12. Klasse

FOS·BOS Fachabitur Bayern 2021

Mathematatik Technik

- Ideal für Homeschooling geeignet -

LehrplanPLUS

INKLUSIVE:

- ✓ Miniskript mit zusätzlichen Übungen nach jedem Themengebiet
- ✓ Prüfungsaufgaben angepasst an den neuen LehrplanPLUS
- ✓ Musterprüfungen im Stil der neuen Abi-Prüfung sowie
- ✓ kostenloser Downloadbereich per QR-Code

SCAN ME

FOS·BOS 12

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

lernverlag®
www.lern-verlag.de

2020 2021 Schuljahresplaner

September	Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli
1 Di	1 Do	**1 So** Allerheiligen	1 Di	**1 Fr** Neujahr	1 Mo 5	1 Mo 9	1 Do	**1 Sa** Tag der Arbeit	1 Di	1 Do
2 Mi	2 Fr	2 Mo 45	2 Mi	**2 Sa**	2 Di	2 Di	**2 Fr** Karfreitag	**2 So**	2 Mi	2 Fr
3 Do	**3 Sa** Tag der Dt. Einheit	3 Di	3 Do	**3 So**	3 Mi	3 Mi	**3 Sa**	3 Mo 18	3 Do Fronleichnam	**3 Sa**
4 Fr	**4 So**	4 Mi	4 Fr	4 Mo 1	4 Do	4 Do	**4 So** Ostern	4 Di	4 Fr	**4 So**
5 Sa	5 Mo 41	5 Do	**5 Sa**	5 Di	5 Fr	5 Fr	**5 Mo** Ostermontag 14	5 Mi	**5 Sa**	5 Mo 27
6 So	6 Di	6 Fr	**6 So**	6 Mi Heilige Drei Könige	**6 Sa**	**6 Sa**	6 Di	6 Do	**6 So**	6 Di
7 Mo 37	7 Mi	**7 Sa**	7 Mo 50	7 Do	**7 So**	**7 So**	7 Mi	7 Fr	7 Mo 23	7 Mi
8 Di	8 Do	**8 So**	8 Di	8 Fr	8 Mo 6	8 Mo 10	8 Do	**8 Sa**	8 Di	8 Do
9 Mi	9 Fr	9 Mo 46	9 Mi	**9 Sa**	9 Di	9 Di	9 Fr	**9 So** Muttertag	9 Mi	9 Fr
10 Do	**10 Sa**	10 Di	10 Do	**10 So**	10 Mi	10 Mi	**10 Sa**	10 Mo 19	10 Do	**10 Sa**
11 Fr	**11 So**	11 Mi	11 Fr	11 Mo 2	11 Do	11 Do	**11 So**	11 Di	11 Fr	**11 So**
12 Sa	12 Mo 42	12 Do	**12 Sa**	12 Di	12 Fr	12 Fr	12 Mo 15	12 Mi	**12 Sa**	12 Mo 28
13 So	13 Di	13 Fr	**13 So**	13 Mi	**13 Sa**	**13 Sa**	13 Di	**13 Do** Christi Himmelfahrt	**13 So**	13 Di
14 Mo 38	14 Mi	**14 Sa**	14 Mo 51	14 Do	**14 So**	**14 So**	14 Mi	14 Fr	14 Mo 24	14 Mi
15 Di	15 Do	**15 So**	15 Di	15 Fr	15 Mo Rosenmontag 7	15 Mo 11	15 Do	**15 Sa**	15 Di	15 Do
16 Mi	16 Fr	16 Mo 47	16 Mi	**16 Sa**	16 Di	16 Di	16 Fr	**16 So**	16 Mi	16 Fr
17 Do	**17 Sa**	17 Di	17 Do	**17 So**	17 Mi	17 Mi	**17 Sa**	17 Mo **Deutsch** 20	17 Do	**17 Sa**
18 Fr	**18 So**	18 Mi	18 Fr	18 Mo 3	18 Do	18 Do	**18 So**	18 Di **BwR, IBV, Bio, Physik, PäPsy**	18 Fr	**18 So**
19 Sa	19 Mo 43	19 Do	**19 Sa**	19 Di	19 Fr	19 Fr	19 Mo 16	19 Mi	**19 Sa**	19 Mo 29
20 So	20 Di	20 Fr	**20 So**	20 Mi	**20 Sa**	**20 Sa**	20 Di	20 Do **Englisch**	**20 So**	20 Di
21 Mo 39	21 Mi	**21 Sa**	21 Mo 52	21 Do	**21 So**	**21 So**	21 Mi	21 Fr **Mathematik**	21 Mo 25	21 Mi
22 Di	22 Do	**22 So**	22 Di	22 Fr	22 Mo 8	22 Mo 12	22 Do	**22 Sa**	22 Di	22 Do
23 Mi	23 Fr	23 Mo 48	23 Mi	**23 Sa**	23 Di	23 Di	23 Fr	**23 So** Pfingsten	23 Mi	23 Fr
24 Do	**24 Sa**	24 Di	24 Do Heiligabend	**24 So**	24 Mi	24 Mi	**24 Sa**	**24 Mo** Pfingstmontag 21	24 Do	**24 Sa**
25 Fr	**25 So** Ende der Sommerzeit	25 Mi	**25 Fr** 1. Weihnachtstag	25 Mo 4	25 Do	25 Do	**25 So**	25 Di	25 Fr	**25 So**
26 Sa	26 Mo 44	26 Do	**26 Sa** 2. Weihnachtstag	26 Di	26 Fr	26 Fr	26 Mo 17	26 Mi	**26 Sa**	26 Mo 30
27 So	27 Di	27 Fr	**27 So**	27 Mi	**27 Sa**	**27 Sa**	27 Di	27 Do	**27 So**	27 Di
28 Mo 40	28 Mi	**28 Sa**	28 Mo 53	28 Do	**28 So**	**28 So** Beginn der Sommerzeit	28 Mi	28 Fr	28 Mo 26	28 Mi
29 Di	29 Do	**29 So** 1. Advent	29 Di	29 Fr		29 Mo 13	29 Do	**29 Sa**	29 Di	29 Do
30 Mi	30 Fr	30 Mo 49	30 Mi	**30 Sa**		30 Di	30 Fr	**30 So**	30 Mi	30 Fr
	31 Sa Reformationstag		31 Do Silvester	**31 So**		31 Mi		31 Mo 22		**31 Sa**

Sonn- und Feiertage

Ferien

Abschlussprüfungen

cleverlag®

Abiturprüfung Mathematik
Technik
FOS | BOS Bayern 12. Klasse
2021

erstellt

für Schülerinnen und Schüler der Beruflichen Oberschule technischer Zweig in Bayern.

Nach dem neuen LehrplanPLUS

www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Prüfungsbuch **Abiturprüfung Mathematik Technik FOS/BOS Bayern 12. Klasse 2021** sind die passenden Prüfungsaufgaben nach LehrplanPLUS und **eigens erstellte Musterprüfungen** enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2021 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **21.05.2021** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2020) Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neuerungen - Immer auf dem aktuellen Stand sein

Sie finden ein Miniskript, aufgeteilt in Analysis und Analytische Geometrie, einen Übungstaiel Analysis und einen Übungsteil Analytische Geometrie. Im Anschluss finden Sie vor der Abschlussprüfung 2019 und 2020 nach LehrplanPLUS noch unsere Musterprüfung.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, cleverlag und lern.de sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

6. überarb. Auflage ©2020 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0062-9
Artikelnummer:
EAN 9783743000629

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis

Seite

MINISKRIPT - Analytische Geometrie

ÜBUNGSTEIL - Analysis

ÜBUNGSTEIL - Analytische Geometrie

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2021

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2021 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant:

- Aus LB 3: Kurvendiskussion von Funktion der Form $x \mapsto f(x) \cdot e^{g(x)} + y_0$ aber: Produkt-/Ketten- und Quotientenregel sollen im Mathematik Additum behandelt werden
- Aus LB 4: Stammfunktionen für Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot e^{c \cdot (x-d)} + y_0$ und $x \mapsto h(e^x)$; h ist dabei eine ganzrationale Funktion vom Grad höchstens zwei

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug" alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug" wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen" zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug" einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

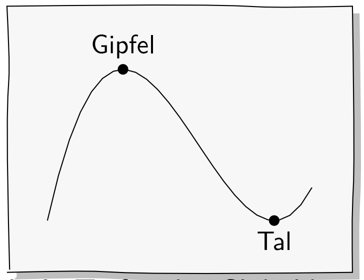
c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge" kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge" zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten" werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Extrema und Monotonieverhalten

Rechts ist das Höhenprofil eines Berges gezeigt. Der Gipfel ist dabei der jeweils höchste Punkt in einer Umgebung, das Tal entsprechend der tiefste Punkt. Auf dem Weg zum Gipfel steigt der Berg zunächst an, fällt rechts vom Gipfel zum Tal hin wieder ab und steigt rechts neben dem Tal wieder an. Direkt am Gipfel / im Tal ist es flach, der Berg steigt weder an, noch fällt er ab.



Bei Funktionen ist der „Gipfel“ der **lokale** Hochpunkt und das „Tal“ der **lokale** Tiefpunkt. Global kann es also noch höhere bzw. tiefere Punkte geben.

