2022

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR
ERFAHREN

Niedersachs

Mathematik gA

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2021 zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MyStark.

Die mit einem * markierten Aufgaben sind wegen Lehrplanänderungen seit 2021 für das Abitur nicht mehr relevant.

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2021 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

Bei MyStark finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019 und 2021** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren
Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2011–2018)
Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2014–2019 und 2021)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2022** im **Grundlegenden Anforderungsniveau** in **Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Grundlegende Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2022** sowie zum **Pflichtteil**. Diese sind auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2016 bis 2019 und 2021**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019 und 2021**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

ActiveBook Interaktives Training

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 besteht die Abiturprüfung aus zwei Teilen, einem **Pflichtteil**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und einem **Wahlteil**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Bitte beachten Sie: Aufgrund der besonderen, **coronabedingten** Lernsituation in den Schuljahren 2019/20 und 2020/21 werden in der schriftlichen Abiturprüfung 2022 neben dem Sachgebiet Analysis nur **entweder** das Sachgebiet Stochastik **oder** Analytische Geometrie/Lineare Algebra geprüft. Die Entscheidung darüber, welches Sachgebiet in der Abiturprüfung behandelt wird, trifft die jeweilige Schule.
Im **Pflichtteil** werden Ihnen **vier Aufgaben** aus dem Sachgebiet Analysis und einem zweiten Sachgebiet vorgelegt, die länderübergreifend gestellt werden. Je nach Entscheidung Ihrer Schule ist das zweite Sachgebiet **entweder** Stochastik **oder** Analytische Geometrie/Lineare Algebra. Die Aufgaben dieses Pflichtteils sind gleichgewichtet (4×5 BE) und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.
Der **Wahlteil** setzt sich aus drei Aufgabenblöcken mit jeweils zwei Aufgaben A und B zusammen:

- Block 1: zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis (Aufgabe 1A bzw. 1B)
- Block 2: zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Stochastik (Aufgabe 2A bzw. 2B)
- Block 3: zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Aufgabe 3A bzw. 3B).

Sie bekommen Block 1 und je nach Entscheidung Ihrer Schule Block 2 **oder** 3 vorgelegt. Sie müssen **eine** Aufgabe aus Block 1 auswählen und bearbeiten. Aus dem Block 2 bzw. 3 müssen **beide** Aufgaben bearbeitet werden.

Die Gewichtung der zwei Aufgabenblöcke erfolgt im Verhältnis 1:1. Somit wird im Wahlteil die Analysisaufgabe (Aufgabenblock 1) mit einem Anteil von etwa 50 % am stärksten gewichtet. Die beiden Aufgaben aus Block 2 bzw. 3 machen jeweils 25 % aus. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

	Block 1	**Block 2**	**Block 3**
Aus Block 1 muss eine Aufgabe und aus dem Block 2 bzw. 3 müssen beide Aufgaben bearbeitet werden.	Aufgabe 1A (Analysis)	Aufgabe 2A (Stochastik)	Aufgabe 3A (Geometrie/Algebra)
	Aufgabe 1B (Analysis)	Aufgabe 2B (Stochastik)	Aufgabe 3B (Geometrie/Algebra)

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit für den Pflichtteil beträgt 60 Minuten und für den Wahlteil 165 Minuten. Hinzu kommen für den Wahlteil 30 Minuten Auswahlzeit.
Nach Ablauf der Bearbeitungszeit des Pflichtteils müssen Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben für den Wahlteil, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:
- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen Sie die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:
- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.
- Vernetzte Rechner sind in der Abiturprüfung nicht zugelassen.

Weiter sind zur Abiturprüfung gedruckte **Formelsammlungen** der Schulbuchverlage und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte in der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018).
Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2022“ weitere Angaben gemacht.
Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen. Gegliedert sind diese jeweils nach den Lernbereichen.
Bitte beachten Sie: Aufgrund der besonderen, **coronabedingten** Lernsituation in den Schuljahren 2019/20 und 2020/21 werden **einzelne** Lehrplaninhalte in der schriftlichen Abiturprüfung 2022 nicht geprüft. Diese sind in der nachfolgenden Aufstellung markiert.

