

MATHE-KISTE

SPIELERISCH KOMPETENZEN FÖRDERN



Dorothee Seeger

Elisabeth Schwank

Inge Schwank

Manfred Holodynski

HERDER The logo for Herder's 45th anniversary, featuring a large, stylized number "45" where the "4" and "5" are interconnected.

FREIBURG · BASEL · WIEN

Im Interesse der besseren Lesbarkeit und aus Platzgründen wurde im Theorieteil und auf den BIKO-Karten vorwiegend das generische Maskulinum („Mitspieler“ etc.) verwendet. Selbstverständlich sollen aber immer alle Geschlechter angesprochen werden.

Bildnachweis

S. 10, 24, 26, 32, 33, 38, 39, 41, 42, 44, 45, 50 Finger, 59, 61, 62 Zahlentreppe, 68, 77 Würfel, 79 Puzzles, 80, 81, 82, 83, 84 Stäbe, 89, 91, 94, 95, 97, 100, 102, 103, 104: © Dorothee Seeger & Elisabeth Schwank,
S. 12, 31, 48, 49, 53, 62, 64, 67, 69, 71, 72, 74, 84 Kinder: © Dorothee Seeger & Hannah Messelink,
S. 14: © Inge Schwank,
S. 15, 23, 34, 35, 39 Junge, 40, 46, 50, 51, 52, 53, 56, 57, 58, 60, 70, 73, 75, 76, 78, 85, 86, 87, 88, 90, 92, 93, 96, 98, 99, 101, 105, 106, 108, 112, 114: © Dorothee Seeger & Manfred Holodynski,
S. 20 Willis Zahlentiere: © HABA Group,
S. 24 Kind, 34, 35, 43, 47, 54, 55: © Dorothee Seeger & Tanja de Haan,
S. 25: © Supakorn Limteerayos/shutterstock,
S. 36: © katinkah/AdobeStock,
S. 37, 118, 119, 120: © Shelma Wikenza,
S. 63: © V&P Photo Studio/AdobeStock,
S. 65, 66, 79 Kind, 114 Kind: © Svenja Braatz,
S. 119 Maxi Pelenkettenset: Heutink,
S. 119 Stempelset Zahlen. Ziffern- und Augenstempel: © Wiemann Lehrmittel®,
S. 120 Zahlenweg/Ziffernfliesen: © HABA Group,
S. 121: © Elisabeth Schwank,
S. 122–125: Inge Schwank

© Verlag Herder GmbH, Freiburg im Breisgau 2021
Alle Rechte vorbehalten
www.herder.de

Umschlag, Satz und Gestaltung: Arnold & Domnick, Leipzig
Herstellung: PB Tisk, a.s., PŘÍBRAM
Printed in the Czech Republic

ISBN 978-3-451-38805-7

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	5
1 BIKO-Mathe-Kiste – was steckt dahinter?	6
2 Was sind mathematische Basisfähigkeiten?	8
2.1 Zahlen und Zahlsymbole im Alltag	8
2.2 Kategorien bilden und Muster entdecken	9
2.3 Zahlwörter – die sprachliche Basis	10
2.4 Zahlsymbole lesen lernen.	12
2.5 Objekte zählen und Anzahlen begreifen	12
2.6 Vom Handeln mit Mengen zum Denken mit Zahlen	13
2.7 Modell zur Entwicklung mathematischer Basisfähigkeiten	16
3 Entwicklungsaufgaben zur Mathematik und Selbstregulation im Vorschulalter	18
3.1 Für den Bereich Mathematik	18
3.2 Für den Bereich Selbstregulation	19
4 Wie lassen sich mathematische und selbstregulatorische Fähigkeiten fördern?	22
4.1 Wie Spiele mathematische und selbstregulatorische Fähigkeiten fördern. ...	23
4.2 Rollenspiele.	23
4.3 Regelspiele	24
4.4 Konstruktionsspiele	24
4.5 Dialogisches Lesen	25

5 Nutzungsmöglichkeiten der BIKO-Mathe-Kiste	27
5.1 Fortlaufendes Bildungsangebot bereitstellen	27
5.2 Diagnostikbasiertes Mathematikangebot für Kinder mit Förderbedarf erstellen.	28
6 BIKO-Spielekarten.	29
6.1 Welche Spiele enthält die BIKO-Mathe-Kiste?	29
6.2 Wie werden die Spiele beschrieben?	30
6.3 Wie ist die BIKO-Mathe-Kiste gegliedert?	30
6.4 Spielekarten.	32
7 Diagnostikbasiertes Angebot zur mathematischen Bildung	107
7.1 Entwicklungsstand erfassen.	107
7.2 Passgenaue Bildungsangebote planen	109
7.3 Bildungsangebote durchführen	111
7.4 Entwicklungsfortschritte reflektieren – Bildungsangebote anpassen.	115
Spieleregister	116
Materialliste.	118
Kopiervorlagen	121
Über die Autoren	126
Literatur	126

