot\underbrace{e^{-0{,}25t+2}}_{v'}dt \quad \Rightarrow \quad u(t) = 0{,}75t \quad v'(t) = e^{-0{,}25t+2}$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von u′ und v:

$$u(t) = 0{,}75t \quad \Rightarrow \quad u'(t) = 0{,}75$$
$$v'(t) = e^{-0{,}25t+2} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{-0{,}25}e^{-0{,}25t+2} = -4e^{-0{,}25t+2}$$

3. Schritt: Einsetzen gemäß der Formel:

$$\begin{aligned}\int u(t)\cdot v'(t)dt &= u(t)\cdot v(t) - \int v(t)\cdot u'(t)dt\\ \int 0{,}75t\cdot e^{-0{,}25t+2}dt &= 0{,}75t\cdot\left(-4e^{-0{,}25t+2}\right) - \int 0{,}75\cdot(-4e{-}0{,}25t+2)dt\\ &= -3te^{-0{,}25t+2} + 3\int e^{-0{,}25t+2}dt\\ &= -3te^{-0{,}25t+2} + 3\cdot\frac{1}{-0{,}25}\cdot e^{-0{,}25t+2} + C\\ &= -3te^{-0{,}25t+2} - 12e^{-0{,}25t+2} + C = (-3t-12)e^{-0{,}25t+2} + C\end{aligned}$$

Wert des bestimmten Integrals

Da nun bestimmt integriert wird, entfällt die Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{20}\int_0^{20} k(t)dt &= \frac{1}{20}\left[(-3t-12)e^{-0{,}25t+2}\right]_0^{20}\\ &= \frac{1}{20}\left((-3\cdot 20-12)e^{-0{,}25\cdot 20+2} - \left((-3\cdot 0-12)e^{-0{,}25\cdot 0+2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{20}\left(-72e^{-3}+12e^{2}\right) \approx \underline{\underline{4{,}25}}\end{aligned}$$

Interpretation im Sachzusammenhang

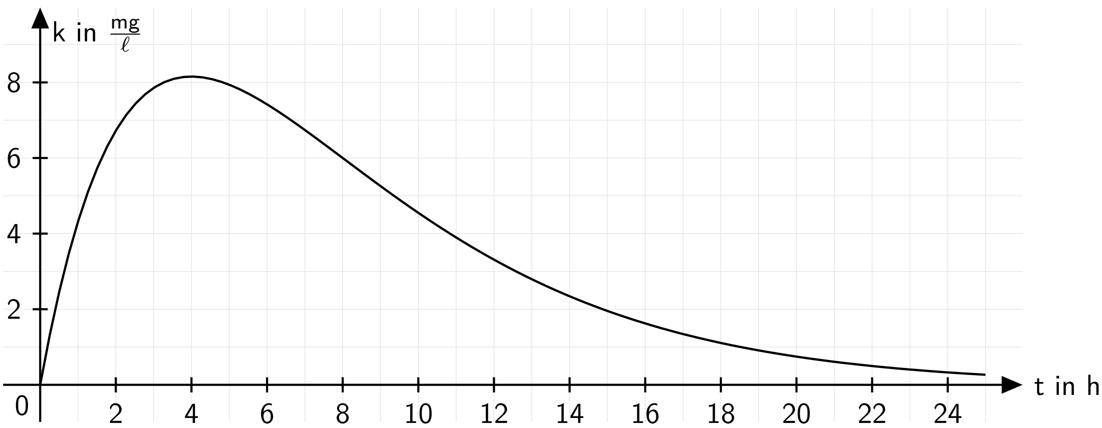
Die Konzentration des Medikamentes im Blut des Patienten beträgt in den ersten 20 Stunden nach der Einnahme im Mittel 4,25 $\frac{mg}{\ell}$.

3.3 **Graphische Darstellung**

Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

t	0	2	4	8	12	16	20	25
k(t)	0	6,72	8,15	6	3,31	1,62	0,75	0,27

Mithilfe dieser Werte kann nun die graphische Darstellung erfolgen:



Zeitraum mit Nebenwirkungen

Der Zeitraum, in dem $k(t)$ größer als 6 ist, beginnt etwa bei $t = 1{,}6$ und endet bei $t = 8$. Demnach ist im Zeitraum $\underline{\underline{t \in]1{,}6;\ 8[}}$ mit Nebenwirkungen zu rechnen.