2.1 Analysis

Einführungsphase

Elementare Funktionenlehre
- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen (***2022 nicht relevant:*** Wurzelfunktionen und $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$)
- ***2022 nicht relevant:*** Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $g(x) = a \cdot f \cdot (b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten

Ableitungen
- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Ableitungsgraph
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (***2022 nicht relevant:*** Ableitungsfunktionen zu $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$)
- Summen-, Faktor- und Potenzregel

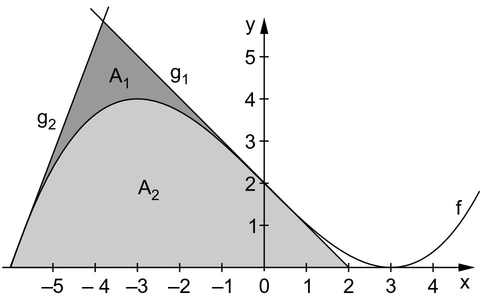
Übungsaufgabe 1 (80 Min., GTR)

Rutschbahn

a) Eine Rutschbahn soll wie ein Stück des Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades verlaufen. Sie soll in $A(0|4)$ beginnen und in $B(6|0)$ enden, jeweils mit der Steigung null.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms.
Aus Sicherheitsgründen soll an keiner Stelle der Rutschbahn die Steigung betragsmäßig größer als 1 sein.
Untersuchen Sie, ob dies der Fall ist.

b) f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{27}(x-3)^2(x+6)$.

g_1 ist die Tangente im Wendepunkt von f, g_2 ist die Tangente in der linken Nullstelle.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von g_1 und g_2.
Es wird behauptet, der Flächeninhalt von A_2 sei genau das Fünffache des Flächeninhaltes von A_1 (siehe Abbildung).
Überprüfen Sie die Behauptung.



TIPP Lösungshinweise – Übungsaufgabe 1

Teilaufgabe a

Rutschbahnkurve

Hier liegt eine sogenannte „Steckbriefaufgabe“ vor. Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion 3. Grades.

Ein Polynom 3. Grades hat die Form: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die Eigenschaften der Funktion entnimmt man dem Text. Es müssen vier Bedingungen erfüllt sein, weil ein Polynom 3. Grades vier Parameter a, b, c und d hat.

Beachten Sie, dass in dem Text „Sie beginnt in $A(0|4)$ mit der Steigung null“ zwei Bedingungen stecken: „$A(0|4)$ liegt auf dem Graphen“ und „In $A(0|4)$ ist die Steigung null“. Die Steigung entspricht der ersten Ableitung.

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses nach den Parametern a, b, c und d auf.

Steigung

Steigungen berechnet man immer mit der Ableitung.

Fertigen Sie eine kleine Skizze an. Diese macht klar, dass die Steigung in den Randpunkten null ist und dazwischen ein Maximum oder ein Minimum liegen muss.

Polynomfunktionen 3. Grades sind immer symmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Der Wendepunkt liegt also in der Mitte zwischen A (Hochpunkt) und B (Tiefpunkt). Dort ist die Steigung betragsmäßig am größten.

Teilaufgabe b

Schnittpunkt und Schnittwinkel

Da hier eine maßstabsgetreue Zeichnung vorliegt, können Sie alle rechnerisch gewonnenen Ergebnisse damit kontrollieren.

Bestimmen Sie die Geradengleichungen der Geraden g_1 und g_2.

Für die Bestimmung des Wendepunktes und der Tangenten braucht man die Ableitungen der Funktion f. Falls Sie im Umgang mit der Produkt- und Kettenregel unsicher sind, so multiplizieren Sie den Funktionsterm aus.

Die Gleichungen der Tangenten erhält man am einfachsten mit der Punkt-Steigungsform.

Die Abbildung unter Teilaufgabe b zeigt, dass der Graph von f einen Wendepunkt besitzt. Im Wendepunkt muss $f''(x) = 0$ gelten. An diesem Punkt berechnen Sie dann die Steigung.

Die Nullstellen sind einfach zu finden: Da die Funktionsgleichung faktorisiert gegeben ist, können Sie „die Klammern gleich null setzen“.