VORWORT

Mit der BIKO-Mathe-Kiste präsentieren wir eine Sammlung von anregenden Mathespielen und liebevoll gestalteten Vorlesebüchern für die Kita-Praxis. Die Geschichten und Spielwelten dieser Materialien wecken die Neugier von Kindern zwischen drei und sechs Jahren – und nehmen sie mit in die spannende Welt der Mathematik. Die sorgfältig ausgewählten Spiele garantieren nicht nur eine Menge Spielspaß, sondern fördern sowohl Basisfähigkeiten der Mathematik als auch der kindlichen Selbstregulation. Beide Bereiche beeinflussen den weiteren (schulischen) Lebensweg der Kinder grundlegend. Die Mathe-Kiste unterstützt Kita-Fachkräfte deshalb auch bei der herausfordernden Aufgabe, Kinder fit für die Schule zu machen. Da pädagogische Fachkräfte in ihrer Ausbildung an Fachschulen meist keine mathematikdidaktische Ausbildung erhalten, treten sie im Rahmen unserer Fortbildungen immer wieder mit diesen Fragen an uns heran:

- Wie entwickeln Kinder ihre mathematischen Fähigkeiten bis zur Einschulung?
- Wie lassen sich diese Fähigkeiten spielerisch fördern?
- Warum ist Spielen besonders hilfreich?
- Wie können Fachkräfte beim Mitspielen und Vorlesen die Kinder in ihrer Entwicklung unterstützen?
- Welche Spiele und Vorlesebücher eignen sich für welche Altersgruppe?
- Jedes Kind lernt anders! Wie können Fachkräfte Spiele für einzelne Kinder anpassen?

Mit der BIKO-Mathe-Kiste wollen wir diese Fragen wissenschaftlich fundiert und kompakt beantworten. Als Expertenteam aus der Mathematikdidaktik, Entwicklungspsychologie und Spielpädagogik haben wir darum Spiele und Bücher zusammengestellt, die fachdidaktisch und spielpädagogisch durchdacht sind und zugleich dem Bedürfnis von Kindern gerecht werden, Freude und Selbstwirksamkeit im Spiel zu erleben. Sie machen Kindern und Fachkräften gleichermaßen Lust aufs Spielen!

Darüber hinaus präsentieren wir Vorschläge, wie Sie mit der BIKO-Mathe-Kiste ein regelmäßiges und nachhaltiges Bildungsangebot an Mathespielen zusammenstellen können, und zwar für das ganze Leistungsspektrum. Diese Besonderheiten teilen die BIKO-Mathe-Kiste mit der BIKO-Motorik-Kiste, die auch im Herder-Verlag erschienen ist.

Bleibt uns am Schluss noch, den beteiligten Kindern und Kitas ganz herzlich für ihr Mitwirken zu danken, ebenso den engagierten Spielleitungen Svenja Braatz (†), Jonas Mühlenstrodt, Marisa Roth und Birte Zastrow. Zusammen haben wir die Mathespiele in der Praxis erprobt und optimiert und viele nützliche Hinweise und Tipps zusammengetragen.

Dorothee Seeger, Elisabeth Schwank, Inge Schwank, Manfred Holodynski

Die Vermittlung basaler mathematischer Fähigkeiten zählt zu den vereinbarten Bildungszielen von Kindertagesstätten (Kultusministerkonferenz, 2004). Dazu gehören z. B. das Abzählen von Objekten, das Erfassen der Größe einer Menge, das Vergleichen von verschiedenen Mengen sowie ein Verständnis der dazugehörigen mathematischen Konzepte. Denn Kinder ohne diese Basisfähigkeiten haben es im Mathematikunterricht der Grundschule schwer. Damit sie beim Schuleintritt nicht ihre Motivation verlieren, sich mit mathematischen Sachverhalten zu befassen, sollten sie die Basisfähigkeiten bereits in der Kita erwerben.

Auch ein gewisses Maß an Selbstregulation erleichtert den erfolgreichen Übergang vom Spielen in der Kita zum selbstregulierten Lernen in der Grundschule (Klotz, 2018) wesentlich, wie Längsschnittstudien zeigen (Diamond & Lee, 2014; Gawrilow & Rauch, 2017). Über seine Handlungen und Emotionen nachzudenken und planvoll vorzugehen sowie sich an soziale und sachliche Regeln halten zu können, sind beispielsweise Basisfähigkeiten, von denen Kinder bei der Einschulung profitieren.

Aber wie sieht ein erfolgreicher und kindgerechter Weg für den Erwerb dieser Fähigkeiten aus? Vorgegebene Übungen nach einem festen Zeittakt – wie man es aus dem Grundschulunterricht kennt – wirken auf Vorschulkinder in der Regel langweilig und überfordernd. Spielbasierte Bildungsangebote wecken ihr Interesse und ihre Spielfreude deutlich besser als lehrgangsbasierte Bildungsangebote. Rollen-, Regel- und Konstruktionsspiele entsprechen ihrem Entwicklungsniveau dabei in besonderer Weise. Denn Kinder von drei bis sechs Jahren lassen sich durch Spiele in vielfältiger Art begeistern und beschäftigen sich ausdauernd damit. Genau das leisten die spiäßigen Spielideen in der BIKO-Mathe-Kiste.