3.4.1 **Wert des Parameters**

Es soll 4 Stunden nach der Einnahme der Höchstwert von 5 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ erreicht werden. Es ist also $g(4) = 5$ und damit:

$$
\begin{aligned}
& & g(4) &= 5 & \\
&\iff & c \cdot 4 \cdot e^{-0{,}25\cdot 4+2} &= 5 & \\
&\iff & 4c \cdot e^{1} &= 5 & \quad | : (4e) \\
&\iff & c &= \frac{5}{4e} & \\
&\iff & \underline{\underline{c}} &\underline{\underline{\approx 0{,}46}} &
\end{aligned}
$$

3.4.2 **Untersuchen, ob mit Nebenwirkungen zu rechnen ist**

Für den Nachweis, dass mit Nebenwirkungen zu rechnen ist, reicht ein Funktionswert größer als 6. Es wird der Funktionswert für $t = 10$ berechnet:

$$
\begin{aligned}
h(10) &= 0{,}46 \cdot 10 \cdot e^{-0{,}25\cdot 10+2} + 0{,}46 \cdot (10-6) \cdot e^{-0{,}25\cdot(10-6)+2} \\
&= 4{,}6 \cdot e^{-0{,}5} + 1{,}84 \cdot e^{1} \approx 7{,}79
\end{aligned}
$$

Der Wert von 6 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ ist überschritten. Demnach ist mit Nebenwirkungen zu rechnen.

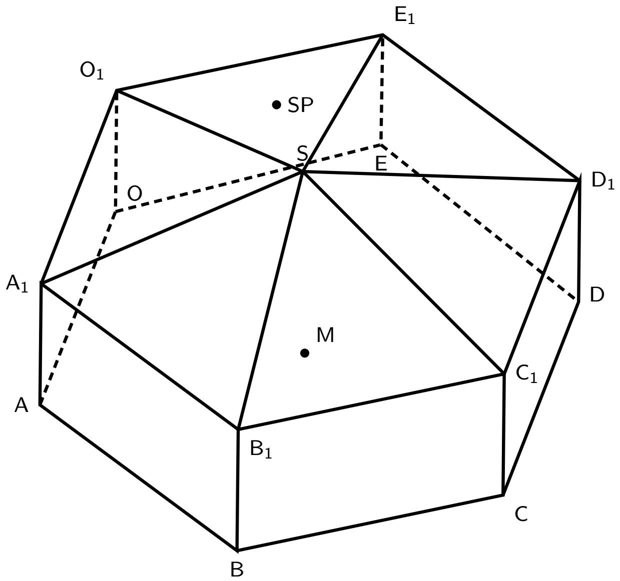
1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und C_1. **3 BE**

1.2 Für das Zelt und die Zirkuswagen wird eine Stellfläche benötigt, die 2,5-mal so groß ist wie die Grundfläche des Zirkuszeltes. Ein Landwirt stellt dem Zirkus eine Wiese mit einer Fläche von $240\,\mathrm{m}^2$ zur Verfügung.
Prüfen Sie, ob diese Fläche groß genug ist.
[Teilergebnis: $A_{\text{Zelt}} \approx 93{,}5\,\mathrm{m}^2$] **4 BE**

1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, welche durch die Punkte $O_1\,(0\,|\,0\,|\,4)$, $E_1\left(-3\,\middle|\,3\sqrt{3}\,\middle|\,4\right)$ und $S\left(3\,\middle|\,3\sqrt{3}\,\middle|\,6\right)$ festgelegt wird.
[Mögliches Teilergebnis: $F: x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 3x_3 = -12$] **3 BE**

1.4 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene F aus Teilaufgabe 1.3 gegenüber der Grundfläche des Zeltes. **3 BE**

1.5 Vom Schwerpunkt SP des Dreiecks O_1SE_1 soll senkrecht zur Ebene F ein Drahtseil bis zum Boden gespannt werden. Berechnen Sie die Länge dieses Seils. **5 BE**



1.6 Zur Abendvorstellung soll ein Lichtstrahl auf die Seitenfläche OAA_1O_1, in der sich auch der Eingang befindet, treffen. Dazu wird auf einem Mast ein Spotlight installiert, dessen Lichtstrahl durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}^+$ beschrieben wird. Prüfen Sie, ob der Lichtstrahl des Spotlight die Seitenfläche OAA_1O_1 trifft. Geben Sie gegebenenfalls an, wie die Position des Spotlights am Mast verändert werden muss, damit die gewünschte Beleuchtung erzielt wird, wenn der Lichtstrahl nach wie vor parallel zu h verlaufen soll. **5 BE**

1.1 **Koordinaten der Eckpunkte**

Da es sich bei der Grundfläche um ein regelmäßiges Sechseck handelt, ist $\overrightarrow{AB}$ parallel zu $\overrightarrow{OM}$ und zudem $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OM}|$. Damit folgt für die Koordinaten der Eckpunkte:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{B\,(9\,|\,3\sqrt{3}\,|\,0)}}$$

$$\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{C\,(6\,|\,6\sqrt{3}\,|\,0)}}$$

Da C_1 genau 4 m ($x_3 = 4$) über C liegt, stimmen diese in der x_1- und x_2-Koordinate überein. Demnach ist $\underline{\underline{C_1\,(6\,|\,6\sqrt{3}\,|\,4)}}$.