Lösungsvorschlag – Übungsaufgabe 1

a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

A(0 | 4) liegt auf dem Graphen:	$f(0) = 4$	$d = 4$
B(6 | 0) liegt auf dem Graphen:	$f(6) = 0$	$216a + 36b + 6c + d = 0$
Die Steigung in A ist null:	$f'(0) = 0$	$c = 0$
Die Steigung in B ist null:	$f'(6) = 0$	$108a + 12b + c = 0$

Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem:

$$216a + 36b + 4 = 0$$
$$\wedge \quad 108a + 12b = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -9a \quad \wedge \quad 216a - 324a = -4$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -9a \quad \wedge \quad a = \frac{1}{27}$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad a = \frac{1}{27}$$

$$\text{linSolve}\left(\begin{cases}216\cdot a+36\cdot b+4=0\\108\cdot a+12\cdot b=0\end{cases},\{a,b\}\right) \quad \left\{\frac{1}{27},\frac{-1}{3}\right\}$$

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4$$

Das Graphenstück für die Rutschbahn liegt zwischen $x = 0$ und $x = 6$.
Aus Symmetriegründen liegt der Wendepunkt in der Mitte zwischen A und B, also W(3 | 2). Die Steigung im Wendepunkt beträgt:
$f'(3) = 1 - 2 = -1$
Der Graph ist im Wendepunkt zwischen A und B am steilsten, also ist die Steigung betragsmäßig nirgends größer als 1.

b) $f(x) = \frac{1}{27}(x-3)^2(x+6) = \frac{1}{27}(x^2 - 6x + 9)(x+6) = \frac{1}{27}(x^3 - 27x + 54)$

$= \frac{1}{27}x^3 - x + 2$

$f'(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$

$f''(x) = \frac{2}{9}x$

Der Wendepunkt liegt bei W(0 | 2).
Die Wendetangente hat die Steigung $f'(0) = -1$.
g_1 hat also folgende Gleichung:
$g_1(x) = -x + 2$

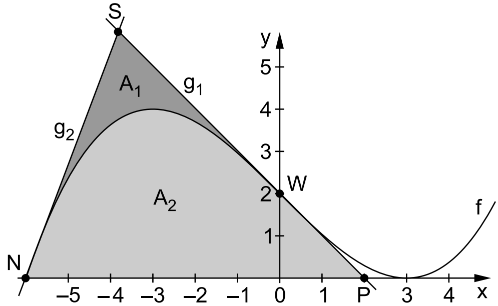
Die linke Nullstelle liegt bei $x = -6$.
Die Tangente in dieser Nullstelle hat die Steigung $f'(-6) = 3$.

g_2 hat also folgende Gleichung:
$g_2(x) = 3x + 18$

Schnittpunkt S von g_1 und g_2:

$$\begin{aligned} -x + 2 &= 3x + 18 \\ -4x &= 16 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \; y = 6$
$\Rightarrow \; S(-4|6)$



Schnittwinkel α:

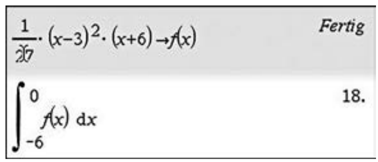
$$\begin{aligned} \alpha &= 180° - \tan^{-1}(3) + \tan^{-1}(-1) \\ &\approx 63{,}43° \end{aligned}$$

Die Gerade g_1 schneidet die x-Achse im Punkt $P(2|0)$.
Der Flächeninhalt $A_1 + A_2$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks NPS:

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

Der Flächeninhalt A_2 setzt sich zusammen aus dem Integral $\int_{-6}^{0} f(x)\,dx$ und dem Flächeninhalt des Dreiecks OPW:

$$\begin{aligned} \int_{-6}^{0} f(x)\,dx &= \int_{-6}^{0} \left(\frac{1}{27} x^3 - x + 2 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{108} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-6}^{0} \\ &= -12 + 18 + 12 = 18 \end{aligned}$$

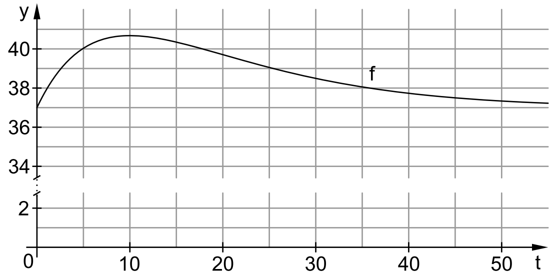


$A_2 = 18 + 2 = 20$
$A_1 = 4$

Damit ist die Behauptung richtig, dass A_2 das Fünffache von A_1 ist.

