2022

FOS · BOS 12

Fachabitur-P
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik Te

+ Aufgaben im Stil der
+ CAS-Abitur

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2021 zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Übungsaufgaben zur Analysis mit CAS

Übungsaufgaben zur Geometrie mit CAS

Musterprüfungen zum Fachabitur ab 2019

Musterprüfung I

Musterprüfung II

Original-Fachabituraufgaben

Fachabitur 2019 (Technik)

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe beeinflusst. Um Ihnen die Prüfung 2021 schnellstmöglich zur Verfügung stellen zu können, bringen wir sie in digitaler Form heraus. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Digitales Übungsmaterial zu diesem Buch

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Fachabiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein **kostenloses Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen im Fachabitur 2022 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu unter www.stark-verlag.de/mystark (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

Autoren

Lösungen zu den Original-Fachabituraufgaben (Technik):
StD Winfried Stark (ohne CAS: ab 2019)
OStR Wolfgang Hager (ohne CAS: bis 2018, mit CAS: bis 2019)

Musterprüfungen:
StD Winfried Stark

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der FOS bzw. ein Jahr an der BOS absolviert und werden eine schriftliche Prüfung im Fach Mathematik ablegen. Bei der Vorbereitung auf die Abschlussprüfungen wird Ihnen dieses Buch eine gute Hilfe sein.

Mit dem Fachabitur 2019 haben sich die Struktur und die Inhalte der Prüfung geändert. Die Fachabiturprüfungen bis 2018 eignen sich daher nur noch bedingt zur Vorbereitung.

Zur Einübung der Prüfungsinhalte bietet Ihnen dieses Buch daher neben den **offiziellen Fachabituraufgaben seit 2019** einen Übungsteil, der sich aus inhaltlich **relevanten offiziellen schriftlichen Prüfungsaufgaben bis 2018** zusammensetzt. Außerdem erhalten Sie mit diesem Buch die entsprechenden Aufgaben aus den offiziellen Prüfungen, die mit einem Computer-Algebra-System (CAS) zu bearbeiten sind.

Um Ihnen eine weitere Übungsmöglichkeit zu geben, enthält das Buch zwei **Musterprüfungen** im Stil der neuen Fachabiturprüfung.

Zu jeder Aufgabe folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die beschriebenen Lösungswege nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf Schulaufgaben einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Fachabiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!

3.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben.
Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgabengruppe	Bewertungseinheiten
Teil 1	A	22 BE
	G	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	G	23 BE

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungseinheiten	100 ⋮ 96	95 ⋮ 91	90 ⋮ 86	85 ⋮ 81	80 ⋮ 76	75 ⋮ 71	70 ⋮ 66	65 ⋮ 61	60 ⋮ 56	55 ⋮ 51	50 ⋮ 46	45 ⋮ 41	40 ⋮ 34	33 ⋮ 27	26 ⋮ 20	19 ⋮ 0

3.3 Zugelassene Hilfsmittel (Prüfung ohne CAS)

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Technik für Berufliche Oberschulen bzw. eine diese enthaltende zugelassene Formelsammlung. Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Technik wurde von den Fachmitarbeitern der Dienststellen der Ministerialbeauftragten für die Beruflichen Oberschulen des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus erarbeitet. Sie ist auf der Website des Staatinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) zu finden.

3.4 Zugelassene Hilfsmittel (Prüfung mit CAS)

Zusätzlich zu den Hilfsmitteln für die Prüfung ohne CAS sind folgende Computer-Algebra-Systeme zugelassen:

- ClassPad 330 und ClassPad II von Casio
- TI-Nspire CAS und TI-Nspire CX CAS von Texas Instruments
- Voyage 200 von Texas Instruments
- MathCAD
- GeoGebra

Vor der Verwendung bei der Abschlussprüfung sind die CAS-Rechner jeweils einheitlich in einen Ausgangszustand zu versetzen, der den Prüfungsanforderungen gerecht wird. In diesem Ausgangszustand muss ein Zugriff auf möglicherweise gespeicherte Dateien, Programme oder Ergänzungspakete mit zusätzlichen Funktionen unterbunden sein.

