

Inhalt

Vorwort — V

1	Grundlagen — 1
1.1	Aufgabenstellung — 1
1.2	Betrag und Normen — 2
1.2.1	Betrag — 2
1.2.2	Vektor- und Matrixnormen — 2
1.3	Aufgaben — 4
2	Numerisches Rechnen und Fehler — 7
2.1	Fehler — 7
2.1.1	Fehlerarten — 7
2.1.2	Numerisch stabile und instabile Algorithmen — 8
2.2	Maschinenzahlen — 9
2.2.1	Zahlendarstellungen — 11
2.2.2	Rundung — 11
2.2.3	Unterlauf, Überlauf — 13
2.3	Fehlerfortpflanzung — 13
2.3.1	Maximalfehler — 13
2.3.2	Fehlerquadratsumme — 15
2.4	Konditionszahlen — 17
2.4.1	Konditionszahlen bei Funktionen — 17
2.4.2	Konditionszahlen bei linearen Gleichungssystemen — 18
2.5	Aufgaben — 20
3	Iterationsverfahren — 21
3.1	Iterationsprobleme — 21
3.1.1	Einführung — 21
3.1.2	Zwischenwertsatz — 21
3.1.3	Iterationsverfahren — 22
3.1.4	Fixpunktsatz — 24
3.2	Anschauliche Deutung des Iterationsverfahrens — 31
3.3	Fehlerabschätzungen — 32
3.4	Abbruchkriterien bei Iterationsverfahren — 36
3.5	Konvergenzordnung — 37
3.6	Spezielle Iterationsverfahren — 39
3.6.1	Bisektionsmethode — 39
3.6.2	Regula falsi — 41
3.6.3	Newtonsches Iterationsverfahren — 45
3.7	Konvergenzverbesserung — 50

3.7.1	Verkleinern der Lipschitzkonstanten —	50
3.7.2	Verfahren von Aitken —	51
3.7.3	Steffensen-Verfahren —	52
3.8	Aufgaben —	53
4	Lineare Gleichungssysteme —	57
4.1	Aufgabenstellung —	57
4.2	Eliminationsverfahren —	58
4.2.1	Gaußscher Algorithmus —	58
4.2.2	Pivotstrategie —	63
4.2.3	Givens-Verfahren —	65
4.2.4	Cholesky-Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix —	70
4.2.5	Nachiteration —	73
4.2.6	Berechnung der inversen Matrix —	76
4.2.7	Abschätzung der Fehlerfortpflanzung —	79
4.3	Iterationsverfahren —	81
4.3.1	Gesamtschritt- oder Jacobi-Verfahren —	82
4.3.2	Abbruch beim Gesamtschrittverfahren —	83
4.3.3	Einzelschritt- oder Gauss-Seidel-Verfahren —	85
4.3.4	Abbruch beim Einzelschrittverfahren —	85
4.3.5	Konvergenz beim Gesamtschrittverfahren —	86
4.3.6	Konvergenz beim Einzelschrittverfahren —	88
4.3.7	Fehlerabschätzung bei Iterationsverfahren —	88
4.4	Aufgaben —	92
5	Approximation von Funktionen —	97
5.1	Problemstellungen —	97
5.2	Diskrete Approximation —	97
5.2.1	Die Ausgleichsgerade nach der Methode der kleinsten Quadrate —	97
5.2.2	Approximation durch weitere Funktionen —	100
5.2.3	Linearisierungen —	106
5.3	Stetige Approximation mit der Methode der kleinsten Quadrate —	112
5.3.1	Orthonormalsysteme —	116
5.3.2	Legendre-Polynome —	120
5.3.3	Approximation durch trigonometrische Funktionen —	122
5.3.4	Die komplexe Form der Fourier-Reihe —	131
5.4	Lokale Approximation —	136
5.4.1	Problemstellung —	136
5.4.2	Die Taylor-Entwicklung —	136
5.5	Bézier-Approximation —	143
5.5.1	Bernstein-Polynome —	143
5.5.2	Bézier-Kurven —	146