Extremstellen und Monotonie

Die erste Ableitung f' einer Funktion f gibt Informationen über die Steigung des Graphen G_f:

- $f'(x) > 0$: die Funktion $f(x)$ ist streng monoton steigend
- $f'(x) < 0$: die Funktion $f(x)$ ist streng monoton fallend
- $f'(x) = 0$: die Funktion $f(x)$ hat einen Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkt

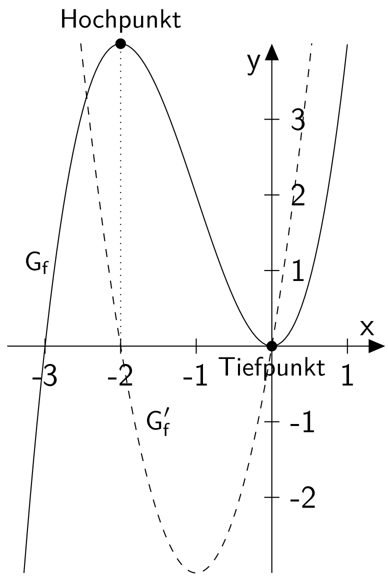
Gilt für die Steigung $f'(x) = 0$, liegt also häufig eine Extremstelle vor. Die Extremstellen einer Funktion f geben die Punkte an, in denen der Graph eine waagrechte Tangente besitzt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2$
1. Schritt: Erste Ableitung berechnen:

$$f'(x)x = 3x^2 + 6x$$

2. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitung berechnen, durch Faktorisieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x \\ f'(x) &= 0 \\ 0 &= 3x^2 + 6x \\ 0 &= x(3x+6) \\ \iff \quad x_1 = 0; &\quad x_2 = -2 \end{aligned}$$



Siehe auch grafische Darstellung: x-Werte von Nullstellen der ersten Ableitung stimmen mit den Extremstellen der Funktion überein.

3. Schritt: Funktionswerte durch Einsetzen in die Funktionsgleichung ermitteln

$$y_1 = f(x_1) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$$
$$y_2 = f(x_2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten also HOP $(-2\,|\,4)$ und TIP $(0\,|\,0)$.

Aufstellen von Funktionsgleichungen (Steckbriefaufgaben)

Bei sogenannten Steckbriefaufgaben ist die Funktionsgleichung einer Funktion gesucht. Dazu werden Eigenschaften und Punkte der Funktion angegeben, mit denen sich Gleichungen aufstellen lassen.
Es gilt: Um n Parameter der gesuchten Gleichung zu bestimmen, benötigt man n Gleichungen!

Alle häufig vorkommenden Formulierungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Vorgabe: $f(x)\ldots$	Folgerung
... hat die Nullstelle $x = 3$	$f(3) = 0$
... schneidet die y-Achse bei 2	$f(0) = 2$
... verläuft durch den Punkt $(2 \mid 4)$	$f(2) = 4$
... berührt die x-Achse bei $x = 1$	$f(1) = 0 \wedge f'(1) = 0$
... hat eine waagrechte Tangente bei $x = 3$	$f'(3) = 0$
... hat einen Hoch- bzw. Tiefpunkt in $(2 \mid 4)$	$f(2) = 4 \wedge f'(2) = 0$
... hat im Punkt $(3 \mid 2)$ die Steigung 5	$f'(3) = 5$
... hat einen Wendepunkt in $(1 \mid 3)$	$f(1) = 3 \wedge f''(1) = 0$
... steigt/fällt bei $x = 1$ am stärksten/steilsten	$f''(1) = 0$
... hat einen Terrassenpunkt in $(4 \mid 3)$	$f(4) = 3 \wedge f'(4) = 0 \wedge f''(4) = 0$

Es gibt zwei grundsätzliche Aufgabentypen:

Typ 1
Gegeben ist der Grad der gesuchten ganzrationalen Funktion. Damit kann man die allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.

Beispiel
Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die die y-Achse bei –1 schneidet und ein Minimum bei $(1 \mid -3)$ hat. Sie hat keinen quadratischen Anteil.

1. Schritt: Aufstellen der allg. Gleichung 3. Grades mit Parametern.
Da die Funktion „keinen quadratischen Anteil" hat, gilt $b = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f(x) = ax^3 + cx + d$$

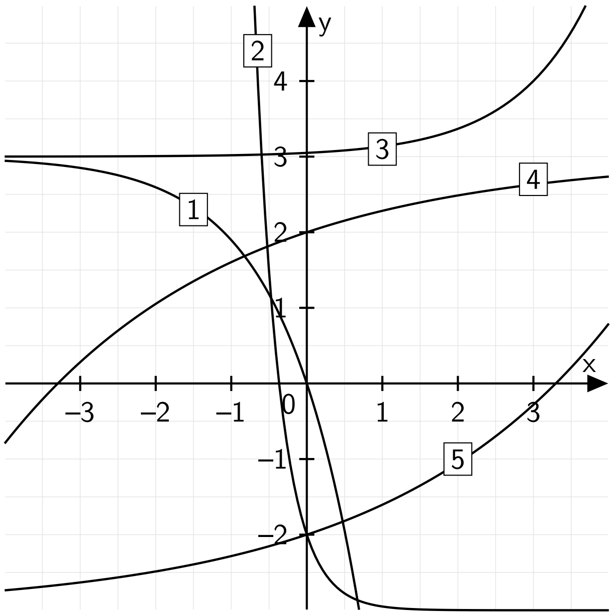
2. Schritt: Analyse der gegebenen Aussagen gemäß obiger Tabelle:

„schneidet y-Achse bei -1" $\Longrightarrow$ $f(0) = -1$ (I)
„Minimum bei $(1 \mid -3)$" $\Longrightarrow$ $f(1) = -3$ (II) und $f'(1) = 0$ (III)

3. Schritt: Aufstellen von Gleichungen aus den analysierten Angaben:

$$\text{(I)} \quad \Longrightarrow \quad f(0) = a0^3 + c0 + d = d = -1$$

Den gezeigten Funktionsgraphen soll jeweils einer der folgenden Funktionsgleichungen zugeordnet werden.



$f(x) = e^{x-3} + 3 \qquad g(x) = e^{x/3} - 3$

$h(x) = e^{-3x} - 3 \qquad k(x) = -e^{-x/3} + 3$

$m(x) = -3e^{3-x} - 3 \qquad n(x) = -3e^{x} + 3$

Betrachtet man den Funktionsgraph „1", so stellt man beispielsweise fest:

- streng monoton fallend
- Annäherung an 3 für $x \to -\infty$
- verläuft durch Ursprung $(0\,|\,0)$

Am schnellsten zu einem Ergebnis gelangt man durch charakteristische Punkte. Die passende Funktion muss also bei $x = 0$ den Funktionswert 0 haben. Durch Einsetzen kann man zeigen, dass es sich dabei nur um die Gleichung $n(x)$ handeln kann.

Aufgaben - Exponentialfunktionen

1. Weisen Sie auch den Funktionsgraphen „2" bis „5" der obigen Abbildung die passende Funktionsgleichung zu.

2. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

   a) $f_1(x) = e^{2x+1}$ b) $f_2(x) = -4e^{-2x+5}$ c) $f_3(x) = 23 + e^{-4x-2} \cdot 7$

3. Berechnen Sie jeweils die erste und zweite Ableitung folgender verknüpfter Funktionen:

   a) $g_1(x) = e^{x} \cdot (25x + 7)$ b) $g_2(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-5x+7} + 8$
   c) $g_3(x) = (x + 1) \cdot 5 \cdot (e^{x+27} + 3)$

4. Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen jeweils exakte Werte für die Nullstelle, die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse, sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte.

   $h(x) = 5x \cdot e^{5x} \qquad k(x) = (-x^2 + x + 1) \cdot e^{-x+1}$

Kurzlösungen (ausführliche Lösungen finden Sie über unseren QR-Code online):

1. Graph 2: $h(x)$; Graph 3: $f(x)$; Graph 4: $k(x)$; Graph 5: $g(x)$
2. $f_1'(x) = 2e^{2x+1}$ $f_2'(x) = 8e^{-2x+5}$ $f_3'(x) = -28e^{-4x-2}$
3. $g_1'(x) = (25x + 32) \cdot e^{x}$ $g_1''(x) = (25x + 57) \cdot e^{x}$
   $g_2'(x) = (-5x^2 + 2x + 5) \cdot e^{-5x+7}$ $g_2''(x) = (25x^2 - 20x - 23) \cdot e^{-5x+7}$
   $g_3'(x) = (5x + 10)e^{x+27} + 15$ $g_3''(x) = (5x + 15)e^{x+27}$
4. $h(x)$: **NST:** $x_1 = 0$ **Schnitt y-Achse:** $S_y\,(0\,|\,0)$ **Extrema:** TIP $\left(-\frac{1}{5}\,\middle|\,-e^{-1}\right)$
   $k(x)$: **NST:** $x_{1;2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ **Schnitt y-Achse:** $S_y\,(0\,|\,e)$ **Extrema:** HOP $(0\,|\,e)$; TIP $\left(3\,\middle|\,-5e^{-2}\right)$

Logarithmen

Logarithmen

Logarithmieren ist die Umkehrung zum Potenzieren. Zum Logarithmus gehört allgemein eine **Basis** und eine entsprechende Zahl, die logarithmiert wird. Mithilfe des Logarithmus können Gleichungen, die Exponenten enthalten aufgelöst werden, da gilt:

$$b^x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \log_b(y)$$

Der Logarithmus hat also die selbe Basis b, wie die zugehörige Exponentialfunktion.
Da die natürlichen Exponentialfunktionen mit der Basis e eine besondere Rolle spielen, tut dies auch der Logarithmus zur Basis e. Er heißt natürlicher Logarithmus und wird statt $\log_e(x)$ als $\ln(x)$ bezeichnet.
Für das Rechnen mit Logarithmen gibt es noch einige Regeln, die beachtet werden müssen, den Umgang aber auch erleichtern:

- für Produkte gilt: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- für Quotienten gilt: $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- für Potenzen gilt: $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$

Zu beachten ist, dass das Argument eines Logarithmus stets > 0 sein muss!