Wahlteil (GTR) – Aufgabe 1 A

Unter der Körpertemperatur eines Menschen versteht man die Temperatur des Körperinneren.
Die Körpertemperatur eines gesunden Menschen (Normaltemperatur) wird mit 37,0 °C angenommen. Bei Temperaturen ab 37,9 °C spricht man von Fieber.



Der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person lässt sich bei bestimmten Erkrankungen modellhaft mithilfe der Funktion f mit $f(t) = 37 + t \cdot e^{-0,1t}$, $t \geq 0$, beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach dem Ausbruch der Krankheit und f(t) die Körpertemperatur in °C. Die zu ermittelnden Zeiten sollen in Stunden, auf eine Nachkommastelle gerundet, angegeben werden.

Punkte

a) Berechnen Sie
- die Körpertemperatur beim Ausbruch der Krankheit,
- die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten 5 Stunden,
- die maximale Körpertemperatur der erkrankten Person.

Berechnen Sie $f'(2)$ und deuten Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur der erkrankten Person am stärksten abnimmt. 14

b) Hat eine Person Fieber, wird der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Geraden zu $y = 37,9$ als ein Maß für die Belastung der erkrankten Person angenommen.
Bestimmen Sie den Wert der Belastung für den gesamten Zeitraum, in dem die erkrankte Person Fieber hat.
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Belastung der erkrankten Person den Wert von 25 überschreitet.
Die erkrankte Person nimmt 20 Stunden nach Ausbruch der Krankheit ein fiebersenkendes Medikament ein. Man geht davon aus, dass ab diesem Zeitpunkt die Temperatur linear abnimmt. Dabei nimmt die Temperatur im linearen Modell doppelt so schnell ab wie die Temperatur nach 20 Stunden im durch f beschriebenen Modell.
Berechnen Sie, wie viel früher die erkrankte Person mit Medikamenteneinnahme fieberfrei ist. 15

c) Die Funktion f wird jetzt unabhängig vom Sachzusammenhang betrachtet. Durch jeden Punkt $P(p\,|\,f(p))$, $p \geq 0$, verläuft eine Tangente an den Graphen von f. Für jeden Wert von p wird die Tangente durch die Gleichung $y = (1-0{,}1p) \cdot e^{-0{,}1p} \cdot x + 37 + 0{,}1p^2 \cdot e^{-0{,}1p}$ beschrieben.
Zeigen Sie, dass es genau eine Tangente mit kleinstem y-Achsenabschnitt und genau eine Tangente mit größtem y-Achsenabschnitt gibt. 5

34

TIPP **Lösungshinweise zum Wahlteil (GTR) – Aufgabe 1 A**

Teilaufgabe a

Berechnung der Körpertemperatur beim Ausbruch der Krankheit

Da die angegebene Funktion f den zeitlichen Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person angibt, stellt der Funktionswert f(0) die Körpertemperatur in °C beim Ausbruch der Krankheit dar.

Berechnung der durchschnittlichen Temperaturänderung

Die Differenz $f(5) - f(0)$ gibt den Zuwachs der Körpertemperatur in °C während der ersten 5 Stunden an.

Der Quotient $\frac{f(5) - f(0)}{5}$ stellt die gesuchte Temperaturänderung in $\frac{°C}{h}$ während der ersten 5 Stunden dar.

Berechnung der maximalen Körpertemperatur der erkrankten Person

Die Abbildung des Aufgabenblattes zeigt, dass der Graph von f einen Hochpunkt hat. Dort liegt die maximale Körpertemperatur vor. Gehen Sie auch auf das globale Verhalten des Graphen ein.

Ermitteln Sie die Stelle mit dem maximalen Funktionswert von f mithilfe des Rechners.