Was bietet die BIKO-Mathe-Kiste? Sie bietet Ihnen erprobte spielbasierte Möglichkeiten, mathematische und selbstregulatorische Basisfähigkeiten von drei- bis sechsjährigen Kindern zu fördern:

1. **59 Mathespiele und 7 Vorlesebücher mit Matheimpulsen:** Die ausgewählten Bücher und Spiele, die sich besonders für das Freispiel im Gruppenraum eignen, bereiten den Kindern viel Freude, wie wir in unseren Spielinterventionen erleben konnten. Die praxisnahen Spielanleitungen und Hinweise zum Dialogischen Lesen finden Sie auf übersichtlichen Spielekarten (*» Kapitel 6*).
2. **Fortlaufendes Bildungsangebot:** Wir erläutern, wie Sie die Spiele zu einem attraktiven Bildungsangebot für den Kita-Alltag zusammenstellen können und worauf Sie bei der Durchführung achten sollten, um die Kinder erfolgreich zu fördern (*» Kapitel 5*).
3. **Diagnostikbasiertes Bildungsangebot für Kinder mit Förderbedarf:** Manche Kinder haben einen besonderen Förderbedarf. Hier gilt es, diese Kinder durch eine professionelle Diagnostik frühzeitig zu erkennen und das Bildungsangebot auf ihren Entwicklungsstand und Bedarf abzustimmen (*» Kapitel 7*).
4. **Einführung in die Entwicklung mathematischer Basisfähigkeiten:** Damit Fachkräfte die mathematischen Konzepte fachgerecht vermitteln können, erhalten sie fundiertes Wissen zur Entwicklung mathematischer Basisfähigkeiten (*» Kapitel 2*).
5. **Einführung in die spielbasierte Förderung:** Erleben Kinder beim Mathespielen Erfolge (positive Emotionen), wollen sie die Spiele gerne wiederholen. Wie Fachkräfte Spielfreude unterstützen können, erfahren sie durch einen Einblick in spielpädagogische Grundlagen (*» Kapitel 4*).

Auf welchen wissenschaftlichen Grundlagen basiert die BIKO-Mathe-Kiste? Die BIKO-Mathe-Kiste ist keine einfache Sammlung von Mathespielen und Büchern zu mathematischen Konzepten. Vielmehr steht das Kürzel BIKO – Bildung in der Kita organisieren – für einen besonderen Anspruch an die Konstruktion von Bildungsmaterialien für die pädagogische Arbeit (Seeger & Holodynski, im Druck). BIKO nutzt die wissenschaftlichen Erkenntnisse der entwicklungs-, lern- und spielspsychologischen sowie der fachdidaktischen Forschung, um Spiele auszuwählen, zu optimieren und fachkundig anzuleiten.

Wie fördern die BIKO-Spiele Drei- bis Sechsjährige? Zunächst haben wir in einem interdisziplinären Expertenteam aus der Mathematikdidaktik und Entwicklungspsychologie die wissenschaftlichen Befunde für eine wirksame Förderung zusammengetragen. Denn nicht alle mathematischen Bildungsangebote in der Kita sind in gleicher Weise wirksam (Nafzger, 2015). Auf Basis dieser Recherchen wurden die Auswahl und Beschreibung der Spiele sowie die Anleitung und Hinweise für die Spielleitungen vorgenommen:

1. **Die BIKO-Mathe-Kiste basiert auf Entwicklungsaufgaben:** Die Entwicklungsaufgabe für Drei- bis Sechsjährige im Bildungsbereich Mathematik umfasst den Erwerb mehrerer mathematischer Basisfähigkeiten: eine Zahlraumvorstellung von der Zahlenreihe (bis 20) erwerben, Zählprinzipien anwenden, um die Größe von Mengen zu ermitteln, sowie Konzepte von *mehr als*, *weniger als*, *größer als*, *kleiner als* etc. erwerben. Auf solchen Fähigkeiten (» Kapitel 2) baut der Mathematikunterricht in der Grundschule auf. Im Kompetenzbereich Selbstregulation besteht die Entwicklungsaufgabe darin, die eigenen Handlungen und Emotionen auf ein Ziel hin ausrichten und je nach Anforderungen in der Situation willentlich regulieren zu können (» Kapitel 3.2).
2. **Die BIKO-Mathe-Kiste basiert auf spielpädagogischen Erkenntnissen:** Kinder zwischen drei und sechs Jahren spielen für ihr Leben gern und ausdauernd Rollen-, Regel- und Konstruktionsspiele (El'konin, 2010; Oerter, 1993; Seeger & Holodynski, im Druck). Die BIKO-Mathe-Kiste nutzt das, um die genannten mathematischen und selbstregulatorischen Basisfähigkeiten herauszufordern. Welche Fähigkeiten das vorgestellte Spiel oder Buch anspricht, haben wir auf jeder Spielekarte markiert. Das erleichtert die Förderung einzelner Kinder mit ihren individuellen Spielvorlieben und Spielfähigkeiten (» Kapitel 4). Da Kinder außerdem auf ihrem individuellen Entwicklungsniveau angeregt werden sollen, findet sich zu jedem Spiel eine Variante für Einsteiger, Fortgeschrittene und Profis. Dadurch können Sie als Spielleitung jedes Spiel an das individuelle Niveau und die Fortschritte der beteiligten Kinder anpassen.
3. **Die BIKO-Mathe-Kiste enthält erprobte und fachlich fundierte Spiele:** Um für Fachkräfte Spiele bereitzustellen, die mathematische Konzepte korrekt veranschaulichen und zugleich auf den Kita-Alltag abgestimmt sind (Schwank, 2011), haben wir Spielangebote in eigenen Interventionsstudien in Kitas erprobt (Seeger et al., 2018). Die dabei gesammelten Erfahrungen sind in die Auswahl und Beschreibung der Spiele eingeflossen.
4. **Die BIKO-Mathe-Kiste basiert auf lernpsychologischen Erkenntnissen:** Wir erwerben Fähigkeiten nicht allein durch Versuch und Irrtum. Vielmehr lernen Kinder die mathematischen und selbstregulatorischen Basisfähigkeiten auch durch Nachahmung erfolgreicher Modelle und durch gezielte sprachliche Anleitungen in gemeinsamen Spiel- und Handlungskontexten. Deshalb erhalten Fachkräfte auf jeder Spielekarte Hinweise, wie sie die Kinder im aktiven Mitspielen unterstützen und ihnen ein Modell sein können. Eine solche Unterstützung im angeleiteten Spiel trägt maßgeblich zur erfolgreichen Förderung bei (Weisberg et al., 2013).