Gesucht ist die Lösung der Gleichung $5 = 10 \cdot 2^{x+1}$. Die Gleichung kann zunächst umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & 5 = 10 \cdot 2^{x+1} && \mid :10 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{2} = 2^{x+1} \end{aligned}$$

Nun kann logarithmiert werden. Die Basis des Logarithmus ist die Basis des Exponentialterms, also 2:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} = 2^{x+1} && \mid \log_2(\,) \\ \Longleftrightarrow \quad & \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2^{x+1}) \\ \Longleftrightarrow \quad & \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = x + 1 && \mid -1 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

Entsprechend mit dem Taschenrechner berechnet, ergibt sich als Lösung der Gleichung also $x = -2$.
Hinweis: Durch die Anwendung des Logarithmus lassen sich auch Gleichungen des Typs $e^{g(x)} = e^{h(x)}$ lösen, da gilt:

$$e^{g(x)} = e^{h(x)} \quad \mid \ln(\,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(x) = h(x)$$

Vektoren

Vektoren

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ werden als Spaltenvektoren dargestellt und durch ihre Koordinaten beschrieben. Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein **Ortsvektor** entspricht dem Pfeil vom Koordinatenursprung zu einem bestimmten Punkt. Die Koordinaten des Ortsvektors ergeben sich aus den Koordinaten des Punktes. Beispiel:

$$\text{Punkt } P\,(3\,|\,2\,|\,6) \quad \Rightarrow \quad \text{Ortsvektor } \overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ein Pfeil, der zwei Punkte verbindet, repräsentiert einen Vektor zwischen diesen beiden Punkten. Die Koordinaten dieses Vektors ergeben sich aus den Koordinaten der beiden Punkte nach der Merkregel „Spitze minus Fuß". Beispiel:

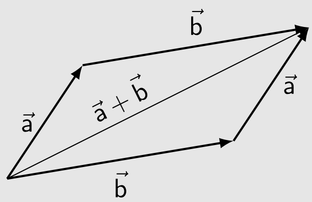
$$\text{Punkte } P\,(3\,|\,2\,|\,6) \text{ und } Q\,(4\,|\,-1\,|\,3) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Einfache Vektoroperationen

Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren und das Produkt eines Skalares (Zahl) mit einem Vektor wird jeweils komponentenweise berechnet:

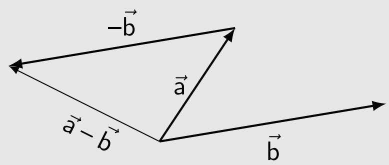
Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



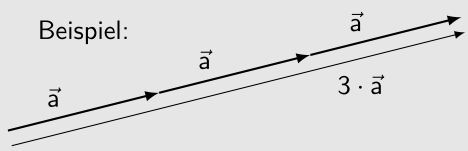
Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar

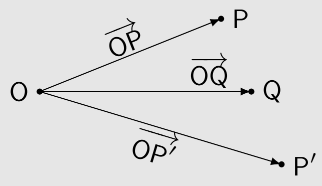
$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$



Besondere Ortsvektoren - Spiegelpunkt bezüglich eines Punktes

Wird ein Punkt P an einem Punkt Q gespiegelt, so gilt für den Ortsvektor des Spiegelpunktes P′:

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$



Beispiel

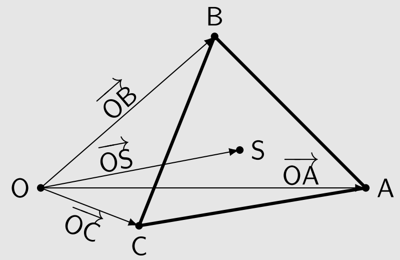
Wird der Punkt $P\,(3\,|-4\,|\,1)$ am Punkt $Q\,(0\,|\,3\,|-5)$ gespiegelt, erhält man den Punkt P′. Gesucht sind dessen Koordinaten.

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \\ 2 \cdot 3 - (-4) \\ 2 \cdot (-5) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'\,(-3\,|\,10\,|-11)$$

Besondere Ortsvektoren - Schwerpunkt eines Dreiecks

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes S eines Dreiecks ABC gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



Beispiel

Gesucht sind die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks, welches durch die Punkte $A\,(1\,|-2\,|\,4)$, $B\,(3\,|\,2\,|\,5)$ und $C\,(-3\,|\,1\,|-2)$ gebildet wird.

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3 - 3 \\ -2 + 2 + 1 \\ 4 + 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{7}{3}\right)$$

Skalarprodukt

Bildet man das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt sich ein Skalar (Zahl). Das Skalarprodukt wird mit dem Zeichen $\circ$ angezeigt und kann im $\mathbb{R}^3$ wie folgt berechnet werden:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Assoziativgesetz (Skalar $s \in \mathbb{R}$): $(s \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (s \cdot \vec{b})$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Anwendungen des Skalarprodukts

Für den **Betrag** eines Vektors im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den **Winkel** φ zwischen zwei Vektoren gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (\text{für } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

Wegen $\cos(90^\circ) = 0$ folgt daraus insbesondere:
Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich **null**, so stehen diese **orthogonal** (senkrecht) zueinander.

Beispiele

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist das Resultat des Skalarprodukts $\vec{a} \circ \vec{b}$ und $\vec{a} \circ \vec{c}$, sowie der exakte Wert der Beträge $|\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 3 - 4 + 20 = 19$$

$$\vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3 - 2 - 8 = -13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \circ \vec{b}} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \circ \vec{c}} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Linearkombination von Vektoren

Ergibt die Addition von Vektoren $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n)$ und deren Vielfachen $(q_1 \cdot \vec{a}_1, q_2 \cdot \vec{a}_2, q_3 \cdot \vec{a}_3, ..., q_n \cdot \vec{a}_n)$ einen neuen Vektor $\vec{x}$, so ist dieser die **Linearkombination** der anderen Vektoren. Liegt eine Linearkombination von Vektoren vor, dann bildet man mit diesen Vektoren eine sogenannte **Vektorkette**:

$$q_1 \cdot \vec{a}_1 + q_2 \cdot \vec{a}_2 + q_3 \cdot \vec{a}_3 + ... + q_n \cdot \vec{a}_n = \vec{x}$$

Bei der Prüfung, ob sich ein Vektor als Linearkombination von anderen Vektoren darstellen lässt, ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $q_1, q_2, q_3 ...$.

Beispiel

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gefragt ist, ob sich die Vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lassen.
Man setzt jeweils die Gleichung gemäß obiger Vorschrift an und erhält dann zeilenweise drei Gleichungen.

Vektor $\vec{c}$

$$q_1 \cdot \vec{a} + q_2 \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

$$q_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & q_1 \cdot 2 + q_2 \cdot 4 = -12 \\ \text{(II)} & q_1 \cdot 0 + q_2 \cdot 3 = -9 \\ \text{(III)} & q_1 \cdot 0 + q_2 \cdot 2 = -6 \end{array}$$

Die Zeilen (II) und (III) können einzeln betrachtet werden:

$$\text{(II)} \quad q_2 \cdot 3 = -9 \qquad\qquad \text{(III)} \quad q_2 \cdot 2 = -6$$

Dies lässt in beiden Zeilen nur die Lösung $\underline{q_2 = -3}$ zu. Eingesetzt in Zeile (I) folgt:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & q_1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = -12 & | + 12 \\ \Longleftrightarrow & 2q_1 = 0 & | : 2 \\ \Longleftrightarrow & \underline{q_1 = 0} & \end{array}$$

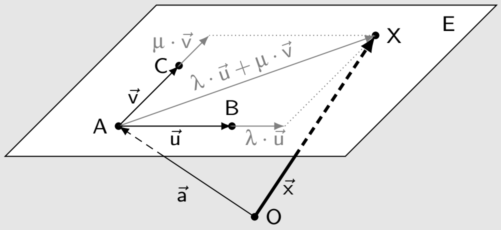
Demnach lässt sich $\vec{c}$ mit $q_1 = 0$ und $q_2 = -3$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\vec{c} = 0 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} = -3 \cdot \vec{b}$$

Wenn wie hier ein Vektor ein **Vielfaches** eines anderen Vektors ist, so werden diese beiden Vektoren als **kollinear** bezeichnet und **sind parallel**.

Ebenengleichung in Parameterform

Eine Ebene wird definiert durch einen Aufpunkt und zwei (nicht parallele) Richtungen. In der Skizze ist A der Aufpunkt und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ geben die Richtungen der Ebene vor. Die allgemeine Schreibweise der Parametergleichung einer Ebene lautet:



$$E\colon \vec{x} = \overbrace{\vec{a}}^{\text{Stützvektor}} + \lambda \cdot \overbrace{\vec{u}}^{\text{Richtungs–/ Spannvektor}} + \mu \cdot \overbrace{\vec{v}}^{\text{Richtungs–/ Spannvektor}} \quad \text{mit } \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

Die Vorgaben, aus denen eine Gleichung der Ebene bestimmt werden muss, sind dabei zumeist...