4 Arbeit mit diesem Buch

Da sich die Form der Prüfung und die Prüfungsinhalte 2019 wesentlich geändert haben, sind die zuvor gestellten Fachabiturprüfungen nicht mehr vollständig relevant. Das Buch enthält daher die **Original-Fachabiturprüfungen seit 2019** sowie in einem separaten **Übungsteil** eine Auswahl relevanter Aufgaben aus den Original-Prüfungen bis 2018. Mit diesen Aufgaben können Sie sich inhaltlich sehr gut auf die Prüfung vorbereiten.

Eine zusätzliche Übungsmöglichkeit für den hilfsmittelfreien Teil bietet Ihnen das **interaktive Training**, das Sie online mit dem im Ausklapper des Buchs abgedruckten Code aufrufen können.

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation dienen die **Musterprüfungen**, die der Form der Fachabiturprüfung (ohne CAS) ab 2019 entsprechen. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und GI bzw. AII und GII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Musterprüfungen decken ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Aufgabenstellungen ab, erheben aber nicht den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und -varianten.

Empfehlung zur Musterprüfung für die Prüfung mit CAS
Die Aufgaben im Teil 2 der Musterprüfung können auch mithilfe eines CAS bearbeitet werden. Die in der Musterprüfung angegebenen Bewertungseinheiten und Lösungshinweise beziehen sich aber immer auf eine Bearbeitung ohne Verwendung eines CAS. Dies bedeutet, dass bei der identischen Aufgabenstellung, jedoch mit Verwendung eines CAS, eventuell weniger Bewertungseinheiten erreicht werden können, da der Aufwand zum Lösen der Aufgabe geringer ist.

Die Lösung wird deshalb meist von der vorgeschlagenen Lösung abweichen und kürzer sein, da algebraische Umformung mit dem CAS durchgeführt werden können. Die Lösungsansätze können dabei aber durchaus identisch sein. Beispielsweise wird man für die Bestimmung der Monotonieintervalle immer die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen müssen. Während man bei der Aufgabenstellung ohne CAS im Anschluss noch eine Vorzeichentabelle erstellen muss, kann man bei der Aufgabenstellung mit CAS für diese Berechnung direkt das CAS benutzen. Z. B. kann man direkt berechnen, für welche Werte von x die Funktion f größer bzw. kleiner Null ist.

Schülerinnen und Schülern, welche sich auf das CAS-Fachabitur vorbereiten, empfehlen wir daher, die komplette Musterprüfung zuerst ohne CAS zu bearbeiten und mit etwas zeitlichem Abstand dieselbe Prüfung nochmals mit CAS durchzurechnen.

Dies empfiehlt sich auch deshalb, weil nach aktuellem Wissensstand im Teil 2 einzelne Teilaufgaben wie bisher ohne CAS gelöst werden müssen. Speziell bei Aufgaben mit Parametern gestalten sich Fallunterscheidungen mit dem CAS teilweise kompliziert. Solche Aufgaben werden in der Regel ohne CAS zu bearbeiten sein. Das gilt für die Aufgaben AII 1.2 und AII 1.4 im Teil 2 der Musterprüfung.

Die Aufgaben im Teil 1 der Musterprüfung dürfen ohnehin nur ohne Hilfsmittel gelöst werden und sind daher in der Nicht-CAS- und der CAS-Prüfung identisch.