2.1 Zahlen und Zahlsymbole im Alltag

Die Verwendung von Zahlen ist heutzutage so selbstverständlich geworden, dass Erwachsene sich eine Welt ohne Zahlen, wie sie junge Kinder erleben, kaum vorstellen können. Vergessen ist, dass die Entwicklung hin zu unserem heutigen, modernen Verständnis von Zahlen Jahrtausende gedauert hat. Dieses Verständnis umfasst eine Vielzahl an Verwendungszwecken, die erst die Abstraktheit von Zahlen möglich gemacht hat. Zahlen wurden dadurch zu einem mächtigen Werkzeug, zu einem Allzweckmittel des Denkens. Andererseits macht ihre Abstraktheit Zahlen nicht auf Anhieb begreifbar. Wenn Kinder mit ihnen erstmals in Berührung kommen, wenn sie Zahlwörter wie „eins, zwei, drei“ benutzen, heißt das nicht, dass sie schon verstanden hätten, was ein Zahlwort bedeutet und wozu man Zahlen benutzen kann. Daher möchten wir zunächst beschreiben, in welchen Alltagssituationen Kindern Zahlen begegnen. Diese gemeinsam erlebten Situationen bieten wunderbare Gelegenheiten, um über Zahlen ins Gespräch zu kommen und das Zahlenverständnis zu erweitern (Lorenz, 2016).

Zahl als Kodierzeichen: Jakob nutzt mit seinen Eltern auf dem Weg zur Oma jeden Sonntag den Bus, der mit dem Zahlsymbol 7 gekennzeichnet ist. So weiß Jakob schon, dass die Nummer 7 am Bus bedeutet, dass der Bus über den Hauptbahnhof fährt, wo sie dann in die U-Bahn mit der Nummer 1 umsteigen müssen. Solche Zahlsymbole, die nur zur Kennzeichnung z. B. von Buslinien und nicht (!) zum Rechnen verwendet werden, heißen umgangssprachlich *Kodierzahlen*.

Zahl als Operator: Jakob spielt bei der Oma das Würfelspiel „Fang den Hut“. Würfelt er das Zahlsymbol 3, weiß er schon, dass die eigene Spielfigur genau *drei* Mal ein Feld nach vorn hüpfen darf, während die 1 bedeutet, dass die Spielfigur *ein* Mal bewegt werden darf. In dieser Situation wird die Zahl als *Operatorzahl* verwendet: Sie gibt dann an, wie viele Male man eine Handlung oder ein Ereignis ausführen soll.

Zahl als Ordnungsangabe: Nach dem Spielen geht Oma mit Jakob zur Eisdiele, wo bereits drei Kinder in einer Reihe warten. Als Jakob gleich nach vorn stürmt, ermahnt die Oma ihn, in der Reihe zu warten. Sie zählt mit ihm gemeinsam seine Position in der Reihe ab: „Das erste, zweite, dritte und du bist das vierte Kind, das ein Eis bekommt.“ Beim Schreiben wird dafür ein Punkt hinter das Zahlsymbol gesetzt: „1., 2., 3., 4.“ usw. Zahlzeichen mit Punkt, die z. B. die Position in einer Warteschlange oder auf dem Siegerpodest bezeichnen, nennt man umgangssprachlich *Ordnungszahlen*. Auch sie werden nicht zum Rechnen benutzt.

Zahl als Ordinalzahl: Am Nachmittag spielt Jakob mit Bauklötzen. Aus gleich großen Holzwürfeln baut er eine Treppe zu seinem Bahnhof. Jede neue Treppenstufe wird dabei um einen Holzwürfel höher als die vorherige. Dadurch entsteht eine Ordnung in der Würfeltreppe, die die Ordnung im Zahlenraum veranschaulicht: von keinem (null) Holzwürfel über einen (eins) Holzwürfel, zwei Holzwürfel, drei Holzwürfel bis hin zum Treppende. Werden Zahlen in dieser Ordnung mit der Systematik „von Position zu Position *eins* weiter/höher“ betrachtet, spricht man mathematisch von *Ordinalzahlen*.

