2022

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Hessen

Mathematik LK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben
2021 zum Download

STARK

Inhalt

Fortsetzung siehe nächste Seite

Landesabitur 2019

Landesabitur 2020

ActiveBook: Aufgaben zum Download

Übungsaufgaben im Stil des Landesabiturs
Analysis
Analytische Geometrie
Stochastik

Landesabitur 2017
A1: Analysis (CAS): $V_s(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{s^2 - r^2}$, $k(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot (x + b)\right) + d$

Landesabitur 2021
www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe beeinflusst. Um Ihnen die Prüfung 2021 schnellstmöglich zur Verfügung stellen zu können, bringen wir sie in digitaler Form heraus. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden.

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Viola Dengler:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 1, Aufgabe 3; Serie 2, Aufgabe 3;
Lösungen zum Landesabitur 2017: Aufgabe C (WTR/GTR/CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2018: Aufgaben A2 (GTR/CAS), C (WTR/GTR/CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2019: Aufgaben A (Stochastik 2), C2 (WTR/CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2020: Aufgaben B1 (WTR), B1 (CAS), C2 (WTR/CAS);
Download: Übungsaufgaben Analysis 5, 7; Stochastik 1, 2, 6; 2021 – A, C2.1 (WTR/CAS), C2.2 (WTR/CAS)

Werner Neidhardt:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 1, Aufgabe 1; Serie 2, Aufgaben 1, 4;
Lösungen zum Landesabitur 2017: Aufgaben A1 (WTR), A2 (WTR);
Lösungen zum Landesabitur 2018: Aufgaben A1 (WTR/GTR), A2 (WTR);
Lösungen zum Landesabitur 2019: Aufgaben A (Analysis 1), B1 (WTR), B2 (WTR);
Download: Übungsaufgaben Analysis 1, 4; Analytische Geometrie 5; Stochastik 3

Ernst Payerl:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 1, Aufgabe 4;
Lösungen zum Landesabitur 2017: Aufgabe A2 (CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2018: Aufgaben A1 (CAS), B2 (GTR/CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2019: Aufgaben A (Stochastik 1), B1 (CAS), B2 (CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2020: Aufgaben A, B2 (WTR), B2 (CAS);
Download: Übungsaufgaben Analysis 2; Analytische Geometrie 2, 4, Stochastik 5; 2017 – A1 (CAS); 2021 – B1 (CAS), B2 (WTR), B2 (CAS)

Ullrich Rauch:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 1, Aufgabe 2; Serie 2, Aufgabe 2;
Lösungen zum Landesabitur 2017: Aufgaben B1 (WTR/GTR/CAS), B2 (WTR/GTR/CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2018: Aufgaben B1 (WTR/GTR/CAS), B2 (WTR);
Lösungen zum Landesabitur 2019: Aufgaben A (Analytische Geometrie 1), C1 (WTR/CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2020: Aufgabe C1 (WTR/CAS);
Download: Übungsaufgaben Analysis 3, 6, 8; Analytische Geometrie 1, 3; Stochastik 4; 2021 – B1 (WTR), C1 (WTR/CAS)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Landesabitur 2022 im Fach Mathematik in Hessen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette Aufstellung der für die Prüfung 2022 relevanten Themen, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Im Jahr 2022, also im Jahr Ihres Abiturs, wird es in Hessen zum vierten Mal zum Einsatz eines **Pflichtteils ohne Hilfsmittel** kommen. Man darf also in diesem Teil der Prüfung keinen WTR bzw. kein CAS benutzen und auch keine Formelsammlung. Zur Vorbereitung finden Sie in diesem Band zwei Aufgabenserien, die in Format und Inhalt diesem Teil entsprechen.
- Außerdem enthält dieser Band die offiziellen, vom hessischen Kultusministerium gestellten **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2020**. Zudem stehen Ihnen die Aufgaben des Jahres 2021 als PDF zum Download zur Verfügung, sobald sie zur Veröffentlichung freigegeben sind. Das Aufgabenformat aus den Jahren 2017 und 2018 wird Ihnen in dem Teil Ihrer Abiturprüfung begegnen, in dem Hilfsmittel erlaubt sind. Die Prüfungen aus den Jahren 2019 bis 2021 haben bereits das Format, das Ihnen vorgelegt werden wird. Zu all diesen Aufgaben sind **vollständige und ausführlich kommentierte Lösungsvorschläge** von unseren Autoren vorhanden. Sie ermöglichen Ihnen, Ihre Lösungen eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.
- Bei allen Original-Abituraufgaben, bei denen Hilfsmittel erlaubt sind, wurden von unseren Autoren **Hinweise und Tipps** ergänzt, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer solchen Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2022 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter www.stark-verlag.de/mystark.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Landesabitur 2022

Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Seit dem Schuljahr 2006/2007 gibt es in Hessen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des hessischen Kultusministeriums von einer Fachkommission erstellt. Die Beurteilung der Lösungen der Schüler/innen wird von zwei Fachlehrkräften durchgeführt. Es kann auch im Abitur 2022 möglich sein, dass die Zweitkorrektur durch Lehrkräfte anderer Schulen erfolgt. Die verbindlichen curricularen Vorgaben (Kerncurriculum Mathematik Hessen), nach denen in den drei ersten Schulhalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen Inhalte und Anforderungen der Abituraufgaben. Hinzu kommt, dass die Bildungsstandards Mathematik verstärkt in den hessischen Abschlussarbeiten, also auch beim Landesabitur, in den Materialvorgaben und Fragestellungen der Aufgaben berücksichtigt werden.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Das hessische Landesabitur Mathematik in Hessen besteht seit dem Jahr 2019 aus zwei unterschiedlichen Abschnitten im Bereich der schriftlichen Prüfungen.

Prüfungsteil 1: Vorschlag A
Dies ist der „hilfsmittelfreie“ Teil der Prüfung, d. h., die Aufgaben sind ohne Formelsammlung und ohne Taschenrechner zu lösen. Es werden vier Aufgaben gestellt, die mindestens zwei Kurshalbjahre der Q-Phase abdecken. Dabei beinhaltet ein Aufgabenset drei Aufgaben mit dem Niveau I und eine Aufgabe mit dem Niveau II (Niveau I beinhaltet die Anforderungsbereiche I und II und Niveau II den Anforderungsbereich III, siehe die Seiten VIII bis X). Die Bearbeitungszeit für diesen Teil der Prüfung beträgt 45 Minuten.

Prüfungsteil 2: Vorschläge B und C
Der Prüfungsteil 2 besteht aus den Vorschlägen B1 und B2 zur Analysis sowie C1 zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie und C2 zur Stochastik. Für diesen Teil werden zwei Rechnertechnologien angeboten, WTR und CAS. Sie bekommen aber nur die Aufgaben für die Rechnertechnologie, welche in Ihrem Kurs vereinbart und angewendet wurde. Sie müssen aus B und C jeweils einen Vorschlag auswählen. Die Formate dieser Aufgaben entsprechen den bisher verwendeten Fragestellungen.

Bearbeitungszeiten

Die Auswahlzeit wird im Sinne der Angleichung an die Prüfungsrealität in die Bearbeitungszeit integriert. Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt im Leistungskurs 300 Minuten. Dabei entfallen auf den Vorschlag A (Prüfungsteil 1) 45 Minuten. Für den Prüfungsteil 2 stehen im Leistungskurs 255 Minuten zur Verfügung.

Ablauf der Prüfung

Die Prüfung im Leistungskurs beginnt mit der Ausgabe von Vorschlag A (Prüfungsteil 1), der nach spätestens 45 Minuten an die Aufsicht führende Lehrkraft abzugeben ist. Nach Beendigung von Prüfungsteil 1 werden von der Aufsicht führenden Lehrkraft die Vorschläge für den Prüfungsteil 2 (B1 und B2 sowie C1 und C2) ausgegeben. Nach 60 Minuten müssen die nicht ausgewählten Vorschläge der Aufgabengruppen B und C an die Aufsicht führende Lehrkraft zurückgegeben werden.

Bewertungseinheiten (BE)

Prüfungsteil 1: Hier werden im Leistungskurs 20 BE vergeben.
Prüfungsteil 2: Hier werden im Leistungskurs 100 BE vergeben.