5 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Fachabiturprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung soll Ihnen einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff vermitteln, sie ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik. Die Zusammenstellung kann Ihnen bei der Vorbereitung auf die Fachabiturprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

5.1 Analysis

Grundbegriffe bei reellen Funktionen

Grundlagen

- Reelle Funktionen: Abbildungsvorschrift, Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge, Funktionsgraph
- Lineare Funktionen und lineare Ungleichungen
- Quadratische Funktionen und quadratische Ungleichungen

Ganzrationale Funktionen und Funktionsscharen

- Verknüpfung von Funktionen: Summe, Differenz, Produkt
- Nullstellenbestimmung unter Verwendung von Polynomdivision und Substitution
- Faktorisierung des Funktionsterms und Vielfachheit der Nullstellen
- Schnittpunkte von Funktionsgraphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$
- Symmetrie des Funktionsgraphen (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Exponentialfunktion und Logarithmus

- Eigenschaften der Funktion $f: x \mapsto a \cdot e^{c \cdot (x-d)} + y_0$ mit $b > 0$
- Einfluss der Parameter a, b, c, d und y_0 auf den Graphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$
- Lösen von Exponentialgleichungen unter Verwendung der Logarithmusgesetze
- Exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme

Differenzialrechnung

- Differenzenquotient, Differenzialquotient und Ableitungsfunktion
- Lokale und mittlere Änderungsrate
- Tangente
- Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktionen und deren Ableitungsfunktionen
- Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor, Summenregel, Produktregel, Kettenregel
- Ableitung von ganzrationalen Funktionen (auch mit Parameter)
- Ableitung von einfachen Funktionen, die als Produkt, Summe oder Verkettung von Exponential- und Polynomfunktionen entstehen (ohne Parameter)

Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung

- Monotoniedefinition, Monotoniekriterium, maximale Monotonieintervalle
- Links- und Rechtskrümmung, maximale Krümmungsintervalle
- Extrempunkte, Wendepunkte, Randextrema und absolute Extrema
- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen (auch mit Parameter) und einfachen Funktionen, die als Produkt, Summe oder Verkettung von Exponentialfunktionen und linearen bzw. quadratischen Funktionen entstehen
- Aufstellen eines Funktionsterms bei vorgegebenen Eigenschaften
- Anwendungsaufgaben, Optimierungsaufgaben

Integralrechnung

- Stammfunktion einer Funktion
- Unbestimmtes Integral
- Berechnung von Stammfunktionen für ganzrationale Funktionen sowie für einfache Funktionen, deren Term Exponentialfunktionen enthält, unter Verwendung von
  $$\int e^{ax+b}\,dx$$
- Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals
- Deutung des bestimmten Integrals als Flächenbilanz
- Berechnung von Flächeninhalten mithilfe des bestimmten Integrals

5.2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

- Geometrischer Vektor als Menge aller parallelgleichen Pfeile
- Repräsentant eines Vektors
- Nullvektor, Gegenvektor
- Addition von Vektoren, S-Multiplikation und deren Rechengesetze
- Punkte und Ortsvektoren, Koordinatensysteme, Koordinaten
- Addition und S-Multiplikation in Koordinatenschreibweise

Aufgabenstellung

BE

1 Entscheiden Sie, welche Funktionsterme einen Graphen besitzen, der punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft. Geben Sie für Ihre Entscheidung auch ein kurze Begründung an.
Für alle Funktionen gilt $D_f = \mathbb{R}$. 5

Punktsymmetrie			
ja	**nein**	**Funktionsterm f(x)**	**Begründung**
☐	☐	$x \cdot (x-4) \cdot (x+2)$	
☐	☐	$x \cdot (x-4)^2 \cdot (x+4)$	
☐	☐	$2 - x \cdot (x^2 - 1)$	
☐	☐	$x \cdot e^{1-x^2}$	

TIPP Lösungshinweise – Teil 1, Analysis I

Teilaufgabe 1

Achten Sie auf die Nullstellen und deren Vielfachheiten.

Achten Sie auf die Exponenten.

Verwenden Sie unter Umständen das (Punkt-)Symmetriekriterium:
$f(-x) = -f(x)$

Teilaufgabe 2.1

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen der Funktion g in seinem linken Wendepunkt.