Zahl als Anzahl: Am Abend steckt die Oma Jakob Bonbons als Wegzehrung zu. Wie viele sind es? Jakob ordnet die Bonbons auf dem Tisch in eine Reihe und spricht dann die Zahlwortreihe „eins, zwei, drei, vier, fünf“, während er jeweils eines der Bonbons zur Seite schiebt. Am Ende der Reihe sagt er strahlend: „Ich habe fünf Bonbons!“ Jakob bringt bei seinem Abzählen zwei Dinge zusammen: das Sprechen eines neuen Zahlworts mit dem Markieren des jeweils nächsten Objekts (Bonbon), das er abzählen möchte. Er verbindet damit die feste Ordnung der Zahlwortreihe mit dem Handlungsprinzip „eins dazutun“. Das entspricht in mathematischer Hinsicht der Nachfolgerbildung der Zahlen. In seiner Handlung begreift Jakob, dass hier jede Zahl eine Anzahl von Bonbons anzeigt und dass jede nachfolgende Zahl eine um genau eins größere Anzahl von Bonbons repräsentiert. Wenn Kinder den Zusammenhang zwischen den Objekten einer Menge und ihrer Anzahl sicher verstanden haben, haben sie das sogenannte Anzahlkonzept erworben oder, mathematisch ausgedrückt, das Konzept der *Kardinalzahl*.

Kinder lernen die genannten Anwendungsbezüge von Zahlen durch eigenes und gemeinsames Handeln in verschiedensten Kontexten, bis sie sicher mit diesen Vorstellungen denken und handeln können. Welche sprachlichen und handlungsbezogenen Fähigkeiten sie dazu entwickeln und im Verlauf des Vorschulalters zu ersten Zahlvorstellungen integrieren, behandeln die folgenden Abschnitte.

2.2 Kategorien bilden und Muster entdecken

Der Neurowissenschaftler Dehaene (1999) sieht den Beginn der Zahlkonzeptentwicklung bereits in der angeborenen Fähigkeit von Säuglingen, Veränderungen in kleinen Mengen bis zu fünf Objekten wahrnehmen zu können. Diese Wahrnehmungsfähigkeit, die keinen Gebrauch von Sprache voraussetzt, ist in vielen Studien mit Säuglingen nachgewiesen worden (z. B. Wynn, 1995). Sie wird auch als „Subitizing“ bezeichnet (von lateinisch „subitus“: plötzlich), was im Deutschen so viel bedeutet wie „Wahrnehmen auf einen Blick“ (Lorenz, 2016). Etwas weniger euphorisch lassen sich die Ergebnisse dieser Studien jedoch auch als reine Wahrnehmungsleistung des visuellen Sinnessystems interpretieren, dem keinerlei Zahlkonzept zugrunde liegt. Dieses Sinnessystem hat sich im Verlauf der Evolution dahingehend entwickelt, dass Menschen die Räumlichkeit ihrer Umwelt, d. h. die räumliche Ausdehnung von Objekten und deren Veränderungen, wahrnehmen können.

Abstraktion und Kategorienbildung: Im Unterschied zu diesen sinnlichen Wahrnehmungseindrücken kann man Zahlen in ihrer Bedeutung weder sehen, riechen, schmecken noch fühlen. Damit Kinder die Bedeutung von Zahlen begreifen können, müssen sie als Erstes mithilfe sprachlicher Kategorien die Bedeutungen erfassen, durch die sich ihre Sinneseindrücke ordnen lassen.

Kinder tun dies intuitiv, wenn sie anfangen, sinnlich wahrnehmbare Objekte wie Steine, Knöpfe, Bausteine, Spielzeuge etc. nach Merkmalen wie z. B. Farbe oder Größe zu unterscheiden und zu sortieren. Während einer solchen Sortierung „beantworten“ Kinder sich die Frage: Was gehört warum zusammen und was gehört warum nicht dazu? Ihre Antworten können Fachkräfte täglich bestaunen: „Die hier sind die *kleinen* und dort sind die *großen* Bauklötze“, „Hier sind nur die *mit drei Ecken*“ etc.

Solche Sortierleistungen verweisen sowohl auf sprachliche als auch auf mathematische Fähigkeiten. Denn die Kinder bilden sprachliche Begriffe oder Kategorien (klein, groß, Dreiecke), was eine erste Form der Abstraktion darstellt. Die Abstraktion besteht darin, dass Kinder beim Sortieren von Bauklötzen oder Spielautos nur ein (oder zwei) Merkmal(e), z. B. die Größe, beachten. Alle anderen Merkmale (wie Farbe, Form oder Verwendungszweck) berücksichtigen sie nicht. Abstraktion und Kategorienbildung gelten als Fähigkeiten, die Mathematikdidaktiker und -didaktikerinnen als einen „Grundstein der Mathematik“ bezeichnen, aus denen mathematisches Denken „erwächst“ (Wittmann, 2016).