Zugelassene Hilfsmittel

Die für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik (Prüfungsteil 2) zugelassenen Hilfsmittel sind **Wörterbücher der deutschen Rechtschreibung, die jeweilige Rechnertechnologie** (WTR oder CAS), die im Unterricht verwendete **Formelsammlung** (Tafelwerk) sowie die **Schreib- und Zeichengeräte**, die im Fach Mathematik Anwendung finden. Im Falle außergewöhnlicher n und p (Stochastik) werden die entsprechenden Tabellen zur Binomialverteilung zur Verfügung gestellt. Nicht zugelassen sind schulinterne Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika.
Zur Bearbeitung der Aufgaben bekommen Sie Reinschrift- und Konzeptpapier von Ihrer Schule (versehen mit dem Stempel Ihrer Schule) zur Verfügung gestellt. Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen gehören zur Abiturarbeit und dürfen nur auf diesem Papier angefertigt werden, das nach Beendigung der Bearbeitungszeit wieder komplett abgegeben werden muss.

Rechnertechnologie

Zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 geht es um die Wahl der zu verwendenden Rechnertechnologie, also:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner — WTR
- Taschenrechner mit einem Computeralgebrasystem — CAS

Diese Entscheidung treffen die jeweiligen Schüler/innen eines Kurses in Abstimmung mit ihrem/ihrer Kurslehrer/in. In der Abiturprüfung werden dem Kurs nur die entsprechenden Aufgabenvorschläge vorgelegt.

Taschenrechner der Kategorie WTR müssen über erweiterte Funktionalitäten zur numerischen Berechnung

- der Lösungen von Polynomgleichungen bis dritten Grades,
- der (näherungsweisen) Lösung von Gleichungen,
- der Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten,
- der Ableitung an einer Stelle,
- von bestimmten Integralen,
- von Gleichungen von Regressionsgeraden,
- von 2×2- und 3×3-Matrizen (Produkt, Inverse),
- von Mittelwert und Standardabweichung bei statistischen Verteilungen,
- von Werten der Binomial- und Normalverteilung (auch inverse Fragestellung)

verfügen.
Darüber hinaus müssen Taschenrechner der Kategorie WTR über Funktionalitäten zur (numerischen) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung und Standardnormalverteilung) verfügen.

Hessen – Leistungskurs Mathematik
2020 – B1: Analysis (WTR)

Rückhaltebecken für Regen dienen dazu, bei starkem Regen Überschwemmungen zu vermeiden, indem das Regenwasser zunächst darin gesammelt und später langsam wieder abgelassen wird. Die Zuflussrate des Regenwassers kann bei einigen Regenfällen modelliert werden durch die Funktionenschar f_k mit $f_k(t) = 100(k^2 \cdot t + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$, $t \geq 0, k \in \mathbb{R}^+$. Dabei gibt t die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn und $f_k(t)$ die Zuflussrate in $\frac{m^3}{h}$ an. Der Parameter k ist ein Maß für die Stärke des Regens. In Material 1 sind die Graphen der Funktionen f_k für $k = 1, 2, 3, 4$ dargestellt.

1.1 Berechnen Sie die Zuflussrate zum Zeitpunkt $t = 0$ in Abhängigkeit vom Parameter k. **(2 BE)**

1.2 Berechnen Sie die maximale Zuflussrate und den zugehörigen Zeitpunkt jeweils in Abhängigkeit vom Parameter k.
Die zweite Ableitung $f_k''(t) = 4k^3(k \cdot t - 9) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$ kann ohne Nachweis verwendet werden.
[zur Kontrolle: $t_{max} = \frac{4}{k}$] **(7 BE)**

1.3 Beschriften Sie die Graphen im Material 1 mit den zugehörigen Parameterwerten $k = 1, 2, 3, 4$ und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters k auf Zeitpunkt und Größe der maximalen Zuflussrate. Skizzieren Sie in das Koordinatensystem in Material 1 die Ortskurve der Hochpunkte und bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Ortskurve. **(7 BE)**

1.4 Berechnen Sie die Wendepunkte der Graphen der Funktionenschar f_k in Abhängigkeit von k.
Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend. **(4 BE)**

Die Wendetangenten der Graphen der Scharfunktionen f_k werden durch Graphen der Funktionenschar w_k mit $w_k(t) = 100k \cdot (19 - k \cdot t) \cdot e^{-\frac{9}{5}}$ beschrieben.