Nutzen Sie diese Steigung, um die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen $G_{g'}$ anzugeben.

Untersuchen Sie das Steigungsverhalten des Graphen der Funktion g für $x \to -\infty$.

Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften des Graphen G_g.

Entscheiden Sie, an welcher Stelle der Graph $G_{g'}$ die x-Achse schneidet.

Zeichnen Sie den Graphen $G_{g'}$ ein.

Teilaufgabe 2.2

Schätzen Sie die eingeschlossene Fläche durch „Kästchen-Zählen“ ab.

Teilaufgabe 2.3

Berechnen Sie die Koordinaten des relativen Hochpunktes.

Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion g für $x \to \pm\infty$.

Treffen Sie eine Aussage für die Wertemenge W und achten Sie dabei auf die richtigen Intervallgrenzen.

Teilaufgabe 3.1

Geben Sie die Nullstellen der Funktion h_a an.

Führen Sie eine Fallunterscheidung durch und argumentieren Sie dabei mit der geometrischen Deutung der Vielfachheit der Nullstellen.

Beachten Sie, dass sich zwischen zwei Nullstellen stets ein relativer Extrempunkt befindet.

Teilaufgabe 3.2

Lösen Sie die entsprechende Ungleichung mithilfe einer Vorzeichentabelle und beachten Sie, dass $a > 0$ gilt.

1

Punktsymmetrie ja	Punktsymmetrie nein	Funktionsterm f(x)	Begründung
☐	☒	$x \cdot (x-4) \cdot (x+2)$	Die Nullstellen sind nicht symmetrisch zu $x = 0$.
☐	☒	$x \cdot (x-4)^2 \cdot (x+4)$	Die Nullstellen sind zwar symmetrisch zu $x = 0$, aber sie haben unterschiedliche Vielfachheiten.
☐	☒	$2 - x \cdot (x^2 - 1)$	Der Term enthält einen Summanden mit **geradzahligem** Exponenten: $f(x) = 2 - x(x^2-1) = 2 - x^3 + x$ $= -x^3 + x \mathbf{- 2}$
☒	☐	$x \cdot e^{1-x^2}$	Das Produkt einer zum Koordinatenursprung symmetrischen Funktion ($f(x) = x$) und einer zur y-Achse symmetrischen Funktion ($g(x) = e^{1-x^2}$) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. *Alternativ:* $f(-x) = -x \cdot e^{1-(-x)^2}$ $= -x \cdot e^{1-x^2} = -f(x)$ Da zudem $D_f = \mathbb{R}$ symmetrisch zu $x = 0$ ist, ist der Graph der Funktion f symmetrisch zum Koordinatenursprung.

2.1 Im Punkt W (linker Wendepunkt des Graphen) hat der Graph der Funktion g seine maximale Steigung. Der Wendepunkt liegt ungefähr bei W(–0,7 | 0,25). Zeichnet man im Punkt W die Tangente an den Graphen G_g und entnimmt dieser den Wert der Steigung mithilfe eines Steigungsdreiecks, so erhält man:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}8}{1} = 0{,}8$$

Weil $g'(-0{,}7) = m = 0{,}8$ ist, gilt für den Hochpunkt des Graphen der Ableitungsfunktion g':
H(–0,7 | 0,8)