Regeln und Muster entdecken: Ein weiterer Grundstein der Mathematik ist das intuitive Anwenden und später das Erkennen (sprachliche Benennen) von Regeln. Eine solche Fähigkeit zeigen Kinder, wenn sie z. B. Spielsteine nicht nur sortieren, sondern nach selbst gesetzten oder vorgegebenen Regeln zu Mustern zusammenlegen. So beachten Kinder beim Musterlegen z. B. die Regel, abwechselnd eine blaue Raute und zwei grüne Dreiecke zu legen und diese Handlung in gleicher Weise zu wiederholen (» Abb. 1a). Muster lassen sich also als ein „Grundmotiv“ verstehen, das nach bestimmten Regeln fortgesetzt wird (Lorenz, 2016).

Lange bevor Kinder geometrischen Mustern mit abstrakten Formen begegnen, nehmen sie Muster in ihrer alltäglichen Umgebung wahr: ein wiederkehrender Rhythmus von Trommelschlägen oder beim Klatschen, eine wiederkehrende Folge von Bewegungen o. Ä.

Manche Kinder tun sich schwer, die Regel(n) zu entdecken, die zur Veränderung eines Musters führt. Diese Kinder werden wahrscheinlich auch Probleme haben, die Regel zu entdecken, die von der Zahl 4 zur Zahl 5 führt. Das ist aber die Grundlage, um mit Zahlen rechnen zu können.

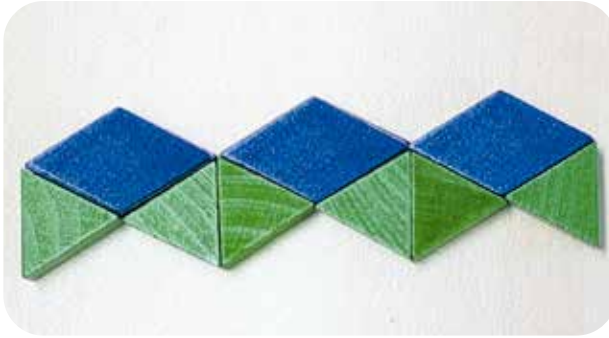


Abb. 1a: Muster, gebildet aus dem Grundmotiv „blaue Raute und zwei grüne Dreiecke“ und der Regel „Grundmotiv in eine Richtung (nach rechts) fortsetzen“

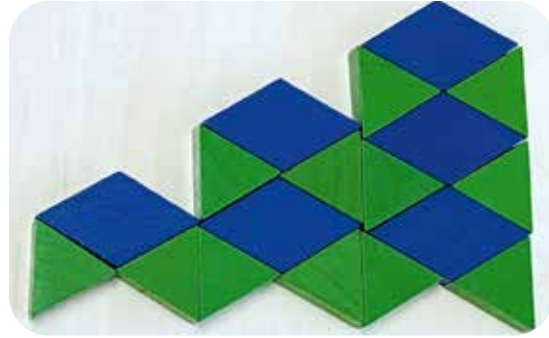


Abb. 1b: Muster, gebildet aus dem Grundmotiv „blaue Raute und zwei grüne Dreiecke“ und der Regel „Grundmotiv in zwei Richtungen (nach rechts und nach oben) fortsetzen“

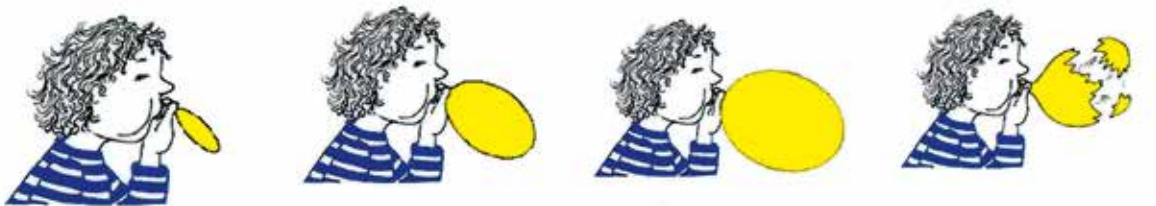


Abb. 2: Handlungsmuster, gebildet aus dem Grundmotiv „Luft in Ballon pusten“ und der Regel „die Atemstöße bis zum Platzen des Ballons fortsetzen“ (aus: *Szenario – vom Anfang bis zum Ende*, » Materialliste)

2.3 Zahlwörter - die sprachliche Basis

Ab zwei Jahren erwerben Kinder einzelne Zahlwörter, die sprachwissenschaftlich eine besondere Wortklasse darstellen. Oberflächlich betrachtet erscheinen Zahlwörter wie Eigenschaftswörter (Adjektive), da man wie „schwarze Hunde“ auch „drei Hunde“ sagen kann. Ein Adjektiv wie „schwarz“ bezeichnet allerdings die Eigenschaft jedes einzelnen schwarzen Hundes. Im Unterschied dazu bezeichnet das Zahlwort „drei“ bei „drei Hunde“ keine Eigenschaft jedes einzelnen Hundes, sondern eine Eigenschaft ihrer Zusammenfügung (zu einer Menge). So beschreibt die Zahl 3 die Anzahl der Objekte von bestimmten Mengen. Beim Erwerb von Zahlwörtern müssen Kinder darum erkennen, dass diese speziellen Wörter sich auf eine abstrakte Eigenschaft, das „Wieviel“ der Objekte in einer Menge beziehen. Noch ist ungeklärt, wie Kinder diese Besonderheit herausfinden. Bereits zweieinhalbjährige Kinder meistern diese Anforderung (Dehaene, 1999). Ein wichtiger Entwicklungsschritt ist der Spracherwerb der Zahlwortreihe, bei dem sich eine prototypische Abfolge von fünf Phasen erkennen lässt (» *Kasten rechts*).