... die Angabe von drei nicht kollinearen (nicht auf einer Geraden) Punkten, die in der Ebene liegen.

... die Angabe einer Gerade und eines Punktes (der nicht auf der Geraden liegt), die in der Ebene liegen.

Beispiele

1. Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, in welcher die Punkte $A(1|0|0)$, $B(4|-2|2)$ und $C(3|1|0)$ liegen.

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}4-1\\-2-0\\2-0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix}}^{\text{„Dreipunkteform"}}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

2. Gesucht ist die Gleichung der Ebene F in Parameterform, in welcher der Punkt $D(3|2|1)$ und die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$ liegen.
   Hier können Stütz- und Richtungsvektor der Geraden als Stütz- und Richtungsvektor der Ebene verwendet werden. Ein weiterer Richtungsvektor ergibt sich aus Aufpunkt der Gerade und Punkt D:

$$F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}3-1\\2-0\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{mit } \sigma,\tau \in \mathbb{R}$$

Der Punkt liegt in der Ebene.
Für die Punktprobe mit der Ebene in Koordinatenform, können die Koordinaten des Punktes in die Ebene eingesetzt werden und es wird überprüft, ob sich eine wahre Aussage ergibt.

$$\begin{aligned} & -5x-1-3x_2+6x_3-6=0 \\ \Rightarrow\quad & -5\cdot 0-3\cdot 4+6\cdot 3-6=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & 0=0 \qquad \text{(wahre Aussage)} \end{aligned}$$

Der Punkt liegt also in der Ebene.

Lagebeziehung Gerade-Gerade

Zwei Geraden können...

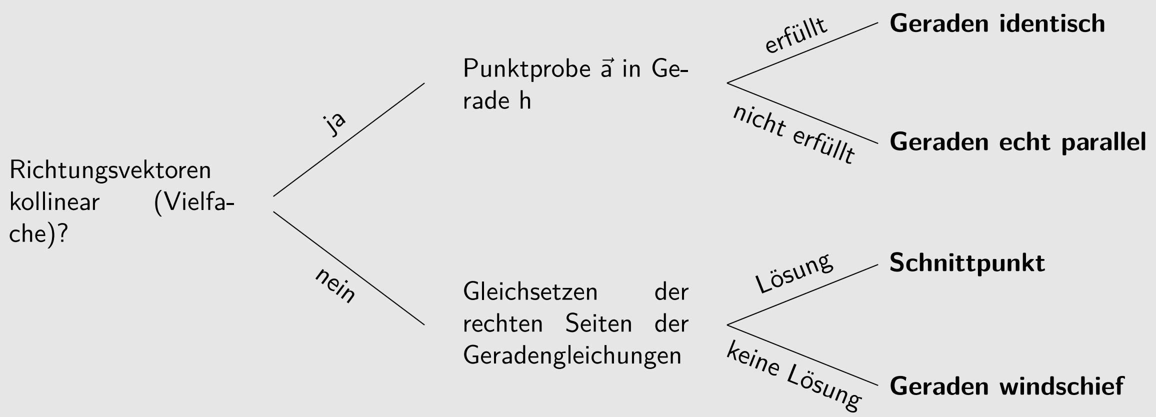
... identisch verlaufen,

... echt parallel verlaufen,

... sich schneiden oder

... windschief zueinander verlaufen.

Um zu ermitteln, wie zwei Geraden zueinander liegen, kann für zwei Geraden $g\colon \vec{x}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{u}$ und $h\colon \vec{x}=\vec{b}+\mu\cdot\vec{v}$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ folgenden Schritten gefolgt werden:



Beispiele

1. Gegeben sind die Geraden $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
   Gefragt ist, wie die beiden Geraden zueinander liegen.
   Zunächst wird überprüft, ob die Richtungsvektoren der Geraden Vielfache voneinander sind. Dafür wird angesetzt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=p\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} \text{I} & 1=-2p \\ \text{II} & 0=0p \\ \text{III} & 3=-6p \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} p=-\frac{1}{2} \\ p\in\mathbb{R} \\ p=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Aufgabe 5 - Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2017, AII 1
Themen: Funktionsterm aufstellen, Nullstellen, Monotonie, Extrempunkte, Wendepunkte, Graphische Darstellung, Fläche

1.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades mit $D_f = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zur y-Achse und hat einen Wendepunkt $W_1\,(1\,|\,2{,}5)$. Die Tangente G_t im Punkt W_1 besitzt die Gleichung $t : y = 4x - 1{,}5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x).
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)$] **7 BE**

1.2 Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Erklären Sie die Bedeutung der Vielfachheit dieser Nullstellen für den Graphen G_f. **5 BE**

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f. **8 BE**

1.4 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph G_f genau zwei Wendepunkte besitzt und geben Sie die Koordianten des zweiten Wendepunkts an. Berechnen Sie auch die x-Koordinaten sämtlicher Punkte von G_f, welche die gleichen y-Koordinaten wie die Wendepunkte haben. **7 BE**

1.5 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-5 \leq y \leq 5$ benötigt.
Maßstab: 1 LE = 1 cm. **5 BE**

1.6 Zeigen Sie, dass an der Stelle $x = -2$ die Gleichung $f(x) - f'(x) = 0$ gilt und bestimmen Sie alle weiteren Stellen mit dieser Eigenschaft. Erklären Sie, was das Ergebnis für den Graphen G_f bedeutet. **7 BE**

1.7 Geben Sie exakt die Nullstellen und die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion f' an und zeichnen Sie den Graphen $G_{f'}$ im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ in das vorhandene Koordinatensystem mit Farbe ein. **4 BE**

1.8 Die Graphen G_f und $G_{f'}$ schließen ein endliches Flächenstück ein, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.
Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. **5 BE**

Lösungsvorschlag A5 Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2017, AII 1

1.0 Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f vierten Grades mit $D_f = \mathbb{R}$, deren Graph symmetrisch zur y-Achse verläuft und einen Wendepunkt $W_1\,(1\,|\,2{,}5)$ besitzt. Die Tangente in diesem Punkt W_1 besitzt die Gleichung $t\colon y = 4x - 1{,}5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.1 **Bestimmen des Funktionsterms**

Eine allgemeine Funktion vierten Grades besitzt die Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Da die Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, entfallen allerdings alle ungeraden Exponenten, sodass sich die allgemeine Form auf $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ reduziert. Damit gilt allgemein weiterhin:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx \qquad \Longleftrightarrow \qquad f''(x) = 3 \cdot 4ax^2 + 2c = 12ax^2 + 2c$$

Die Funktion hat den Wendepunkt $W\,(1\,|\,2{,}5)$. Daraus ergeben sich zwei Bedingungen. Zum einen verläuft sie also durch den Punkt $(1\,|\,2{,}5)$:

$$\begin{aligned} && f(1) &= 2{,}5 \\ \Longleftrightarrow && 1^4a + 1^2c + e &= 2{,}5 \\ \Longleftrightarrow && a + c + e &= 2{,}5 \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Weiterhin besitzt sie also die Wendestelle $x = 1$, die zweite Ableitung hat an dieser Stelle also eine Nullstelle:

$$\begin{aligned} && f''(1) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 12 \cdot 1^2a + 2c &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 12a + 2c &= 0 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Eine dritte Bedingung ist gegeben durch die Tangente. Die Steigung der Tangente $m_t = 4$ an den Punkt W_1 entspricht der Steigung der Funktion $f(x)$ an dieser Stelle und damit dem Wert der ersten Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} && f'(1) &= 4 \\ \Longleftrightarrow && 4 \cdot 1^3a + 2 \cdot 1c &= 4 \\ \Longleftrightarrow && 4a + 2c &= 4 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Um das aus den Gleichungen I, II und III resultierende Gleichungssystem zu lösen gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Umformen der Gleichungen

Zunächst wird nun Gleichung (II) umgeformt:

$$\begin{aligned} && 12a + 2c &= 0 \qquad && |-12a \\ \Longleftrightarrow && 2c &= -12a && |:2 \\ \Longleftrightarrow && c &= -6a && \end{aligned}$$

Dieser Wert kann nun in Gleichung (III) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} && 4a + 2c &= 4 \\ \Longleftrightarrow && 4a + 2 \cdot (-6a) &= 4 \end{aligned}$$

Übungsteil

$$\begin{aligned} \iff \quad & -8a = 4 && \mid :(-8) \\ \iff \quad & \underline{a = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach obiger Bedingung direkt ein Wert für c:

$$\underline{c} = -6a = -6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{3}$$

Die Werte für a und c werden nun in Gleichung (I) eingesetzt um einen Wert für e zu bestimmen:

$$\begin{aligned} & a + c + e = 2{,}5 \\ \iff \quad & -\frac{1}{2} + 3 + e = 2{,}5 && \mid -2{,}5 \\ \iff \quad & \underline{e = 0} \end{aligned}$$

<u>*2. Möglichkeit:* Gauß-Algorithmus</u>

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a + c + e = 2{,}5 \\ \text{II} & 12 + 2c = 0 \\ \text{III} & 4a + 2c = 4 \end{array}$$

wird mithilfe des Gauß-Algorithmus gelöst:

$$\begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & c & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2{,}5 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \Rightarrow \text{II}' \\ \text{III}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & -10 & -12 & -30 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \text{II} - 12 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \Rightarrow \\ \text{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & -10 & -12 & -30 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ 5 \cdot \text{III}' - \text{II}' \end{array}$$

Aus Zeile III" folgt:

$$\begin{aligned} & -8e = 0 && \mid :(-8) \\ \iff \quad & \underline{e = 0} \end{aligned}$$

Einsetzen von e in II':

$$\begin{aligned} & -10c - 12 \cdot 0 = -30 \\ \iff \quad & -10c = -30 && \mid :(-10) \\ \iff \quad & \underline{c = 3} \end{aligned}$$

Einsetze von c und e in I:

$$\begin{aligned} & a + 3 + 0 = 2{,}5 && \mid -3 \\ \iff \quad & \underline{a = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also $f(x) = a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)}}$.