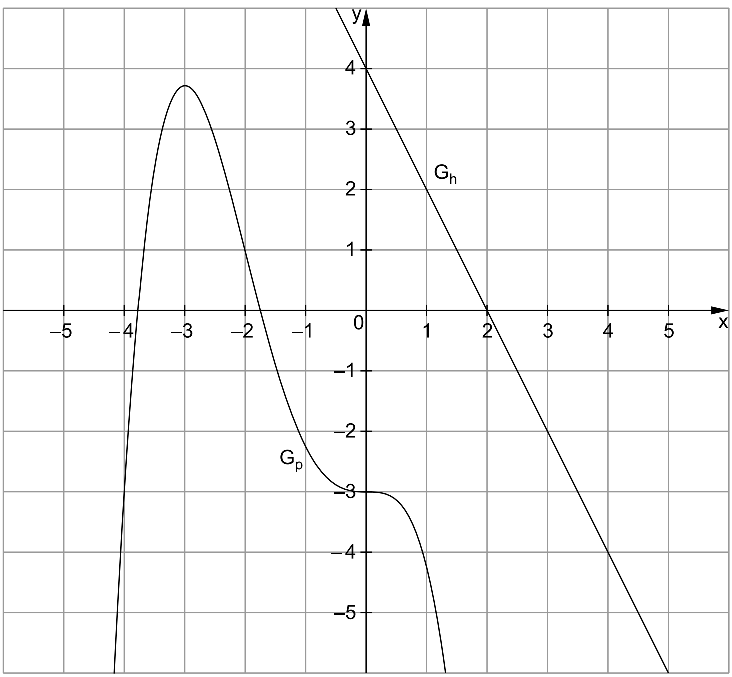
Für $x \to -\infty$ folgt: $g(x) = -\frac{1}{e} + e^{1-x^2} \to -\frac{1}{e}$

Aufgabenstellung

BE

1 Die Funktion $f'_a\colon x \mapsto (x-a)^2 \cdot (x+3)$ mit der Definitionsmenge $D_{f'_a} = \mathbb{R}$ ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_a mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie sämtliche Werte für a, sodass der Graph der zugehörigen Funktion f_a mehr als einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.
Begründen Sie, von welcher Art diese Punkte dann jeweils sind. 5

2.0 Die ganzrationale Funktion 4. Grades p und die lineare Funktion h sind auf $D_p = D_h = \mathbb{R}$ definiert.
In der nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von p und h dargestellt.
Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



TIPP **Lösungshinweise – Teil 1, Analysis**

Teilaufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $f_a'(x) = 0$ und entscheiden Sie, für welche Werte von a man zwei unterschiedliche Lösungen erhält.

Untersuchen Sie das Vorzeichenverhalten der Funktionswerte von f_a' in der Umgebung der Nullstellen (z. B. mit einer Vorzeichentabelle) und schließen Sie daraus auf die Art der Punkte mit waagrechter Tangente.

Teilaufgabe 2.1

Entnehmen Sie der Grafik den ganzzahligen Funktionswert h(3).

Teilaufgabe 2.2

Entnehmen Sie der Grafik die Nullstelle x_0 der Funktion h.

Entscheiden Sie anhand der Grafik, wie viele Lösungen die Gleichung $p(x) = x_0$ besitzt.

Teilaufgabe 3

Der Funktionsterm besteht aus zwei Summanden: einer Konstanten und einem von t abhängigen Term.

Der von t abhängige Term beschreibt die Temperaturdifferenz zum Zeitpunkt t und strebt mit zunehmender Zeit gegen null.

Teilaufgabe 4.1

(a) Die erste Ableitung liefert eine Aussage über das Steigungsverhalten des Graphen.
(b) Die zweite Ableitung liefert eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen.
(c) Das bestimmte Integral liefert den Wert einer eingeschlossenen Fläche (bzw. Flächenbilanz). Treffen Sie davon ausgehend eine Entscheidung darüber, wo der überwiegende Teil der Fläche bezüglich der x-Achse liegt.

Teilaufgabe 4.2

Nutzen Sie die Bedeutung der in 4.1 festgelegten Aussagen.

Teilaufgabe 5.1

Untersuchen Sie für jeden Funktionsterm das Verhalten der Funktionswerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

Bringen Sie den Funktionsterm t(x) in Produktform.

Teilaufgabe 5.2

Lösen Sie die Gleichung $s(x) = u(x)$.

