

# Inhalt

## Vorwort — V

### 1 Grundlagen — 1

- 1.1 Aufgabenstellung — 1
- 1.2 Betrag und Normen — 2
- 1.2.1 Betrag — 2
- 1.2.2 Vektor- und Matrixnormen — 2
- 1.3 Aufgaben — 4

### 2 Numerisches Rechnen und Fehler — 7

- 2.1 Fehler — 7
- 2.1.1 Fehlerarten — 7
- 2.1.2 Numerisch stabile und instabile Algorithmen — 8
- 2.2 Maschinenzahlen — 9
- 2.2.1 Zahlendarstellungen — 11
- 2.2.2 Rundung — 11
- 2.2.3 Unterlauf, Überlauf — 13
- 2.3 Fehlerfortpflanzung — 13
- 2.3.1 Maximalfehler — 13
- 2.3.2 Fehlerquadratsumme — 15
- 2.4 Konditionszahlen — 17
- 2.4.1 Konditionszahlen bei Funktionen — 17
- 2.4.2 Konditionszahlen bei linearen Gleichungssystemen — 18
- 2.5 Aufgaben — 20

### 3 Iterationsverfahren — 21

- 3.1 Iterationsprobleme — 21
- 3.1.1 Einführung — 21
- 3.1.2 Zwischenwertsatz — 21
- 3.1.3 Iterationsverfahren — 22
- 3.1.4 Fixpunktsatz — 24
- 3.2 Anschauliche Deutung des Iterationsverfahrens — 31
- 3.3 Fehlerabschätzungen — 32
- 3.4 Abbruchkriterien bei Iterationsverfahren — 36
- 3.5 Konvergenzordnung — 37
- 3.6 Spezielle Iterationsverfahren — 39
- 3.6.1 Bisektionsmethode — 39
- 3.6.2 Regula falsi — 41
- 3.6.3 Newtonsches Iterationsverfahren — 45
- 3.7 Konvergenzverbesserung — 50

3.7.1	Verkleinern der Lipschitzkonstanten — 50
3.7.2	Verfahren von Aitken — 51
3.7.3	Steffensen-Verfahren — 52
3.8	Aufgaben — 53
<b>4</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme — 57</b>
4.1	Aufgabenstellung — 57
4.2	Eliminationsverfahren — 58
4.2.1	Gaußscher Algorithmus — 58
4.2.2	Pivotstrategie — 63
4.2.3	Givens-Verfahren — 65
4.2.4	Cholesky-Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix — 70
4.2.5	Nachiteration — 73
4.2.6	Berechnung der inversen Matrix — 76
4.2.7	Abschätzung der Fehlerfortpflanzung — 79
4.3	Iterationsverfahren — 81
4.3.1	Gesamtschritt- oder Jacobi-Verfahren — 82
4.3.2	Abbruch beim Gesamtschrittverfahren — 83
4.3.3	Einzelschritt- oder Gauss-Seidel-Verfahren — 85
4.3.4	Abbruch beim Einzelschrittverfahren — 85
4.3.5	Konvergenz beim Gesamtschrittverfahren — 86
4.3.6	Konvergenz beim Einzelschrittverfahren — 88
4.3.7	Fehlerabschätzung bei Iterationsverfahren — 88
4.4	Aufgaben — 92
<b>5</b>	<b>Approximation von Funktionen — 97</b>
5.1	Problemstellungen — 97
5.2	Diskrete Approximation — 97
5.2.1	Die Ausgleichsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate — 97
5.2.2	Approximation durch weitere Funktionen — 100
5.2.3	Linearisierungen — 106
5.3	Stetige Approximation mit der Methode der kleinsten Quadrate — 112
5.3.1	Orthonormalsysteme — 116
5.3.2	Legendre-Polynome — 120
5.3.3	Approximation durch trigonometrische Funktionen — 122
5.3.4	Die komplexe Form der Fourier-Reihe — 131
5.4	Lokale Approximation — 136
5.4.1	Problemstellung — 136
5.4.2	Die Taylor-Entwicklung — 136
5.5	Bézier-Approximation — 143
5.5.1	Bernstein-Polynome — 143
5.5.2	Bézier-Kurven — 146