Aufgabe 11 - Borkenkäfer (Anwendungsaufgabe): FOS12 MT 2015, AII 3
Themen: Parameter bestimmen, Extrempunkte, Wendepunkt

1.0 Um die Ausbreitung von Borkenkäfern in bayerischen Wäldern zu erforschen, wird der Befall eines ausgewählten Baumes über den Zeitraum von 12 Monaten untersucht. Die Anzahl der in diesem Baum befindlichen Borkenkäfer kann näherungsweise durch den Term $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2-12t)}$ mit $t, \lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, \lambda < 0$ beschrieben werden, wobei N_0 die Anzahl der Borkenkäfer zu Beginn des Beobachtungszeitraums und t die Zeit in Monaten ab Beobachtungsbeginn ist.

Es ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach dem ersten Monat verdreifacht hat und nach einem weiteren Monat 133 Borkenkäfer gezählt wurden.

Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden, sofern nicht anders gefordert. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Übungsteil

1.1 Bestimmen Sie λ und N_0. Runden Sie dabei N_0 auf eine ganze Zahl.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $\lambda = -0{,}10$ und $N_0 = 18$. **5 BE**

1.2 Ab einem Befall von 540 Borkenkäfern gilt der Baum als dauerhaft geschädigt. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0, zu dem diese Anzahl erstmalig erreicht ist. **5 BE**

1.3 Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_{max}, zu dem der Befall des Baumes am größten ist. [Mögliches Teilergebnis: $\dot{N}(t) = -3{,}6 \cdot e^{-0{,}10 \cdot (t^2-12t)} \cdot (t-6)$] **4 BE**

1.4 $\ddot{N}$ besitzt nur die beiden einfachen Nullstellen $t_{1,2} = 6 \pm \sqrt{5}$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_v, zu dem sich die Borkenkäfer am stärksten vermehren. **5 BE**

Lösungsvorschlag A11 Borkenkäfer: FOS12 MT 2015, AII 3

1.0 Gegeben ist die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda(t^2-12t)}$ mit $t,\lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, \lambda < 0$, die die Anzahl der Borkenkäfer in einem Baum beschreibt.

1.1 **Bestimmen der Parameter**
Zunächst ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach einem Monat verdreifacht hat. Es gilt also $N(1) = 3 \cdot N_0$. Setzt man dies in den Funktionsterm $N(t)$ ein, kann λ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
& & 3N_0 &= N(1) & \\
&\Longleftrightarrow & 3N_0 &= N_0 \cdot e^{\lambda\cdot(1^2-12)} & \mid : N_0 \\
&\Longleftrightarrow & 3 &= e^{-11\lambda} & \mid \ln(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & \ln(3) &= -11\lambda & \mid : (-11) \\
&\Longleftrightarrow & \lambda &= -\frac{\ln(3)}{11} & \\
&\Longleftrightarrow & \lambda &\approx \underline{-0{,}10} &
\end{aligned}$$

Nach einem weiteren Monat werden 133 Borkenkäfer gezählt, das heißt $N(2) = 133$. Setzt man dies und den ermittelten Wert für λ ein, kann N_0 bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
& & 133 &= N(2) & \\
&\Longleftrightarrow & 133 &= N_0 \cdot e^{-0{,}1\cdot(2^2-12\cdot 2)} & \\
&\Longleftrightarrow & 133 &= N_0 \cdot e^2 & \mid : e^2 \\
&\Longleftrightarrow & N_0 &= \frac{133}{e^2} & \\
&\Longleftrightarrow & N_0 &\approx \underline{18} &
\end{aligned}$$

1.2 **Zeitpunkt zu dem erstmals eine schädliche Anzahl erreicht wird**
Im Zeitpunkt, zu dem diese Anzahl erstmalig eintritt, gilt $N(t_0) = 540$:

$$\begin{aligned}
& & N(t) &= 540 & \\
&\Longleftrightarrow & 18 \cdot e^{-0{,}1\cdot(t^2-12t)} &= 540 & \mid : 18 \\
&\Longleftrightarrow & e^{-0{,}1\cdot(t^2-12t)} &= 30 & \mid \ln(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & -0{,}1 \cdot (t^2 - 12t) &= \ln(30) & \mid -\ln(30) \\
&\Longleftrightarrow & -0{,}1t^2 + 1{,}2t - \ln(30) &= 0 & \\
&\Longleftrightarrow & t_{1,2} &= \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{(-1{,}2)^2 - 4 \cdot (-0{,}1) \cdot (-\ln(30)}}{2 \cdot (-0{,}1)} & \\
&\Longleftrightarrow & t_{1,2} &= \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{1{,}44 - 0{,}4\ln(30)}}{-0{,}2} & \\
&\Longleftrightarrow & t_{1,2} &= \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{0{,}04 \cdot (36 - 10\ln(30))}}{-0{,}2} & \\
&\Longleftrightarrow & t_{1,2} &= \frac{-1{,}2 \pm 0{,}2\sqrt{36 - 10\ln(30)}}{-0{,}2} &
\end{aligned}$$

$$\iff \qquad t_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 10\ln(30)}$$
$$\iff \qquad t_1 \approx 4{,}59 \quad \text{oder} \quad t_2 \approx 7{,}41$$

Die Anzahl ist demnach erstmalig nach $\underline{\underline{t_0 \approx 4{,}59}}$ Monaten erreicht.

1.3 **Zeitpunkt des größten Befalls**

Der größte Befall entspricht dem Maximum der Funktion N(t). Um dieses zu finden wird zunächst die erste Ableitung $\dot{N}(t)$ mithilfe der Kettenregel gebildet:

$$
\begin{aligned}
N(t) &= 18 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \\
\dot{N}(t) &= 18 \cdot \left[e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (-0{,}1(t^2-12t))'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 18 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (-0{,}1 \cdot (2t-12)) && \text{(Anwendung Kettenregel)} \\
&= -1{,}8 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (2t-12) \\
&= -3{,}6 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (t-6) && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen der Ableitung entsprechen den möglichen Extremstellen der Funktion. Der Faktor der Ableitungsfunktion, der die Exponentialfunktion enthält kann nicht null werden. Damit gilt:

$$\dot{N}(t) = 0 \iff (t-6) = 0 \iff t = 6$$

Bei $t = 6$ wechselt die Ableitungsfunktion von einem positiven zu einem negativen Vorzeichen, es handelt sich also um ein Maximum. Der Befall ist demnach nach 6 Monaten am größten.

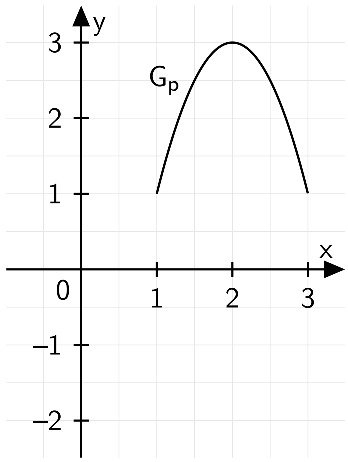
1.4 **Zeitpunkt der stärksten Vermehrung**

Für die beiden gegebenen Werte gilt:

$$t_1 = 6 - \sqrt{5} \approx 3{,}76 \qquad t_2 = 6 + \sqrt{5} \approx 8{,}24$$

Dies sind die Nullstellen von $\ddot{N}(t)$. An diesen Stellen ist $\dot{N}(t)$ demnach extremal. Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem sich die Käfer am stärksten vermehren. Dies entspricht einem Maximum von $\dot{N}$. Nach Teilaufgabe 3.3 ist aber bekannt, dass $\dot{N}(t) < 0$ für $t > 6$ und $\dot{N}(t) > 0$ für $t < 6$. Für ein Maximum muss aber $\dot{N}(t) > 0$ gelten. Damit ist $t_v < 6$. Aus den gegebenen beiden Werten liegt nur einer in diesem Bereich. Zum Zeitpunkt $\underline{\underline{t_v = 6 - \sqrt{5} \approx 3{,}76}}$ vermehren sich die Käfer also am stärksten.