1 Stellen mit waagrechter Tangente:

$$f_a'(x) = 0$$

$$(x-a)^2(x+3) = 0$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = a$$

TIPP Falls $a = -3$ ist, besitzt f_a' eine einzige Nullstelle (und zwar die dreifache Nullstelle $x_1 = -3$).

Zwei unterschiedliche Nullstellen der Ableitungsfunktion f_a' und somit zwei unterschiedliche Stellen mit waagrechter Tangente an den Graphen der Funktion f_a hat man für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

1. Fall: $a > -3$

VZT		–3		a		
$(x-a)^2$	+		+	0	+	x
$(x+3)$	–	0	+		+	
$f_a'(x)$	–	0	+	0	+	
G_{f_a}	↘	→ TP	↗	→ TeP	↗	

2. Fall: $a < -3$

VZT		a		–3		
$(x-a)^2$	+	0	+		+	x
$(x+3)$	–		–	0	+	
$f_a'(x)$	–	0	–	0	+	
G_{f_a}	↘	→ TeP	↘	→ TP	↗	

In beiden Fällen hat der Graph der Funktion f_a einen relativen Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = -3$ und einen Terrassenpunkt an der Stelle $x_2 = a$.

Alternative Begründung:
$x_1 = -3$ ist eine einfache Nullstelle der Ableitungsfunktion f_a', d. h., f_a' hat an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel von – nach +.

. Der Graph der Funktion f_a' hat an der Stelle $x_1 = -3$ einen relativen Tiefpunkt.

$x_2 = a$ ist eine doppelte Nullstelle der Ableitungsfunktion f_a', d. h., f_a' hat an dieser Stelle keinen Vorzeichenwechsel.

$\Rightarrow$ Der Graph der Funktion f_a' hat an der Stelle $x_2 = a$ einen Terrassenpunkt.

2.1 Der Grafik kann entnommen werden, dass gilt:
$h(3) = -2$ und $p(-2) = 1$

Somit folgt:
$p(h(3)) = p(-2) = 1$

Aufgabenstellung

		BE
1.0	Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten Funktion $f\colon x \mapsto ax^4 + bx^3 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ besitzt die beiden Wendepunkte $W_1(0\,\vert\,1)$ und $W_2(2\,\vert\,-3)$.	
1.1	Ermitteln Sie den Funktionsterm von f. [Teilergebnis: $a = \frac{1}{4}$; $b = -1$; $c = 1$]	3
1.2	Bestimmen Sie die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_f.	3
1.3	Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 4{,}25$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm	3
1.4	Gegeben ist weiterhin die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 2x - 7$ auf $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph G_g dieser Funktion schließt mit dem Graphen G_f ein endliches Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 ein, kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.	4
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $h_k\colon x \mapsto 2x^3 + 4kx^2 + 8x$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$.	
2.1	Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist. „Der Graph der Funktion h_k ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung."	2
2.2	Ermitteln Sie, für welche Werte für k die Funktion h_k genau eine Nullstelle besitzt.	5
2.3	Bestimmen Sie den Wert für k, für den die Funktion h_k an der Stelle $x = 2$ einen relativen Tiefpunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.	4

TIPP Lösungshinweise – Teil 2, Analysis I

Teilaufgabe 1.1

Stellen Sie mithilfe der Informationen aus der Aufgabenstellung ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses mit dem CAS.

Die Wendepunkte liegen auf G_f und erfüllen die Funktionsgleichung.

An den Wendestellen ist der Wert der 2. Ableitung der Funktion f gleich null.

Teilaufgabe 1.2

Besitzt die Funktion f' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach –, dann hat die Funktion f dort ein lokales Maximum. Bei einem Vorzeichenwechsel von – nach + liegt dagegen ein lokales Minimum vor.

Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle des Extremums.

Teilaufgabe 1.3

Erstellen Sie mit dem CAS eine Wertetabelle.

Beachten Sie den Maßstab.