1.2 **Fläche des Zeltes**

Die Fläche des Zeltes entspricht dem sechsfachen der Fläche des Dreiecks, das von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OM}$ aufgespannt wird.

$$A_{Zelt} = 6 \cdot A_{\Delta OAM} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OM}| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3\sqrt{3} \\ 0 \cdot 3 - 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 3\sqrt{3} - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{(18\sqrt{3})^2} \approx 93{,}5\,[\mathrm{m}^2]$$

Prüfen ob die Fläche groß genug ist

Die Stellfläche ist 2,5-mal so groß wie die Grundfläche des Zirkuszeltes, also $2{,}5 \cdot 93{,}5 = 233{,}75\,[\mathrm{m}^2]$. Die Fläche von 240 m^2, die der Landwirt zur Verfügung stellt, ist also groß genug.

1.3 **Gleichung der Ebene in Koordinatenform**

Die Ebene wird durch die Vektoren $\overrightarrow{O_1E_1}$ und $\overrightarrow{O_1S}$ aufgespannt. Für den Normalenvektor $\vec{n}_F$ der Ebene gilt dann:

$$\vec{n}_F = \overrightarrow{O_1E_1} \times \overrightarrow{O_1S} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \cdot 2 - 0 \cdot 3\sqrt{3} \\ 0 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 6 \\ -18\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aus dem Normalvektor der Ebene und den Koordinaten des Punktes $O_1\,(0\,|\,0\,|\,4)$ kann eine Gleichung der Ebene zunächst in Normalenform aufgestellt werden, die dann in Koordinatenform umgeformt wird.

$$F\colon \vec{n}_F \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OO_1}) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 6 \\ -18\sqrt{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 4 \end{pmatrix} = 6\sqrt{3}x_1 + 6x_2 - 18\sqrt{3}x_3 - 18\sqrt{3} \cdot (-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F\colon 6\sqrt{3}x_1 + 6x_2 - 18\sqrt{3}x_3 + 72\sqrt{3} = 0 \qquad |:(6\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F\colon x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - 3x_3 + 12 = 0}}$$

1.4 **Neigungswinkel der Ebene F**

Der gesuchte Winkel ist der Winkel α zwischen der Ebene F und der Grundfläche, die in der x_1x_2-Ebene liegt. Um diesen zu bestimmen, wird der Winkel zwischen den Normalvektoren beider Ebenen berechnet. Dabei kann nun der gekürzte Normalenvektor $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 \end{pmatrix}$ verwendet werden, der aus der Gleichung der Ebene F in Teilaufgabe 1.3 abgelesen werden kann.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_F \circ \vec{n}_{x_1x_2}|}{|\vec{n}_F| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{31}{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}\right) \approx \underline{\underline{21{,}05^\circ}}$$

1.5 **Schwerpunkt des Dreiecks**

Für den Schwerpunkt SP des Dreiecks O_1SE_1 gilt:

$$\overrightarrow{OSP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OE_1}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

Geradengleichung g des Drahtseils

Mit dem Schwerpunkt als Ortsvektor und dem Normalenvektor der Ebene F als Richtungsvektor kann die Gleichung einer Geraden g aufgestellt werden, die durch den Schwerpunkt und senkrecht zu Ebene F verläuft:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OSP} + t \cdot \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt mit dem Boden

Es wird der Wert für t gesucht, bei dem das Drahtseil auf den Boden auftrifft, also g die x_1x_2-Ebene schneidet. Da hier $x_3 = 0$ gilt, genügt es, die x_3-Komponente von g zu betrachten:

$$x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{14}{3} + t \cdot (-3) = 0 \qquad \left| -\frac{14}{3} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3t = -\frac{14}{3} \qquad |:(-3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = \frac{14}{9}$$

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

M

N

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

Original-Abschlussprüfungen Mathematik Nichttechnik FOS·BOS 13 Bayern 2021

- ✓ An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- ✓ Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- ✓ Miniskript mit Beispielen sowie ausführlichen Lösungen
- ✓ Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- ✓ Mit Ferien- und Prüfungsplaner 2020/2021 im Innenteil

Abi-Trainer für FOS · BOS 13 MNT 2021

- Ideal für das SELBSTLERNEN ZU HAUSE geeignet -

Bestell-Nr. : EAN 9783743000612

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

€ 10,90

S
9 783743 000612 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de