# Diagonalen in Vielecken

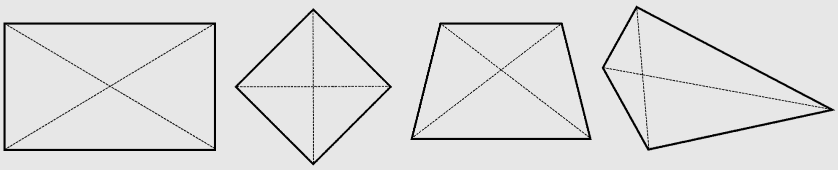
**Klassenstufen:** 5–6 **Mathematische Leitidee:** Raum und Form

**Inhaltliche Schwerpunkte:**
- Analyse von geometrischen Objekten der Ebene, Beschreibung von Eigenschaften dieser Objekte, insbesondere der Diagonalen sowie der Zusammenhänge zwischen den Diagonalenanzahlen bei verschiedenen Vielecken
- Entwickeln geeigneter Arbeitsstrategien und Andwenden heuristischer Strategien (Erstellen einer tabellarischen Übersicht, systematisches Vorgehen, hartnäckiges Probieren, …)
- Erstellen von geeigneten Darstellungsformen der mathematischen Sachzusammenhalte

**Fächerübergreifende Möglichkeiten**:
- Das Problemfeld weist Bezüge zu künstlerischen Tätigkeiten auf: In der bildenden Kunst werden Diagonalen als Kompositionselement, z. B. zur Objektanordnung, verwendet.

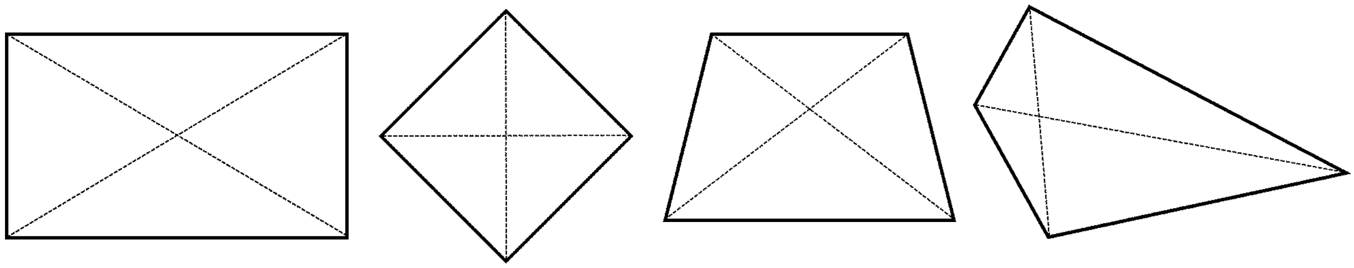
**Lernmaterialien:** **Zeit:** 90 Minuten
- Kopiervorlagen 1 und 2
- Tippseite
- Papier und Stifte, ggf. Filzstifte
- ggf. Plakate oder Dokumentenkamera
- Materialien, die sich zur Darstellung von Vielecken samt ihrer Diagonalen eignen, wie z. B. Mikadostäbe, Streichhölzer, Wollschnüre, Geobretter mit Spanngummis

**Empfehlungen zum Ablauf:**

| **Phase** | **Inhalt** | **Sozialform/Material** |
|---|---|---|
| Einstieg<br>15 min | Die SuS zeichnen ein beliebiges Viereck auf ein Blatt Papier. Diese werden an der Tafel gesammelt.<br><br>Die L gibt den Impuls: *Welche Gemeinsamkeiten haben die von euch gezeichneten Vierecke?* Die Ideen (beispielsweise die gleiche Anzahl an Ecken und Kanten) werden gesammelt. Der Fokus wird auf die Diagonalen gerichtet, die in die Vierecke eingezeichnet werden. Die Forscheraufgabe wird durch ein Beispiel eingeführt:<br>Die L skizziert ein Fünfeck (konkav) an der Tafel: *Wie viele Diagonalen gibt es in diesem Fünfeck?*<br>Die L stellt Aufgaben für die Forscherphase vor. | Plenum<br>Papier, Tafel |
| Forscherphase<br>60 min | Die SuS bearbeiten die Aufgaben selbstständig und bestimmen selbst über die Art der Darstellung von Lösungswegen (zeichnen oder legen mit diversen Materialien) sowie über die soziale Lernform. | Einzel-/Partner-/<br>Gruppenarbeit<br>KV 1 und 2<br>ggf. Tippseite<br>Stäbe o. Ä. (s. o.) |
| Auswertung<br>15 min | Einige SuS präsentieren ihre Ergebnisse an der Tafel oder auf ihren KV. Dabei sollten sie auch ihre jeweiligen Vorgehensweisen beschreiben. | Plenum |

# Diagonalen in Vielecken

Wir haben schon gemeinsam überlegt, wie viele Diagonalen es in einem Viereck gibt.
Hier sind nochmals einige Beispiele dargestellt:



In einem Viereck gibt es _____ Diagonalen.

Wie viele Diagonalen gibt es in einem Fünfeck, in einem Sechseck, in einem Siebeneck oder in noch größeren Vielecken? Finde eine allgemeine Regel und begründe.