1.5 Das nötige Fassungsvermögen des Rückhaltebeckens, das für die Aufnahme der gesamten Regenmenge bei einer Modellierung der Zuflussrate durch die Funktionenschar f_k ausreicht, kann mittels zweier Verfahren bestimmt werden:

(1) Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{u \to \infty} [F_k(u) - F_k(0)]$, wobei F_k eine Stammfunktionenschar der Funktionenschar f_k darstellt.

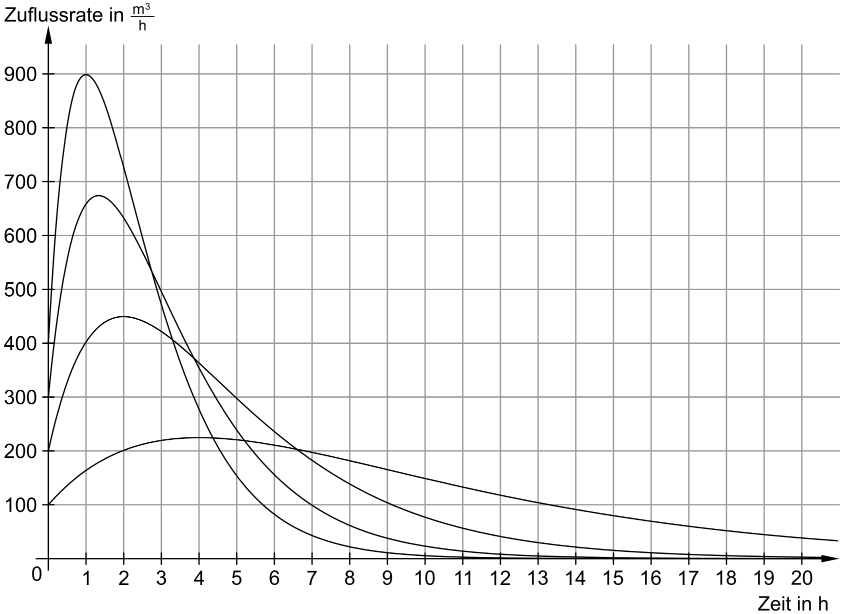
(2) Bestimmung des Inhalts der Fläche, die zwischen den Koordinatenachsen und der Wendetangente w_k eingeschlossen ist.

1.5.1 Mit einem der beiden Verfahren wird der genaue Wert für das nötige Fassungsvermögen ermittelt und mit dem anderen lediglich eine Näherungslösung. Entscheiden Sie, mit welchem der beiden Verfahren bei der vorgegebenen Modellierung der genaue Wert für das nötige Fassungsvermögen bestimmt wird, und erläutern Sie Ihre Entscheidung. **(3 BE)**

1.5.2 Berechnen Sie mithilfe des Formansatzes $F_k(t) = 100(a \cdot t + b) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$ eine Stammfunktionenschar F_k von f_k.
[zur Kontrolle: F_k mit $F_k(t) = 100 \cdot (-5 \cdot k \cdot t - 30) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$ ist eine mögliche Stammfunktionenschar.] **(7 BE)**

Material 1

Graphen der Funktionenschar f_k für $k = 1, 2, 3, 4$



Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1

- Gesucht ist der Funktionswert der gegebenen Funktion zur Zeit $t = 0$.

Teilaufgabe 1.2

- Bestimmen Sie die 1. Ableitungsfunktion mithilfe der Produkt- und der Kettenregel und vereinfachen Sie den Funktionsterm so weit wie möglich.
- Wenden Sie das notwendige und das hinreichende Kriterium für lokale Extrema an.
- Beachten Sie, dass $k > 0$ ist. Geben Sie die Hochpunkte in Abgängigkeit von k an.

Teilaufgabe 1.3

- Bestimmen Sie die Funktionen und Hochpunkte jeweils für $k = 1$, 2, 3 und 4 für den Vergleich mit den gegebenen Graphen.
- Für die Bestimmung der Ortskurve muss in den Koordinaten der Hochpunkte der Parameter k eliminiert werden.

Teilaufgabe 1.4

- Wenden Sie das notwendige Kriterium für Wendestellen an. Verwenden Sie dafür die in Teilaufgabe 1.2 gegebene 2. Ableitungsfunktion. Geben Sie die Koordinaten der Wendepunkte an.

Teilaufgabe 1.5

- Verwenden Sie die gegebenen Funktionsgleichungen der Wendetangenten.