Sie können das Maximum auch per Hand bestimmen, indem Sie die Ableitung $f'(t)$ untersuchen.

Berechnung und Deutung von $f'(2)$ im Sachzusammenhang

Berechnen Sie $f'(2)$.

Die Ableitung $f'(t)$ an einer bestimmten Stelle t gibt die momentane Änderungsrate des Funktionswertes $f(t)$ an dieser Stelle an.

Beachten Sie die Bedeutung von $f(t)$ im Sachzusammenhang und geben Sie für $f'(2)$ auch die relevante Einheit an.

Ermittlung des Zeitpunktes der stärksten Temperaturabnahme

Der Graph von f zeigt, dass nach Überwindung des Temperaturmaximums die Körpertemperatur wieder bis auf den Normalwert von 37 °C abnimmt und daher $f'(t)$ negativ wird.

Die stärkste Abnahme der Temperatur liegt an der Wendestelle vor.

An dieser Wendestelle hat der Graph von f' einen Tiefpunkt.

Ermitteln Sie die Stelle des Tiefpunktes von f' mit den Rechnerfunktionen.

Teilaufgabe b

Bestimmung des Belastungswertes

Fieber liegt vor, wenn gilt $f(t) \geq 37{,}9$.

Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes $f(t) = 37{,}9$ das Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die erkrankte Person Fieber hat. Nutzen Sie dabei die Rechnerfunktionen.

Berechnen Sie die Belastung der erkrankten Person als bestimmtes Integral.

Ermittlung des Zeitpunktes der Belastung von 25

Definieren Sie im Rechner die Funktion Y mit $Y(x) = \int_{t_1}^{x} f(t)\,dt$ und lösen Sie mit den Rechnerwerkzeugen die Gleichung $Y(x) = 25$.

Berechnung, wie viel früher die erkrankte Person mit Medikamenteneinnahme fieberfrei ist

Ab dem Zeitpunkt $t = 20$ findet durch das fiebersenkende Medikament eine lineare Temperaturabnahme statt, d. h., der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur wird durch eine Gerade g beschrieben.

Die Gerade g geht durch den Punkt $(20 \mid f(20))$ und hat die Steigung $m = 2 \cdot f'(20)$.

Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g und berechnen Sie die Schnittstelle von g mit der Geraden $y = 37{,}9$.

Berechnen Sie nun, wie viele Stunden früher die erkrankte Person fieberfrei ist.

Teilaufgabe c

Nachweis der Existenz genau einer Tangente mit kleinstem und größtem y-Achsenabschnitt

In der angegebenen Tangentengleichung stellt der Vorfaktor von x die Steigung und der Term $37 + 0{,}1p^2 \cdot e^{-0{,}1p}$ den y-Achsenabschnitt b dar.

Der y-Achsenabschnitt b ist eine Funktion von p: $b(p) = 37 + 0{,}1p^2 \cdot e^{-0{,}1p}$.

Ermitteln Sie die Stelle mit dem maximalen und die Stelle mit dem minimalen Funktionswert von b.

Sie können das Maximum und das Minimum per Hand oder auch mit dem Rechner bestimmen.

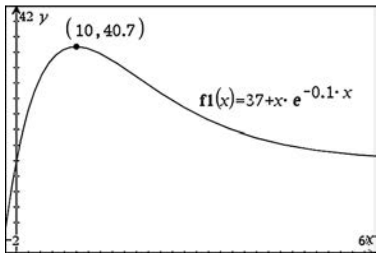
Begründen Sie mithilfe des Graphen von b, dass es jeweils genau eine Tangente der geforderten Art gibt.

Lösungsvorschlag zum Wahlteil (GTR) – Aufgabe 1 A

a) Berechnung der Körpertemperatur beim Ausbruch der Krankheit:
Die Funktion f beschreibt den zeitlichen Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person. Daher stellt der Funktionswert f(0) die Körpertemperatur in °C beim Ausbruch der Krankheit dar. Man erhält:
$f(0) = 37$
Beim Ausbruch der Krankheit beträgt die Körpertemperatur 37 °C.