Teilaufgabe 1.4

Bestimmen Sie mit dem CAS die beiden Schnittstellen x_1 und x_2 der Graphen von f und g und damit die Integralgrenzen.

Verwenden Sie für die Flächenberechnung das Integral von „oberer Graph minus unterer Graph".

Teilaufgabe 2.1

Untersuchen Sie mit dem CAS, ob $h_k(-x) = h_k(x)$ (Achsensymmetrie zur y-Achse) oder $h_k(-x) = -h_k(x)$ (Punktsymmetrie zum Ursprung).

Teilaufgabe 2.2

Bestimmen Sie mit dem CAS alle möglichen Nullstellen in Abhängigkeit von k.

Untersuchen Sie, ob es Parameterwerte für k gibt, für die genau eine Nullstelle vorliegt.

Teilaufgabe 2.3

Einen relativen Tiefpunkt bei $x = 2$ kann es nur geben, wenn die 1. Ableitung von h_k an dieser Stelle null ist.

Setzen Sie in die 1. Ableitung den Wert $x = 2$ ein und bestimmen Sie mit dem CAS, für welche Parameterwerte für k die 1. Ableitung null ist.

Prüfen Sie mit der 2. Ableitung von h_k, ob bei $x = 2$ tatsächlich ein Tiefpunkt vorliegt.

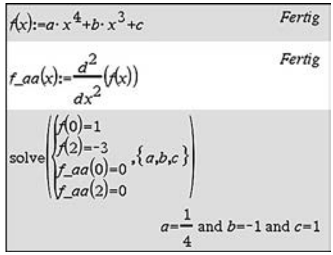
Lösungsvorschlag – Teil 2, Analysis I

1.1 Die Funktion f hat laut Angabe folgende Form: $f(x) = ax^4 + bx^3 + c$

> **TIPP** Es empfiehlt sich, im ersten Schritt die Funktion f in Abhängigkeit der Parameter zu definieren und dann die 2. Ableitungsfunktion zu berechnen.

Mit den Informationen aus der Aufgabenstellung erhält man ein Gleichungssystem, das man mit dem CAS löst:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = -3 \\ f''(0) = 0 \\ f''(2) = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad a = \frac{1}{4};\ b = -1;\ c = 1$$



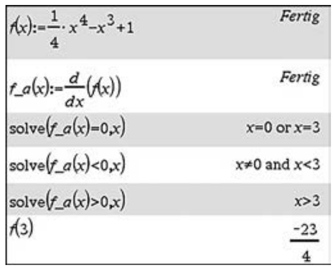
1.2 Stellen mit waagrechter Tangente:

$$f'(x) = 0 \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad x = 0 \lor x = 3$$

Vorzeichenverhalten von $f'(x)$:

$$f'(x) < 0 \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad x < 3 \land x \neq 0$$

$$f'(x) > 0 \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad x > 3$$



Da $f'(x)$ an der Stelle $x = 3$ einen Vorzeichenwechsel von – nach + besitzt, besitzt f dort ein relatives Minimum.

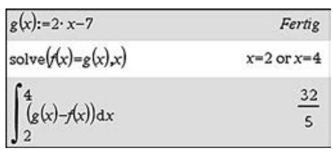
$$f(3) \overset{\text{CAS}}{=} -\frac{23}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Relativer Tiefpunkt } T\left(3 \,\middle|\, -\frac{23}{4}\right)$$

1.3 Vgl. Teilaufgabe 1.3 der Prüfung ohne CAS.
Eine Kontrolle mit dem CAS ist möglich.

1.4 Einzeichnen des Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 und Kennzeichnen des beschriebenen Flächenstücks.

Bestimmung der Schnittstellen der beiden Graphen (Integralgrenzen):

$$f(x) = g(x) \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad x = 2 \lor x = 4$$



Bestimmung der Flächenmaßzahl:

$$A = \int_2^4 (g(x) - f(x))\,dx \overset{\text{CAS}}{=} \frac{32}{5}$$