Für die symbolische Darstellung von Zahlen hat sich die dezimale Zahldarstellung im Stellenwertsystem mit der Basis 10 weltweit durchgesetzt. Für das Verständnis dieser Zahldarstellung wäre es hilfreich, wenn auch die Zahlwörter für Zahlen größer als 10 zu diesem System passen würden. Das ist z. B. in der chinesischen Sprache der Fall. Im Chinesischen werden die Zahlen 0 bis 9 konsequent mit einsilbigen Wörtern benannt. Chinesisch sprechende Kinder haben nun den unschlagbaren Vorteil, dass in ihrer Sprache auch die nachfolgenden Zahlwörter bis 100 nach sprachlichen Regeln gebildet werden, die dem 10er-Stellenwertsystem entsprechen: Nach dem Wort für die Zahl 10 werden die bereits bekannten Zahlwörter von 1 bis 9 wiederholt. Danach lauten die Zahlwörter, übersetzt in die deutsche Sprache, für 11: zehn-eins; für 12: zehn-zwei; ...; für 20: zwei-zehn; für 21: zwei-zehn-eins usw.

Im Unterschied dazu müssen Kinder beim Lernen deutscher (oder englischer) Zahlwörter zahlreiche Unregelmäßigkeiten und Ausnahmen bewältigen: Die Zahlwörter „elf“ und „zwölf“ müssen gesondert gelernt werden und haben keinen Bezug zum Wort „zehn“. Ab der Zahl 13 spricht man zuerst die Einer („drei-zehn“ usw.), obwohl man beim Zählen bereits jenseits des Zehners angekommen war. So verhaspeln sich Kinder beim Aufsa-

Fünf Phasen beim Spracherwerb der Zahlwortreihe

Die folgenden fünf Phasen beschreiben, welche *sprachliche* Flexibilität Kinder nach und nach im Gebrauch der Zahlwortreihe erreichen, noch bevor sie Zahlen als Symbole für Anzahlen begreifen lernen (Lorenz, 2016):

Phase 1: Zahlwortreihe als eine Ganzheit

Anfangs sprechen Kinder die Zahlwortreihe als ein ungegliedertes, langes Wort: „einszweidreivierfünf...“. Dabei geht es noch nicht darum, etwas abzuzählen, sondern viele Informationseinheiten im phonologischen Gedächtnis zu halten. Vor einer vergleichbaren Herausforderung stehen Zweijährige, wenn sie z. B. „Dampfschiffahrtsgesellschaft“ nachsprechen wollen.

Phase 2: Zahlwortreihe als starre Abfolge von Wörtern

Nach und nach beginnen Kinder, die verschiedenen Zahlwörter voneinander zu unterscheiden, also z. B. „eins, zwei, drei, vier, fünf...“. Allerdings können sie die Zahlwortreihe in dieser Phase nur dann aufsagen, wenn sie mit dem Zahlwort „eins“ beginnen. Werden sie unterbrochen, müssen sie wieder von vorn anfangen.

Phase 3: teilweise flexible Zahlwortreihe

Kinder beginnen, von einem vorgegebenen Zahlwort aus die Reihe weitersprechen zu können. Auch können sie den Vorgänger und Nachfolger eines vorgegebenen Zahlworts nennen, vornehmlich in der Reihe bis „fünf“, wie z. B.: „vor der Fünf kommt die Vier“, „Nach der Zwei kommt die Drei“. Diese Leistung vollbringen bereits Kinder, die noch keine Vorstellung von Zahlen im mathematischen Sinne entwickelt haben.

Phase 4: flexible Zahlwortreihe

Kinder beherrschen die Zahlwortreihe in flexibler Weise, wenn sie von einem Startzahlwort aus die Reihe um eine bestimmte Anzahl an Zahlwörtern weiter aufsagen können, also z. B. ab der Vier um drei Zahlen weiterzuzählen, nämlich „fünf, sechs, sieben“. Auch darin spiegelt sich die wachsende Gedächtnisleistung des Kindes, mehrere zahlwortbezogene Informationen gleichzeitig verarbeiten zu können: das Startzahlwort, die Anzahl der Zahlwörter, die weitergesprochen werden, sowie den betreffenden Abschnitt der Zahlwortreihe, der auf das Startzahlwort folgt.

Phase 5: sichere und flexible Zahlwortreihe

Kinder können von jedem Zahlwort aus die Zahlwortreihe um eine bestimmte Anzahl weitersprechen und z. B. nur jedes zweite Zahlwort der Zahlwortreihe nennen: „zwei, vier, sechs, acht“. Besonders wichtig ist, dass sie die Zahlwortreihe sowohl vorwärts als auch rückwärts aufsagen können.