KV 1:

## Tipp 1

Wie viele Diagonalen gib es in einem Fünfeck? Zeichne dir zunächst ein Fünfeck auf oder spanne es auf dem Geobrett.

KV 1:

## Tipp 2

Beginne an einer Ecke und zeichne alle Verbindungslinien zu den anderen Ecken ein (außer zu den direkten Nachbarecken). Gehe nun eine Ecke weiter. Welche Verbindungslinien fehlen noch? Gehe so vor, bis du alle Diagonalen gefunden hast.

KV 1:

## Tipp 3

Wie viele Diagonalen gibt es bei einem Sechseck, Siebeneck, Achteck usw.? Beobachtest du Muster? Wie kannst du deine Ergebnisse übersichtlich und geordnet darstellen?

KV 1:

## Tipp 4

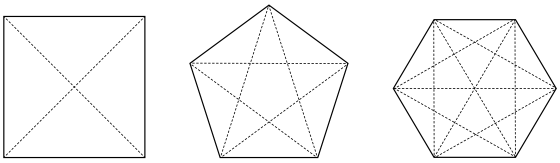
Nutze zum Beispiel eine Tabelle, um deine Ergebnisse darzustellen.

| Anzahl der Ecken | Anzahl der Diagonalen |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |

Fällt dir an den Zahlen etwas auf?

Kopiervorlage 1

Beispielhafte Vielecke mit Diagonalen:



Ein **Viereck hat zwei Diagonalen**, ein **Fünfeck hat fünf Diagonalen** und ein **Sechseck hat neun Diagonalen**.
In unseren Erprobungen wählten die SuS verschiedene Zugangswege. Zum Einstieg spannten einige Vielecke auf Geobrettern und erkundeten enaktiv die Diagonalen, indem diese ebenfalls gespannt wurden. Die meisten SuS machten dies aber maximal bis zum Sechseck, da die Übersichtlichkeit auf dem Geobrett nicht gegeben war. Andere wechselten schon frühzeitig auf eine ikonische Ebene, zeichneten die Vielecke und die Diagonalen ein. Dabei hatten einige Schwierigkeiten, alle Diagonalen zu finden. **Niklas** löste das Problem so, indem er bei einer Ecke startete, alle Diagonalen von dieser Ecke aus einzeichnete und im Uhrzeigersinn so mit jeder Ecke verfuhr.
Ein Problem bestand mitunter im Zählen der entdeckten Diagonalen: **Jule** hatte hierfür z.B. die Idee, mit einem Buntstift alle Diagonalen nachzuzeichnen und dabei zu zählen, denn so wusste sie stets, welche sie bereits gezählt hatte.
Fast alle Kinder schrieben sich die Anzahl der Diagonalen unter die jeweiligen Vielecke. Manche, so auch **Til,** fertigten eine Tabelle an und versuchten, den Zusammenhang mit Pfeilen hervorzuheben:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Anzahl der Eckpunkte** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **Anzahl der Diagonalen** | 0 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 | 35 |

+ 2 + 3 + 4 + 5 …

Als Muster deutet sich an: Wenn man ein n-Eck um eine Ecke „vergrößert“, nimmt die Anzahl der Diagonalen um n – 1 zu. Einzelne Lernende wählten andere Wege und fokussierten z. B. einerseits stark Zeichnungen verschiedener Vielecke und deren Vergleich bzw. andererseits formal-symbolische Zugangsweisen: So fand eine Gruppe heraus, dass von einem Eckpunkt aus immer n – 3 Diagonalen gezeichnet werden können, da der Eckpunkt, an dem man startet, sowie die beiden direkt benachbarten Eckpunkte nicht verwendet werden können. Sie erklärten, dass bei diesem Vorgehen für jeden Eckpunkt im Uhrzeigersinn alle Diagonalen doppelt gezeichnet würden, sodass das Ergebnis noch halbiert werden müsse. Auf diese Weise fand die Gruppe eine geschlossene Form zur Berechnung der Diagonalenanzahl eines Vielecks mit n Eckpunkten verbalisiert, die in Anlehnung an den „kleinen Gauß“ auf Basis des erkannten Musters erschlossen werden kann:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Der „kleine Gauß“ ist ein Satz, der dem berühmten deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß zugeschrieben wird: Als Gauß noch selbst zur Schule ging, stellte der Lehrer in einer Mathematikstunde angeblich die Aufgabe, die Summe aller Zahlen bis 100 zu berechnen – und zwar in der vermeintlichen Hoffnung, sich selbst eine Auszeit gönnen zu können. Gauß löste die gestellte Aufgabe in verblüffend kurzer Zeit, indem er einen „Trick“ anwandte: Er addierte stets zwei Zahlen zur Summe 101 (100 + 1, 99 + 2, 98 + 3, …, 50 + 51) und reduzierte das Problem damit auf die Überlegung, wie viele Summen von 101 zu bilden waren (nämlich 50). Allgemeiner ausgedrückt ergibt sich als Formel zur Berechnung der Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$$1 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

**Literaturhinweis:**
Pallack, A. (Hrsg.) (2013): Fundamente der Mathematik. Nordrhein-Westfalen. Gymnasium. Klasse 5 (S. 58). Berlin: Cornelsen.