<b>5.6</b>	<b>Aufgaben — 154</b>
<b>6</b>	<b>Interpolationsprobleme — 157</b>
6.1	Problemstellung — 157
6.2	Polynominterpolation — 158
6.2.1	Interpolationsverfahren von Lagrange — 159
6.2.2	Der Fehler der Polynominterpolation — 162
6.2.3	Newton'sches Interpolationsverfahren — 163
6.2.4	Hermite-Interpolation — 173
6.3	Spline-Interpolation — 180
6.3.1	Lineare Splines — 180
6.3.2	Quadratische Splines — 182
6.3.3	Kubische Splines — 185
6.3.4	B-Splines — 192
6.4	Interpolation mit periodischen Funktionen — 215
6.4.1	Problemstellung — 215
6.4.2	Die diskrete Fourier-Transformation — 216
6.4.3	Interpolation mit komplexen Exponentialfunktionen — 226
6.4.4	Interpolation mit trigonometrischen Funktionen — 228
6.4.5	Schnelle Fourier-Transformation — 233
6.5	Interpolation mit Bézier-Kurven — 242
6.5.1	Interpolierende kubische Bézier-Kurven — 242
6.5.2	Kubische Bézier-Splines — 245
6.6	Interpolationsflächen — 249
6.6.1	Problem — 249
6.6.2	Bivariate Lagrange-Interpolation — 250
6.7	Aufgaben — 255
<b>7</b>	<b>Numerische Differentiation — 259</b>
7.1	Vorbemerkungen — 259
7.2	Numerische Bestimmung von Ableitungen erster Ordnung — 259
7.3	Der Rundungsfehler bei der numerischen Differentiation — 265
7.4	Numerische Bestimmung von Ableitungen höherer Ordnung — 267
7.5	Aufgaben — 268
<b>8</b>	<b>Numerische Integrationsmethoden — 271</b>
8.1	Aufgabenstellung — 271
8.2	Trapezformel — 271
8.2.1	Herleitung — 271
8.2.2	Abbruchbedingung bei der Trapezformel — 274
8.3	Simpsonsche Formel — 276
8.3.1	Herleitung — 276

8.3.2	Abbruchbedingung bei der Simpsonschen Formel — 280
8.4	Fehlerabschätzungen — 283
8.5	Verfahren von Romberg — 287
8.5.1	Herleitung — 287
8.5.2	Abbruchbedingung beim Romberg-Verfahren — 291
8.5.3	Fehlerabschätzung beim Romberg-Verfahren — 292
8.6	Adaptive Simpson-Quadratur — 293
8.6.1	Herleitung — 293
8.6.2	Fehlerschranke — 296
8.7	Gauß-Integration — 302
8.7.1	Vorbemerkungen — 302
8.7.2	Integration auf dem Intervall $[-1, 1]$ — 304
8.7.3	Gauß-Integration über ein beliebiges Intervall — 308
8.8	Aufgaben — 309
<b>9</b>	<b>Numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen — 311</b>
9.1	Begriffe und Beispiele — 311
9.1.1	Differentialgleichungen erster Ordnung — 312
9.1.2	Technische und ökonomische Beispiele — 313
9.1.3	Das Verfahren von Picard-Lindelöf — 314
9.2	Taylor-Methoden — 317
9.2.1	Der Euler-Cauchy Polygonzug — 317
9.2.2	Methoden höherer Ordnung — 321
9.2.3	Fehlerschranken — 324
9.3	Runge-Kutta-Verfahren — 325
9.4	Mehrschrittverfahren — 330
9.4.1	Explizite Mehrschrittverfahren — 331
9.4.2	Implizite Mehrschrittverfahren — 337
9.4.3	Prädiktor-Korrektor-Verfahren — 343
9.5	Steife Differentialgleichungen — 345
9.6	Weitere Anfangswertaufgaben — 354
9.6.1	Differentialgleichungssysteme erster Ordnung — 354
9.6.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung — 361
9.7	Aufgaben — 362
<b>10</b>	<b>Polynome — 367</b>
10.1	Reelle Polynome — 367
10.1.1	Horner-Schema — 367
10.1.2	Abspaltung eines Linearfaktors — 369
10.1.3	Vollständiges Horner-Schema — 369
10.1.4	Newton'sches Näherungsverfahren — 373
10.2	Allgemeine Horner-Schemata bei reellen Polynomen — 373

10.2.1	<i>m</i> -Zeiliges Horner-Schema — 373
10.2.2	Verallgemeinertes <i>m</i> -zeiliges Horner-Schema — 378
10.2.3	Newton'sches Näherungsverfahren mit den <i>m</i> -zeiligen Horner-Schemata — 380
10.2.4	Spezialfälle und Beispiel — 381
10.2.5	Bestimmung konjugiert-komplexer Nullstellen von Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten — 383
10.3	Komplexe Polynome — 384
10.3.1	Komplexes Horner-Schema — 384
10.3.2	Newton'sches Näherungsverfahren — 386
10.4	Anzahl und Lage der Nullstellen von Polynomen — 387
10.4.1	Abschätzungen zu Nullstellen bei Polynomen mit reellen Koeffizienten — 387
10.4.2	Berechnung der Anzahlen der voneinander verschiedenen Nullstellen von Polynomfunktionen — 391
10.5	Aufgaben — 398

**Lösungen — 401**

**Literatur — 449**

**Abbildungsverzeichnis — 451**

**Tabellenverzeichnis — 455**

**Stichwortverzeichnis — 459**