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
Musterprüfung	oHm AI	$f_k: x \longmapsto -\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)$	**149**	NST
		$g: x \longmapsto \frac{1}{4}(2x^2-2x+3)\cdot e^{2x}$	**149**	NST; Monotonie; Grenzwert; Wertemenge
	oHm AII	$p(x)=-2\cdot(x-2)^2+3 \wedge k(x)=x-2$	**153**	Schnittpunkte; Integral
		$f_a(x)=(ax^2+2x-1)\cdot e^{ax}$	**153**	Grenzwert; NST; Integral
	mHm AI	$f_a: x \longmapsto -x^3+\frac{a}{4}x^2-3x+a$	**162**	Tangente; NST; Extrema; Integral
		$g(x)=\frac{1}{50}(-x^3+27x+46)$	**162**	Fkt. aufstellen; Krümmung
		$b(t)=20(t+4)\cdot e^{-(t-12)^2}$	**163**	Def. Menge; Extrema
	mHm AII	$f_k(x)=x^3-3x^2+kx$	**174**	Fkt. aufstellen; NST; Tangente; Wendepunkte; Integral
		$G(t)=c\cdot(t-s)^2\cdot e^{-(t-1)}$	**174**	Fkt. aufstellen; Grenzwert; Extrema; Wendepunkte
2019	oHm A	$f'_a: x \longmapsto (x-a)^2\cdot(x+3)$	**192**	NST
		$s: x \longmapsto e^{-x^2}$	**193**	Grenzwert
		$t: x \longmapsto e^{2x}-e^x$	**193**	Grenzwert
		$u: x \longmapsto e^{(2x)^2}$	**193**	Grenzwert
	mHm AI	$f: x \longmapsto ax^4+bx^3+c$	**200**	Fkt. aufstellen; Extrema; Fläche
		$h_k: x \longmapsto 2x^3+4kx^2+8x$	**200**	Symmetrie; NST
		$B(t)=3+\left(\frac{-1}{20}t^2+\frac{1}{5}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}t+a}$	**200**	Fkt. aufstellen; Grenzwert; Monotonie
	mHm AII	$f_a: x \longmapsto (x-a)\left(x^2-\frac{1}{4}a\right)$	**209**	NST; Tangente
		$f_4(x)=(x-4)(x^2-1)$	**209**	Integral
		$h: t \longmapsto a\cdot t^2\cdot e^{b\cdot t}+1$	**210**	Fkt. aufstellen; Extrema
2020	oHm A	$f_a: x \longmapsto (ax^2-1)\cdot e^{1-2x}$	**226**	NST; Grenzwert; Extrema
	mHm AI	$f_k: x \longmapsto \frac{1}{10}(x+3)^2(x-3)(x-2k)$	**233**	NST; Extrema
		$w: x \longmapsto 2{,}2x+5{,}9$	**233**	Fläche
		$p: t \longmapsto 100\cdot t^2\cdot e^{a\cdot t}+1$	**234**	Fkt. aufstellen; Wendepunkt
	mHm AII	$h: x \longmapsto \frac{1}{8}\cdot(-x^3+3x^2+9x+5)$	**241**	Extrema; Fläche
		$f_a: x \longmapsto \frac{1}{2}x^3+4x\cdot x^2+1$ und $g_a: x \longmapsto 1-4a\cdot x$	**241**	NST
		$z(t)=3+(0{,}2t^2-4t+20)\cdot e^{0{,}3t-3}$	**242**	Monotonie; Wendepunkt; Fläche
Lösungen 2017-2020:		StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau) und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		



1.0 Nebenstehende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Graphen der quadratischen Funktion $p(x) = -2 \cdot (x-2)^2 + 3$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Gegeben ist zusätzlich die lineare Funktion $k(x) = x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie rechnerisch den exakten Wert der Abszisse, an welcher die beiden Graphen denselben Anstieg haben. **3 BE**

1.3 Der Graph der quadratischen Funktion, der Graph der linearen Funktion, die x-Achse und die Gerade $x = 1$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graph von k und die Gerade $x = 1$ in die gegebenen Abbildung ein und markieren Sie das Flächenstück. Berechnen Sie sodann die Maßzahl des Flächeninhaltes. **4 BE**

2.0 Betrachtet werden die Funktionen $f_a(x) = (ax^2+2x-1)\cdot e^{ax}$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

2.1 Betrachten Sie den Fall $a = 0$. Was ergibt sich für die Funktion? **2 BE**

2.2 Im Folgenden soll nun $a \neq 0$ gelten.

Finden Sie jeweils alle Werte für a, die die folgenden Aussagen erfüllen.

a)Es gilt $x \to \infty$: $f_a(x) \to 0$.

b)Die Funktion $f_a(x)$ besitzt genau eine Nullstelle.

c)Die Funktion $f_a(x)$ besitzt mehrere Nullstellen.

d)Die Funktion verläuft durch den Punkt $(0\,|\,-1)$.

4 BE

2.3 Für diese Teilaufgabe soll $a = 2$ gelten.
Zeigen Sie, dass $F(x) = (x^2 - \frac{1}{2}) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von $f_2(x)$ ist und berechnen Sie damit den exakten Wert des folgenden Integrals:

$$\int_0^4 f_2(x)dx$$

4 BE

Muster

1.1 **Koordinaten der Schnittpunkte**

Es werden die Schnittpunkte der beiden Funktionen gesucht. Dafür werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

$$
\begin{aligned}
& p(x) = k(x) \\
\iff & -2(x-2)^2 + 3 = x - 2 \\
\iff & -2(x^2 - 4x + 4) + 3 = x - 2 \\
\iff & -2x^2 + 8x - 5 = x - 2 \qquad \mid -(x-2) \\
\iff & -2x^2 + 7x - 3 = 0 \\
\iff & x_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} \\
\iff & x_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} \\
\iff & x_{1;2} = \frac{-7 \pm 5}{-4} \\
\iff & x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad x_2 = 3
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in eine der Funktionsgleichungen ergeben sich die Funktionswerte an diesen Stellen. Zur leichteren Berechnung wird in die lineare Funktion eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
k\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\
k(3) &= 3 - 2 = 1
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte lauten $\underline{\underline{\left(\frac{1}{2} \middle| -\frac{3}{2}\right)}}$ und $\underline{\underline{(3 \mid 1)}}$.

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitungen**

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktionen bestimmt:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= -2(x-2)^2 + 3 = -2(x^2 - 4x + 4) + 3 = -2x^2 + 8x - 5 \\
p'(x) &= -2 \cdot 2x + 8 = -4x + 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k(x) &= x - 2 \\
k'(x) &= 1
\end{aligned}
$$

Wert der Abszisse mit übereinstimmender Steigung

Um den Wert der Abszisse zu bestimmen, an dem die beiden Funktionsgraphen dieselbe Steigung aufweisen, werden die Terme der ersten Ableitung gleichgesetzt:

$$
\begin{aligned}
& p'(x) = k'(x) \\
\iff & -4x + 8 = 1 \qquad \mid -8 \\
\iff & -4x = -7 \qquad \mid :(-4) \\
\iff & \underline{\underline{x = \frac{7}{4}}}
\end{aligned}
$$

Muster

1.0 Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'_k(x) = 3x^2 - 6x + k$ mit $D_{f'_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion $f_k(x)$, wenn der Graph G_{f_k} dieser Funktion durch den Koordinatenursprung verläuft.
[mögliches Ergebnis: $f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx$] **2 BE**

1.2 Bestimmen Sie Abszisse, Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen in Abhängigkeit von k. **5 BE**

1.3 Ermitteln Sie einen Wert für k, so dass die Tangente an $x = \frac{5}{2}$ die Steigung 3 hat. **2 BE**

1.4 Zeigen Sie, dass die Wendestelle der Funktion unabhängig von k, die Koordinaten des Wendepunktes jedoch nicht unabhängig von k sind und geben Sie diese Koordinaten an. **4 BE**

1.5 Ermitteln Sie einen Wert für k, so dass das Integral $\int_1^2 f_k(x)dx$ den Wert $\frac{23}{4}$ annimmt. **4 BE**

1.6 Stellen Sie die Graphen von $f_2(x)$ und $f_3(x)$ für $-0{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ in einem kartesischen Koordinatensystem grafisch dar.
Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm. **4 BE**

2.0 Für die Herstellung hochprozentigen Alkohols wird eine vorher angesetzte Maische in einer Destille erhitzt. Da der Siedepunkt von Alkohol geringer als der von Wasser ist, kann damit der Alkohol vom Wasser getrennt werden. Das Produkt wird dann abgekühlt und aufgefangen und gegebenenfalls weiterverarbeitet. Im Prozess werden jedoch noch weitere, teilweise giftige Stoffe freigesetzt, die vom Endprodukt fernzuhalten sind, da der entstandene Alkohol sonst ungenießbar wird. Zu Beginn des Destilliervorgangs ensteht der sogenannte Vorlauf, der separat aufgefangen wird. Danach ensteht das eigentliche Produkt. Nach einer gewissen Zeit setzt dann der sogenannte Nachlauf ein, der ebenfalls vom Produkt separiert wird. Vor- und Nachlauf enthalten die schädlichen Stoffe und werden deshalb entsorgt.
Eine Größe, mit der man die Qualität des entstandenen Produkts einschätzen kann ist die Güte des Alkohols. Im Folgenden soll die zeitliche Entwicklung der Güte G(t) des Produkts während des Destilliervorgangs untersucht werden. Dabei gibt G(t) die Güte in Prozent und t die Zeit in Minuten nach Beginn des Vorgangs an.
Die Werte sind im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

2.1 Bei einem bestimmten Hersteller werden die folgenden Werte aufgenommen:

Zeit t in min	0	1	2	3	4	6	8	10
G(t) in %	0	50	75	60	40	12	5	0

Stellen Sie die Wertepaare in einem kartesischen Koordinatensystem geeignet dar. **3 BE**

2.2.0 Um genauere Daten zu finden soll die Kurve durch eine passende Modellfunktion dargestellt werden. Als Ansatz wird die Funktion $G(t) = c \cdot (t - s)^2 \cdot e^{-(t-1)}$ mit $c, s \in \mathbb{R}$ verwendet.