Berechnung der durchschnittlichen Temperaturänderung:
Der Quotient $\frac{f(5) - f(0)}{5}$ stellt die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten 5 Stunden dar. Man erhält:
$$\frac{f(5) - f(0)}{5} \approx 0{,}6$$
Die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten 5 Stunden beträgt somit ungefähr $0{,}6\,\frac{°C}{h}$.

Berechnung der maximalen Körpertemperatur der erkrankten Person:

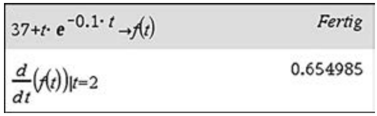


Der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur zeigt, dass der Graph von f im Intervall [5; 15] einen Hochpunkt besitzt. Mit den Rechnerfunktionen erhält man einen Hochpunkt an der Stelle $t = 10$ mit $f(10) \approx 40{,}7$.
Der Temperaturverlauf zeigt, dass nach Überwindung des Temperaturmaximums die Körpertemperatur wieder bis zum Normalwert von 37 °C abnimmt und daher keine höheren Temperaturen vorliegen. Die maximale Körpertemperatur beträgt also etwa 40,7 °C.

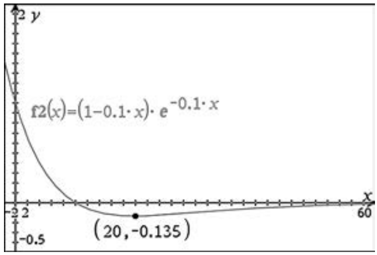
Alternative:
Im Hochpunkt muss $f'(t) = 0$ gelten. Mit der Produktregel folgt:
$$f'(t) = t \cdot e^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1) + e^{-0{,}1t} = (1 - 0{,}1t) \cdot e^{-0{,}1t}$$
Der zweite Faktor $e^{-0{,}1t}$ im Ableitungsterm ist für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv, d. h.:
$$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - 0{,}1t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10$$
Da der erste Faktor $(1 - 0{,}1t)$ offenbar für $t > 10$ negativ ist, gilt dies auch für $f'(t)$. Die Funktionswerte f(t) werden also mit wachsendem t immer kleiner. Genauer: sie streben asymptotisch gegen den Wert 37. Es gibt daher keinen höheren Funktionswert als $f(10) \approx 40{,}7$.

Berechnung und Deutung von f'(2) im Sachzusammenhang:

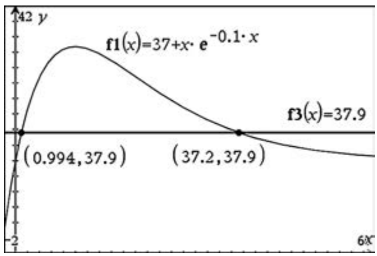
Der Rechner liefert $f'(2) \approx 0,7$. Zwei Stunden nach Beginn der Erkrankung beträgt die momentane Temperaturänderung etwa $0,7\,\frac{°C}{h}$.



Ermittlung des Zeitpunktes der stärksten Temperaturabnahme:
Die stärkste Abnahme der Körpertemperatur der erkrankten Person findet zu einem Zeitpunkt statt, bei dem der Graph der Ableitung f' einen Tiefpunkt besitzt.
Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen von f'. Man erkennt, dass ein Tiefpunkt existiert und dass die Ableitungswerte f'(t) rechts vom Tiefpunkt wieder zunehmen. Der Graph nähert sich von unten her der t-Achse.
Mit der Minimumfunktion des Rechners findet man als t-Koordinate des Tiefpunktes $t = 20$. Nach 20 Stunden nimmt also die Körpertemperatur am stärksten ab.



b) Bestimmung des Belastungswertes:
Zur Berechnung des Belastungswertes müssen zunächst die Zeitpunkte t_1 und t_2 für den Beginn und für das Ende der Fieberphase bestimmt werden. Zu lösen ist also die Gleichung $f(t) = 37,9$.
Der Rechner liefert die Lösungen $t_1 \approx 1$ und $t_2 \approx 37,2$.
Der Wert der Belastung B des Patienten lässt sich nun als bestimmtes Integral berechnen:



$$B = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - 37,9)\,dt \approx 55,5$$

Der Wert der Belastung beträgt ungefähr 55,5.