Ein Zahlkonzept erwerben Kinder erst dann, wenn sie das Sprechen der Zahlwortreihe mit dem Handeln „eins dazutun“ beim Abzählen verbinden (» Kapitel 2.5). Damit beginnen sie bereits, *bevor* sie die hier beschriebenen fünf Phasen vollständig durchlaufen haben.

gen der Zahlwortreihe, während chinesischsprachige Kinder aufgrund der regelmäßig gebildeten sprachlichen Zahlwörter („zehn-eins“, „zehn-zwei“, „zehn-drei“ usw.) mühelos weiterzählen können. Dass schon vierjährige Kinder in China die Zahlwortreihe im Durchschnitt bis vierzig aufsagen können, aber vierjährige englischsprachige Kinder nur bis ca. fünfzehn (Miller et al., 1995), überrascht deshalb nicht. Dieser Unterschied macht sich auch beim Schreibenlernen bemerkbar und führt zu zahllosen Fehlschreibungen. Viele Studien weisen darauf hin, dass die Besonderheiten der Zahlwörter mit mangelndem Bezug zum 10er-Stellenwertsystem den Erwerb mathematischer Fähigkeiten erschweren (Fuson & Kwon, 1992). Insofern sind sinnvolle gemeinsame Handlungskontexte wichtig, die einen Zugang zum dezimalen Stellenwertsystem erleichtern.

2.4 Zahlsymbole lesen lernen

So wie Kinder Buchstaben als Schriftzeichen für gesprochene Laute lernen, müssen sie auch die Ziffern als Schriftzeichen für gesprochene Zahlwörter lernen. Nahezu auf der ganzen Welt sind die arabischen Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 als Schriftzeichen gebräuchlich. Durch die Kombination dieser Ziffern lassen sich in der dezimalen Zahlschrift Zahlen in beliebiger Größe verschriftlichen. Kinder lernen diese Zahlsymbole nahezu mühelos im Alltag (der Kita) zu lesen, wenn sie ihnen regelmäßig, z.B. beim Betrachten von Büchern oder beim Würfeln, begegnen. Dabei erwerben sie das Lesen gewöhnlich nicht in der Abfolge der Zahlwortreihe, sondern eher nach persönlicher Bedeutsamkeit. So lesen sie vielleicht die 51 lange vor der 7, weil es die eigene Hausnummer ist.



2.5 Objekte zählen und Anzahlen begreifen

Für das korrekte Abzählen der Objekte einer Menge sind drei Teilfähigkeiten grundlegend: (1) Die Einheit bzw. Kategorie erkennen, was gezählt wird (Autos, Äpfel etc.); (2) die Zahlwörter nach der festen Abfolge der Zahlwortreihe verwenden; (3) beim Auszählen der Objekte die sogenannten fünf Zählprinzipien anwenden: Beim Abzählen von Objekten entwickeln Kinder allmählich ein Verständnis dafür, dass beim Sprechen jedes neuen Zahlworts ein weiteres Objekt dazukommt. Mit dem nächsten Zahlwort in der Reihe ist also jeweils ein Objekt mehr gemeint. Ein solches Verständnis wird auch als Anzahlenkonzept bezeichnet. Dazu benötigen Kinder das Verstehen und Anwenden der folgenden fünf Zählprinzipien (Gelman & Gallistel, 1986):

1. **Abstraktionsprinzip:** Kinder wissen, dass man prinzipiell alle unterscheidbaren Dinge zählen kann und man zunächst die Einheit dessen bestimmen muss, was gezählt wird.
2. **Eins-zu-eins-Prinzip:** Sie beachten beim Abzählen der Objekte, dass sie jedem Objekt genau ein Zahlwort zuordnen.
3. **Prinzip der stabilen Reihenfolge:** Sie wissen, dass beim Abzählen der Objekte jedes Zahlwort nur einmal vorkommt, und zwar in der festen Abfolge der Zahlwortreihe. Mit diesem linearen Anwachsen der Zahlwortreihe und den damit verknüpften Anzahlen ist auch der Erwerb einer Raumvorstellung der geordneten Zahlenreihe verbunden.
4. **Prinzip der Anordnungsbeliebigkeit:** Sie wissen, dass es beim Abzählen von Objekten (z.B. Bonbons) gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge man auf sie zeigt. Bei Objekten, die in einer „natürlichen“ Reihe vorliegen (z.B. Treppenstufen), ist es hingegen sinnvoll, in genau dieser Reihenfolge der Objekte zu zählen.
5. **Prinzip der Kardinalität:** Sie wissen, dass mit dem letzten Zahlwort beim Abzählen der Objekte einer Menge die Anzahl ihrer Objekte bezeichnet wird (die Kardinalität der Menge). Damit ist das letzte Zahlwort die präzise Antwort auf die Frage, wie viele Objekte eine Menge enthält.

Mit der flexiblen Anwendung der Zahlwortreihe sowie dem Anwenden der fünf Zählprinzipien erwerben Kinder das Anzahlenkonzept, das ein wesentliches mathematisches Basiskonzept darstellt. Es beinhaltet die Erkenntnis, dass zu jeder Zahl eine festgelegte bestimmte Anzahl von Objekten einer Menge gedacht werden kann. Erst mit dieser Erkenntnis haben Kinder die Beziehung zwischen Zahlen und Mengen verstanden.