Teilaufgabe 1.5.1

- Veranschaulichen Sie sich die beiden Verfahren.

Teilaufgabe 1.5.2

- Bestimmen Sie die 1. Ableitungsfunktion des gegebenen Formansatzes und vereinfachen Sie den Funktionsterm im Hinblick auf einen Koeffizientenvergleich mit $f_k(t)$.
- Formulieren Sie die Gleichung der Stammfunktionenschar konkret.

Teilaufgabe 1.5.3

- Falls Sie in Teilaufgabe 1.5.2 zu einem anderen als dem angegebenen Kontrollergebnis gekommen sind, arbeiten Sie für das 1. Verfahren mit dem Kontrollergebnis weiter.
- Für die Durchführung des 2. Verfahrens braucht man die Achsenschnittpunkte der Wendetangenten.
- Vergleichen Sie die beiden berechneten Werte.

Teilaufgabe 2.1

- Bestimmen Sie das Rotationsvolumen in Abhängigkeit von der Füllhöhe H.
- Berechnen Sie die maximale Füllhöhe mithilfe des gegebenen Wertes für das maximale Volumen und dann den Wert für den Durchmesser des Beckens.

Teilaufgabe 2.2.1

- Beachten Sie, dass die Abflussrate konstant sein soll.

Teilaufgabe 2.2.2

- Bestimmen Sie die Abflussrate pro Stunde und stellen Sie die lineare Funktion auf, die das Wasservolumen in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Lösung

Vorbemerkung: Die Aufgabenstellung gilt für die Rechnertechnologie WTR. Die jeweils verwendeten Operatoren in den Teilaufgaben weisen darauf hin, ob mit den erweiterten Funktionalitäten des Taschenrechners gearbeitet werden kann.

Die gegebene Funktion modelliert die Zuflussrate in $\frac{m^3}{h}$ eines Rückhaltebeckens für Regenwasser:

$$f_k(t) = 100 \cdot (k^2 \cdot t + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}, \; t \geq 0, k \in \mathbb{R}^+, \; \text{t in Stunden}$$

1.1 Die Zuflussrate zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt:

$$f_k(0) = 100 \cdot (k^2 \cdot 0 + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot 0} = 100 \cdot k$$

1.2 Für die Berechnung ist die erste Ableitungsfunktion notwendig. Diese ergibt sich durch Anwendung der Produkt- und der Kettenregel zu:

$$f_k'(t) = 100 \cdot k^2 \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} + 100 \cdot (k^2 \cdot t + k) \cdot \left(-\frac{k}{5}\right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$$

Der Funktionsterm lässt sich durch Ausklammern und Zusammenfassen vereinfachen:

$$\begin{aligned} f_k'(t) &= \left(100 \cdot k^2 + 100 \cdot (k^2 \cdot t + k) \cdot \left(-\frac{k}{5}\right)\right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \\ &= \left(100 \cdot k^2 - 20k \cdot (k^2 \cdot t + k)\right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = (100 \cdot k^2 - 20 \cdot k^3 \cdot t - 20 \cdot k^2) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \\ &= (80 \cdot k^2 - 20 \cdot k^3 \cdot t) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = 20 \cdot k^2 \cdot (4 - k \cdot t) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung $f_k'(t) = 0$ für ein lokales Maximum ergibt den Ansatz:

$$20 \cdot k^2 \cdot (4 - k \cdot t) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = 0$$

Da $e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \neq 0$ für alle t und $k > 0$ ist, muss der Teilterm $4 - k \cdot t = 0$ sein. Durch Umformung erhält man:

$$t = \frac{4}{k}$$

Zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung wird dieser Wert nun in die (gegebene) 2. Ableitungsfunktion eingesetzt:

$$f_k''\left(\frac{4}{k}\right) = 4 \cdot k^3 \cdot \left(k \cdot \frac{4}{k} - 9\right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot \frac{4}{k}} = 4 \cdot k^3 \cdot (-5) \cdot e^{-\frac{4}{5}} = -20 \cdot k^3 \cdot e^{-\frac{4}{5}}$$

Da $k \in \mathbb{R}^+$ und $e^{-\frac{4}{5}} > 0$ ist, ist $f_k''\left(\frac{4}{k}\right) < 0$ für alle $k \in \mathbb{R}^+$ und damit liegt ein lokales Maximum vor.