5.6	Aufgaben — 154
6	Interpolationsprobleme — 157
6.1	Problemstellung — 157
6.2	Polynominterpolation — 158
6.2.1	Interpolationsverfahren von Lagrange — 159
6.2.2	Der Fehler der Polynominterpolation — 162
6.2.3	Newtonsches Interpolationsverfahren — 163
6.2.4	Hermite-Interpolation — 173
6.3	Spline-Interpolation — 180
6.3.1	Lineare Splines — 180
6.3.2	Quadratische Splines — 182
6.3.3	Kubische Splines — 185
6.3.4	B-Splines — 192
6.4	Interpolation mit periodischen Funktionen — 215
6.4.1	Problemstellung — 215
6.4.2	Die diskrete Fourier-Transformation — 216
6.4.3	Interpolation mit komplexen Exponentialfunktionen — 226
6.4.4	Interpolation mit trigonometrischen Funktionen — 228
6.4.5	Schnelle Fourier-Transformation — 233
6.5	Interpolation mit Bézier-Kurven — 242
6.5.1	Interpolierende kubische Bézier-Kurven — 242
6.5.2	Kubische Bézier-Splines — 245
6.6	Interpolationsflächen — 249
6.6.1	Problem — 249
6.6.2	Bivariate Lagrange-Interpolation — 250
6.7	Aufgaben — 255
7	Numerische Differentiation — 259
7.1	Vorbemerkungen — 259
7.2	Numerische Bestimmung von Ableitungen erster Ordnung — 259
7.3	Der Rundungsfehler bei der numerischen Differentiation — 265
7.4	Numerische Bestimmung von Ableitungen höherer Ordnung — 267
7.5	Aufgaben — 268
8	Numerische Integrationsmethoden — 271
8.1	Aufgabenstellung — 271
8.2	Trapezformel — 271
8.2.1	Herleitung — 271
8.2.2	Abbruchbedingung bei der Trapezformel — 274
8.3	Simpsonsche Formel — 276
8.3.1	Herleitung — 276

8.3.2	Abbruchbedingung bei der Simpsonschen Formel —	280
8.4	Fehlerabschätzungen —	283
8.5	Verfahren von Romberg —	287
8.5.1	Herleitung —	287
8.5.2	Abbruchbedingung beim Romberg-Verfahren —	291
8.5.3	Fehlerabschätzung beim Romberg-Verfahren —	292
8.6	Adaptive Simpson-Quadratur —	293
8.6.1	Herleitung —	293
8.6.2	Fehlerschranke —	296
8.7	Gauß-Integration —	302
8.7.1	Vorbemerkungen —	302
8.7.2	Integration auf dem Intervall $[-1, 1]$ —	304
8.7.3	Gauß-Integration über ein beliebiges Intervall —	308
8.8	Aufgaben —	309
9	Numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen —	311
9.1	Begriffe und Beispiele —	311
9.1.1	Differentialgleichungen erster Ordnung —	312
9.1.2	Technische und ökonomische Beispiele —	313
9.1.3	Das Verfahren von Picard–Lindelöf —	314
9.2	Taylor-Methoden —	317
9.2.1	Der Euler–Cauchy Polygonzug —	317
9.2.2	Methoden höherer Ordnung —	321
9.2.3	Fehlerschranken —	324
9.3	Runge–Kutta-Verfahren —	325
9.4	Mehrschrittverfahren —	330
9.4.1	Explizite Mehrschrittverfahren —	331
9.4.2	Implizite Mehrschrittverfahren —	337
9.4.3	Prädiktor-Korrektor-Verfahren —	343
9.5	Steife Differentialgleichungen —	345
9.6	Weitere Anfangswertaufgaben —	354
9.6.1	Differentialgleichungssysteme erster Ordnung —	354
9.6.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung —	361
9.7	Aufgaben —	362
10	Polynome —	367
10.1	Reelle Polynome —	367
10.1.1	Horner-Schema —	367
10.1.2	Abspaltung eines Linearfaktors —	369
10.1.3	Vollständiges Horner-Schema —	369
10.1.4	Newtonsches Näherungsverfahren —	373
10.2	Allgemeine Horner-Schemata bei reellen Polynomen —	373

10.2.1	<i>m</i> -Zeiliges Horner-Schema —	373
10.2.2	Verallgemeinertes <i>m</i> -zeiliges Horner-Schema —	378
10.2.3	Newtonsches Näherungsverfahren mit den <i>m</i> -zeiligen Horner-Schemata —	380
10.2.4	Spezialfälle und Beispiel —	381
10.2.5	Bestimmung konjugiert-komplexer Nullstellen von Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten —	383
10.3	Komplexe Polynome —	384
10.3.1	Komplexes Horner-Schema —	384
10.3.2	Newtonsches Näherungsverfahren —	386
10.4	Anzahl und Lage der Nullstellen von Polynomen —	387
10.4.1	Abschätzungen zu Nullstellen bei Polynomen mit reellen Koeffizienten —	387
10.4.2	Berechnung der Anzahlen der voneinander verschiedenen Nullstellen von Polynomfunktionen —	391
10.5	Aufgaben —	398

Lösungen — 401

Literatur — 449

Abbildungsverzeichnis — 451

Tabellenverzeichnis — 455

Stichwortverzeichnis — 459