2.2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter c und s, wenn die Werte der Tabelle für 0 Minuten und für 1 Minute dem Modell zu Grunde gelegt werden.
[mögliches Ergebnis: $c = 50, s = 0$] **4 BE**

1.1 Zunächst werden die allgemeinen Stammfunktionen von $f'_k(x)$ bestimmt, da eine dieser Funktion die gesuchte Funktion $f_k(x)$ ist:

$$\int f'_k(x)dx = x^3 - 3x^2 + kx + C$$

Zusätzlich ist gegeben, dass der Graph der Funktion $f_k(x)$ durch den Koordinatenursprung verläuft, sodass damit ein Wert für C gefunden werden kann:

$$\begin{aligned} & f_k(0) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 0^3 - 3 \cdot 0^2 + k \cdot 0 + C = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & C = 0 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also $\underline{\underline{f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx}}$.

1.2 Als erstes werden die Nullstellen allgemein ermittelt:

$$\begin{aligned} & f_k(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^3 - 3x^2 + kx = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x^2 - 3x + k) \cdot x = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 3x + k = 0 \end{aligned}$$

Für den quadratischen Term gilt:

$$x_{2;3} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4k}}{2}$$

Es werden nun folgende Überlegungen getroffen:

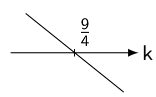
1. Überlegung: Wieviele Nullstellen hat der quadratische Term in Abhängigkeit der Diskriminante.

2. Überlegung: Für welche Werte von k fallen Nullstellen zusammen.

Es wird untersucht, für welche Wert von k die Diskriminante $D = 9 - 4k$ gleich null, also die Bedingung $D = 0$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} & D = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 9 - 4k = 0 \qquad |-9 \\ \Longleftrightarrow \quad & -4k = -9 \qquad |:(-4) \\ \Longleftrightarrow \quad & k = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Nun kann in Abhängigkeit von k eine Vorzeichentabelle der Diskriminante erstellt werden:

k	$k < \frac{9}{4}$	$k = \frac{9}{4}$	$\frac{9}{4} < k$	Skizzen
Diskriminante: D	+	0	–	

1.0 Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \longmapsto ax^4 + bx^3 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ besitzt die beiden Wendepunkte $W_1(0\,|\,1)$ und $W_2(2\,|\,-3)$.

1.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm von f.

[Teilergebnis: $a = \frac{1}{4}; b = -1; c = 1$] **5 BE**

1.2 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_f. **4 BE**

1.3 Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 4{,}25$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.
Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm **3 BE**

1.4 Gegeben ist weiterhin die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 2x - 7$ auf $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph G_g dieser Funktion schließt mit dem Graphen G_f ein endliches Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 ein, kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die ganzzahligen Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g können aus der Zeichnung von 1.3 entnommen werden. **5 BE**

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $h_k: x \longmapsto 2x^3 + 4kx^2 + 8x$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$.

2.1 Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist.

„Der Graph der Funktion h_k ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.“

2 BE

2.2 Ermitteln Sie, für welche Werte für k die Funktion h_k genau eine Nullstelle besitzt. **5 BE**

3.0 Die Anzahl bestimmter für den Menschen schädlicher Bakterien in einem Badesee ist nach einer langen Hitzeperiode zu hoch. Zur Bekämpfung der Bakterien wird deshalb mehrmals eine Substanz in den Badesee eingeleitet, welche die Bakterien abtöten soll. Aus den bisherigen seltenen Anwendungen der Substanz in den Vorjahren konnte ermittelt werden, dass sich die Bakterienanzahl im Wasser des Sees in Abhängigkeit von der Zeit t nach der letztmaligen Einleitung in recht guter Näherung mittels der Funktionsgleichung $B(t) = 3 + \left(-\frac{1}{20}t^2 + \frac{1}{5}\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}t+a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ vorhersagen lässt. Dabei beschreibt B(t) die Anzahl der Bakterien in Tausend pro cm^3 in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen ab der letztmaligen Einleitung der Substanz in den See zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

2019

1.1 **Ermitteln des Funktionsterms**

Allgemein gilt für die Ableitungen der gegebenen Funktion:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + c \qquad f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 \qquad f''(x) = 3 \cdot 4ax^2 + 2 \cdot 3bx = 12ax^2 + 6bx$$

Aus den Angaben ergeben sich vier Gleichungen. Zum einen gilt aufgrund der Koordinaten der Punkte, dass $f(0) = 1$ (I) und $f(2) = -3$ (II) gelten muss. Das Vorliegen eines Wendepunktes verlangt zudem, dass die zweite Ableitung an dieser Stelle eine Nullstelle hat, sodass außerdem $f''(0) = 0$ (III) und $f''(2) = 0$ (IV) gelten muss. Für Gleichung (III) gilt:

$$f''(0) = 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 = 0$$

Dies ist unabhängig von a, b und c erfüllt, sodass aus dieser Gleichung keine weiteren Informationen gewonnen werden können. Für Gleichung (I) gilt:

$$\begin{aligned} & & f(0) &= 1 \\ &\iff & a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c &= 1 \\ &\iff & \underline{c} &\underline{= 1} \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (II) und (IV) folgt damit:

$$\begin{aligned} &\text{(II)} & f(2) &= -3 & & \\ &\iff & a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + 1 &= -3 & &\mid -1 \\ &\iff & 16a + 8b &= -4 & & \\ &\text{(IV)} & f''(2) &= 0 & & \\ &\iff & 12a \cdot 2^2 + 6b \cdot 2 &= 0 & & \\ &\iff & 48a + 12b &= 0 & &\mid -48a \\ &\iff & 12b &= -48a & &\mid :12 \\ &\iff & b &= -4a & & \\ &b = -4a \text{ in (II)} & 16a + 8 \cdot (-4a) &= -4 & & \\ &\iff & 16a - 32a &= -4 & & \\ &\iff & -16a &= -4 & &\mid :(-16) \\ &\iff & \underline{a} &\underline{= \tfrac{1}{4}} & & \\ &a = \tfrac{1}{4} \text{ in b} & \underline{b} &\underline{= -1} & & \end{aligned}$$

Der komplette Funktionsterm lautet demnach $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 1}}$.

1.2 **Stellen mit waagrechter Tangente**

Durch Einsetzen von a und b in den Term der ersten Ableitung, oder ermitteln dieser aus dem Funktionsterm von f(x) gilt:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^3 - 3x^2$$

1.0 Familie Brunner besitzt ein Grundstück mit einer Rasenfläche in Hanglage. Um sich aufgrund seines fortgeschrittenen Alters das Rasenmähen zu erleichtern, plant Herr Brunner den Kauf eines Rasenmähroboters. Für die Auswahl eines geeigneten Mähroboters möchte er vorab einige Kriterien überprüfen, um anhand von Datenblättern ein passendes Gerät auszuwählen.

Hierfür legt Herr Brunner ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ fest, in dem sich die ebene, viereckige Rasenfläche durch die Eckpunkte $A(30\,|\,1\,|\,2)$, $B(0\,|\,0\,|\,0)$, $C(1\,|\,-15\,|\,5)$ und $D(31\,|\,-14\,|\,7)$ beschreiben lässt. Herr Brunner wählt dabei die x_3-Achse so, dass die x_3-Koordinate die Höhe eines Ortes auf der Rasenfläche gegenüber der horizontalen x_1-x_2-Ebene angibt. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Meter.

Auf das Mitführen von Einheiten kann bei der Berechnung verzichtet werden.

1.1 Die Rasenfläche muss mit einem Begrenzungsdraht umfasst werden. Prüfen Sie, ob es sich bei der Rasenfläche um ein Rechteck handelt, und berechnen Sie die Mindestlänge des Begrenzungsdrahtes. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Meter. **5 BE**

1.2 Dem Datenblatt eines Mähroboters des Modells Steinbock entnimmt Herr Brunner, dass die korrekte Funktionsweise dieses Modells für Steigungen am Hang bis zu 35 % gewährleistet ist. Prüfen Sie, ob das gewünschte Modell demnach zum Mähen der beschriebenen Rasenfläche geeignet ist. **6 BE**

1.3 Der Mähroboter aus 1.2 schafft es, mit einer Akkuladung eine Rasenfläche mit $120\,\text{m}^2$ Flächeninhalt in zwei Stunden zu mähen. Die anschließende Ladezeit für einen Ladezyklus beträgt 1,5 Stunden. Ermitteln Sie die Zeitdauer bis die gesamte Rasenfläche gemäht ist, wenn der Mähroboter zu Beginn vollständig geladen ist, und etwaige Zeitverluste, z. B. durch das Zurückfahren des Mähroboters zur Ladestation, unberücksichtigt bleiben. Runden Sie sinnvoll. **4 BE**

1.4 Die Ladestation für den Mähroboter soll so auf dem Rand der Rasenfläche zwischen den Punkten A und B platziert werden, dass die Entfernung der Ladestation zur Anschlussstelle für die Stromversorgung so kurz wie möglich ist. Eine geeignete Anschlussstelle für die Stromversorgung der Ladestation befindet sich bei $S(20\,|\,10\,|\,1)$ außerhalb der Rasenfläche.