Die maximale Zuflussrate ist dann:

$$f_k\left(\frac{4}{k}\right) = 100 \cdot \left(k^2 \cdot \frac{4}{k} + k\right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot \frac{4}{k}} = 100 \cdot 5 \cdot k \cdot e^{-\frac{4}{5}} = 500 \cdot k \cdot e^{-\frac{4}{5}}$$

Die Hochpunkte der Zuflussraten in Abhängigkeit von k haben also die Koordinaten:

$$H_k\left(\frac{4}{k} \,\middle|\, 500 \cdot k \cdot e^{-\frac{4}{5}}\right)$$

1.3 Die Funktionen für $k = 1, 2, 3, 4$ und die Hochpunkte der zugehörigen Graphen sind (die Funktionswerte sind gerundet):

$$f_1(t) = 100 \cdot (t+1) \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t} \qquad H_1(4 \mid 224{,}7)$$

$$f_2(t) = 100 \cdot (4 \cdot t+2) \cdot e^{-\frac{2}{5} \cdot t} \qquad H_2(2 \mid 449{,}3)$$

$$f_3(t) = 100 \cdot (9 \cdot t+3) \cdot e^{-\frac{3}{5} \cdot t} \qquad H_3\left(\frac{4}{3} \,\middle|\, 674{,}0\right)$$

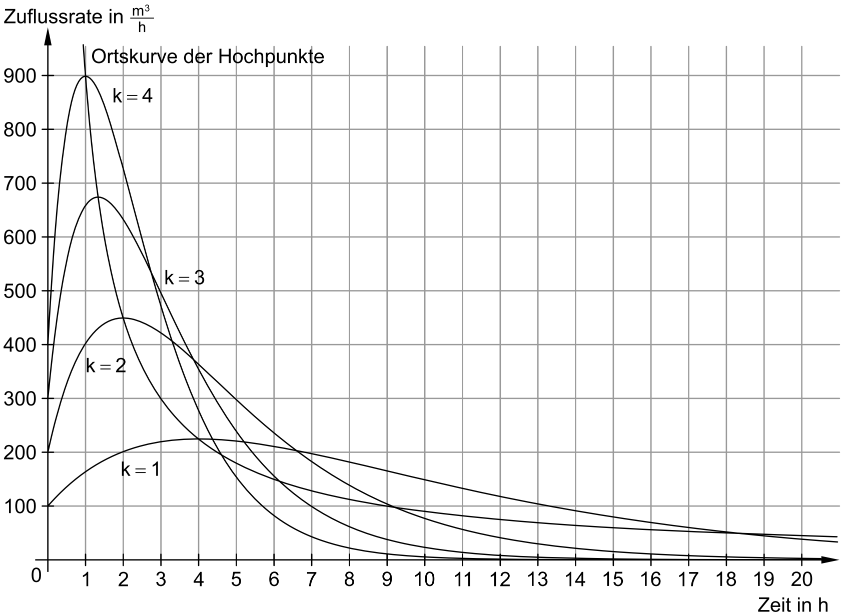
$$f_4(t) = 100 \cdot (16 \cdot t+4) \cdot e^{-\frac{4}{5} \cdot t} \qquad H_4(1 \mid 898{,}7)$$

Je größer der Wert von k ist, desto größer ist die maximale Zuflussrate und desto früher wird diese erreicht.

Zur Bestimmung der Ortskurve der Hochpunkte wird $t = \frac{4}{k} \Leftrightarrow k = \frac{4}{t}$ in den Funktionswert eingesetzt und es folgt:

$$y = 500 \cdot \frac{4}{t} \cdot e^{-\frac{4}{5}} = \frac{2\,000}{t} \cdot e^{-\frac{4}{5}}$$

In Material 1 werden die Graphen beschriftet und die Ortskurve der Hochpunkte wird eingezeichnet.



1.4 Mit der in Teilaufgabe 1.2 gegebenen Gleichung für $f_k''(t)$ liefert die notwendige Bedingung für Wendestellen $f_k''(t) = 0$ konkret den Ansatz:

$$f_k''(t) = 4 \cdot k^3 \cdot (k \cdot t - 9) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = 0$$

Da $k > 0$ und $e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \neq 0$ für alle t und $k > 0$ ist, muss der Teilterm $k \cdot t - 9 = 0$ sein.