Bestimmen Sie die Koordinaten für den optimalen Standort der Ladestation L. Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle.

Erstellen Sie anschließend eine Skizze, aus der die relative Lage der Punkte A, B und L zueinander hervorgeht. **8 BE**

1.1 Zunächst werden die Längen der Seitenkanten des Vierecks ABCD bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-30 \\ 0-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-30)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{905}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -15-0 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-15)^2 + 5^2} = \sqrt{251}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 31-1 \\ -14-(-15) \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{30^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{905}$$

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 30-31 \\ 1-(-14) \\ 2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-1)^2 + 15^2 + (-5)^2} = \sqrt{251}$$

Prüfen ob es sich um ein Rechteck handelt
Gegenüberliegende Seiten sind demnach gleich lang, was eine Voraussetzung für ein Rechteck ist. Weiterhin müssen dafür alle Innenwinkel genau 90° groß sein. Dafür wird das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet, da dieses null sein müsste, wenn die Vektoren senkrecht stehen.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -30 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} = -30 + 15 - 10 = -25 \neq 0$$

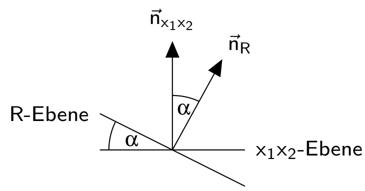
Die Vektoren stehen nicht senkrecht, weshalb der Winkel in der Ecke des Vierecks nicht 90° groß ist. Es kann sich also nicht um ein Rechteck handeln.

Mindestlänge des Begrenzungsdrahtes
Die benötigte Länge ℓ ergibt sich aus den ermittelten Längen der Seitenkanten:

$$\ell = 2 \cdot \sqrt{251} + 2 \cdot \sqrt{905} \approx \underline{\underline{92}}\,[\mathrm{m}]$$

1.2 **Anstieg des Hangs**
Die Punkte A, B, C und D liegen alle in der Ebene R der Rasenfläche. Wie in nebenstehender Skizze zu sehen ist, ist der Winkel zwischen der Rasenfläche und x_1x_2-Ebene gleich dem Winkel zwischen den jeweiligen Normalenvektoren. Aus zwei der Vektoren, welche die Ebene R aufspannen ergibt sich der Normalenvektor:

Skizze:



$$\vec{n}_R = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -30 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 5 - (-2) \cdot (-15) \\ -2 \cdot 1 - (-30) \cdot 5 \\ -30 \cdot (-15) - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-30 \\ -2+150 \\ 450+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 148 \\ 451 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der x_1x_2-Ebene verläuft entlang der x_3-Achse und ergibt sich demnach direkt zu $\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den Winkel α gilt dann:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_R \circ \vec{n}_{x_1x_2}|}{|\vec{n}_R| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -35 \\ 148 \\ 451 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-35)^2 + 148^2 + 451^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{451}{\sqrt{226530}}$$

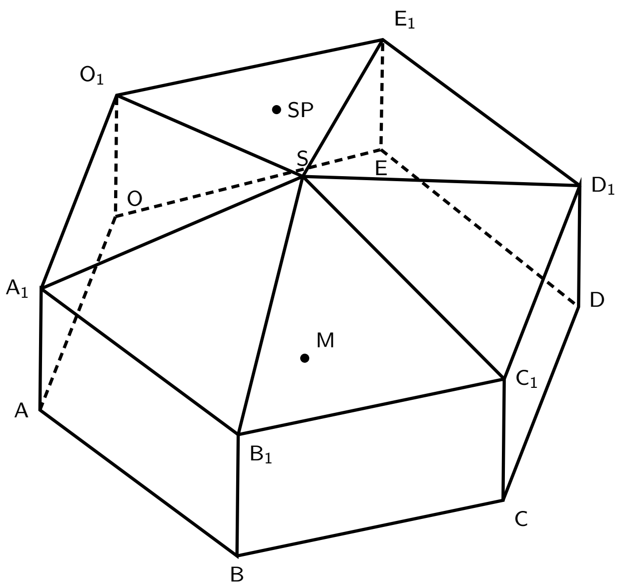
1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und C_1. **3 BE**

1.2 Für das Zelt und die Zirkuswagen wird eine Stellfläche benötigt, die 2,5-mal so groß ist wie die Grundfläche des Zirkuszeltes. Ein Landwirt stellt dem Zirkus eine Wiese mit einer Fläche von $240\,\text{m}^2$ zur Verfügung.
Prüfen Sie, ob diese Fläche groß genug ist.
[Teilergebnis: $A_{\text{Zelt}} \approx 93{,}5\,\text{m}^2$] **4 BE**

1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, welche durch die Punkte $O_1\,(0\,|\,0\,|\,4)$, $E_1\left(-3\,\middle|\,3\sqrt{3}\,\middle|\,4\right)$ und $S\left(3\,\middle|\,3\sqrt{3}\,\middle|\,6\right)$ festgelegt wird.
[Mögliches Teilergebnis: $F: x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - 3x_3 = -12$] **3 BE**

1.4 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene F aus Teilaufgabe 1.3 gegenüber der Grundfläche des Zeltes. **3 BE**

1.5 Vom Schwerpunkt SP des Dreiecks O_1SE_1 soll senkrecht zur Ebene F ein Drahtseil bis zum Boden gespannt werden. Berechnen Sie die Länge dieses Seils. **5 BE**



1.6 Zur Abendvorstellung soll ein Lichstrahl auf die Seitenfläche OAA_1O_1, in der sich auch der Eingang befindet, treffen. Dazu wird auf einem Mast ein Spotlight installiert, dessen Lichtstrahl durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}^+$ beschrieben wird. Prüfen Sie, ob der Lichtstrahl des Spotlight die Seitenfläche OAA_1O_1 trifft. Geben Sie gegebenenfalls an, wie die Position des Spotlights am Mast verändert werden muss, damit die gewünschte Beleuchtung erzielt wird, wenn der Lichtstrahl nach wie vor parallel zu h verlaufen soll. **5 BE**

1.1 **Koordinaten der Eckpunkte**

Da es sich bei der Grundfläche um ein regelmäßiges Sechseck handelt, ist $\overrightarrow{AB}$ parallel zu $\overrightarrow{OM}$ und zudem $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OM}|$. Damit folgt für die Koordinaten der Eckpunkte:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B\left(9 \,\middle|\, 3\sqrt{3} \,\middle|\, 0\right)}}$$

$$\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C\left(6 \,\middle|\, 6\sqrt{3} \,\middle|\, 0\right)}}$$

Da C_1 genau 4 m ($x_3 = 4$) über C liegt, stimmen diese in der x_1- und x_2-Koordinate überein. Demnach ist $\underline{\underline{C_1\left(6 \,\middle|\, 6\sqrt{3} \,\middle|\, 4\right)}}$.

1.2 **Fläche des Zeltes**

Die Fläche des Zeltes entspricht dem sechsfachen der Fläche des Dreiecks, das von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OM}$ aufgespannt wird.

$$A_{Zelt} = 6 \cdot A_{\Delta OAM} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OM}| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3\sqrt{3} \\ 0 \cdot 3 - 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 3\sqrt{3} - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{(18\sqrt{3})^2} \approx 93{,}5\,[\text{m}^2]$$

Prüfen ob die Fläche groß genug ist

Die Stellfläche ist 2,5-mal so groß wie die Grundfläche des Zirkuszeltes, also $2{,}5 \cdot 93{,}5 = 233{,}75\,[\text{m}^2]$. Die Fläche von $240\,\text{m}^2$, die der Landwirt zur Verfügung stellt, ist also groß genug.

1.3 **Gleichung der Ebene in Koordinatenform**

Die Ebene wird durch die Vektoren $\overrightarrow{O_1E_1}$ und $\overrightarrow{O_1S}$ aufgespannt. Für den Normalenvektor $\vec{n}_F$ der Ebene gilt dann:

$$\vec{n}_F = \overrightarrow{O_1E_1} \times \overrightarrow{O_1S} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \cdot 2 - 0 \cdot 3\sqrt{3} \\ 0 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 6 \\ -18\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aus dem Normalvektor der Ebene und den Koordinaten des Punktes $O_1\left(0 \,|\, 0 \,|\, 4\right)$ kann eine Gleichung der Ebene zunächst in Normalenform aufgestellt werden, die dann in Koordinatenform umgeformt wird.

$$F\colon \vec{n}_F \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OO_1}) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 6 \\ -18\sqrt{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 4 \end{pmatrix} = 6\sqrt{3}x_1 + 6x_2 - 18\sqrt{3}x_3 - 18\sqrt{3} \cdot (-4) = 0$$

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

K

M

N

P

S

W

Analytische Geometrie

A

B

E

F

G

K

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

Original-Abschlussprüfungen
Mathematik Technik
FOS·BOS 12 Bayern 2021

- ✓ An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- ✓ Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- ✓ Miniskript mit Beispielen sowie ausführlichen Lösungen
- ✓ Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- ✓ Mit Ferien- und Prüfungsplaner 2020/2021 im Innenteil

Abi-Trainer für FOS · BOS 12 MT 2021

- Ideal für das SELBSTLERNEN ZU HAUSE geeignet -

Bestell-Nr. : EAN 9783743000629

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0062-9

€ 10,90

9 783743 000629 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de