2022

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR
ERFAHREN

Niedersachs

Mathematik eA

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2021 zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Fortsetzung siehe nächste Seite

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MyStark.

Die mit einem * markierte Aufgabe ist wegen Lehrplanänderungen seit 2021 für das Abitur nicht mehr relevant.

Abiturprüfung 2018

Abiturprüfung 2019

Abiturprüfung 2021

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2021 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

Bei MyStark finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019 und 2021** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren

Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2011–2019 und 2021)

Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2014–2018)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2022** im **Erhöhten Anforderungsniveau** in **Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Erhöhte Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2022** sowie zum **Pflichtteil**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2016 bis 2019 und 2021**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019 und 2021**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer   Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 werden Teile davon länderübergreifend gestellt.

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen, einem **Pflichtteil**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist (auch länderübergreifende Aufgaben), und einem **Wahlteil**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann (Niedersachsen-spezifische Aufgaben).

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Pflichtteil** werden Ihnen zum einen **vier Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie/Lineare Algebra vorgelegt, die länderübergreifend gestellt werden. Hinzu kommen Niedersachsen-spezifisch **ein oder zwei weitere Aufgaben**. Die Aufgaben dieses Pflichtteils sind etwa gleichgewichtet und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.

Im **Wahlteil** werden Ihnen drei Aufgabenblöcke mit jeweils zwei Aufgaben A und B vorgelegt. Der Aufgabenblock 1 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis (Aufgabe 1A bzw. 1B), der Aufgabenblock 2 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Stochastik (Aufgabe 2A bzw. 2B) und der Aufgabenblock 3 enthält zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Aufgabe 3A bzw. 3B). Sie müssen aus jedem der drei Blöcke jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.
Die Gewichtung der drei Aufgabenblöcke erfolgt etwa im Verhältnis 2 : 1 : 1. Somit wird im Wahlteil die Analysisaufgabe (Aufgabenblock 1) mit einem Anteil von etwa 50 % am stärksten gewichtet. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

	Block 1	**Block 2**	**Block 3**
Aus jedem Block muss genau eine Aufgabe bearbeitet werden.	Aufgabe 1A (Analysis)	Aufgabe 2A (Stochastik)	Aufgabe 3A (Geometrie/Algebra)
	Aufgabe 1B (Analysis)	Aufgabe 2B (Stochastik)	Aufgabe 3B (Geometrie/Algebra)
Gewichtung	2	1	1

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit für den Pflichtteil beträgt 70 Minuten und für den Wahlteil 200 Minuten. Hinzu kommen für den Wahlteil 30 Minuten Auswahlzeit.
Nach Ablauf der Bearbeitungszeit des Pflichtteils müssen Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben für den Wahlteil, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:
- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen Sie die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:
- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.
- Vernetzte Rechner sind in der Abiturprüfung nicht zugelassen.

Weiter sind zur Abiturprüfung gedruckte **Formelsammlungen** der Schulbuchverlage und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2022“ weitere Angaben gemacht.
Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.
Bitte beachten Sie: Aufgrund der besonderen, coronabedingten Lernsituation in den Schuljahren 2019/2020 und 2020/2021 werden **einzelne** Lehrplaninhalte in der schriftlichen Abiturprüfung 2022 nicht geprüft. Diese sind in der nachfolgenden Aufstellung markiert.

2.1 Analysis

Einführungsphase

Elementare Funktionenlehre
- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen (auch Wurzelfunktionen)
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $y = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten

Ableitungen
- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^{\neq 0})$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$
- Summen, Faktor- und Potenzregel
- notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen
- Lösen linearer Gleichungssysteme

Übungsaufgabe 2 (100 Min., CAS)

Temperaturen in Friesoythe

Die Monatsmitteltemperaturen von Friesoythe seien durch die folgende Tabelle gegeben.

Monat	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Mitteltemperatur (in °C)	1,3	1,9	4,6	8,1	12,8	15,9	17,3	16,9	13,9	10,0	5,4	2,5

a) Für eine vereinfachte Modellierung des Jahresverlaufs werde angenommen, dass jeder Monat 30 Tage hat und die Monatsmitteltemperatur jeweils am 15. eines Monats exakt erreicht wird. Somit ergibt sich eine Wertetabelle mit 360 Wertepaaren, von denen 12 bekannt sind.

Tag des Jahres	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345
Temperatur	1,3	1,9	4,6	8,1	12,8	15,9	17,3	16,9	13,9	10,0	5,4	2,5

Ermitteln Sie als Modell eine Sinuskurve, die exakt durch den Hochpunkt und durch den Tiefpunkt der Daten geht. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise. Ermitteln Sie mithilfe der Funktion die mittlere Temperatur im Juli und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

b) Für eine andere Klimastation sei die Modellierung der Klimadaten gegeben durch f mit dem Funktionsterm $f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9$, wobei x den Tag des Jahres angibt (bei 360 Tagen im Jahr).
Ermitteln Sie die Tage mit maximaler Änderungsrate sowie die Tage mit Extremtemperaturen und skizzieren Sie den Graphen von f.
Aufgrund von Umweltbeobachtungen erwartet man, dass die Temperaturschwankungen jährlich um 0,07 °C zunehmen und die Temperatur jährlich um 0,5 % zunimmt.
Bestimmen Sie den Term g(x), der für die durch f beschriebene Station diese Annahmen berücksichtigt.
Ermitteln Sie aufgrund dieser Annahmen die theoretisch erwartete Jahresmitteltemperatur in 100 Jahren sowie die maximale und minimale Temperatur in 100 Jahren.

c) Claudia hat festgestellt, dass in der ersten Tabelle die Daten von April bis August auf dem Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades liegen.
Ermitteln Sie den Term dieser Funktion h.
Der Graph einer weiteren ganzrationalen Funktion soll die Daten von September bis Oktober darstellen und an den Graphen von h stetig und differenzierbar anschließen.
Bestimmen Sie auch diesen Funktionsterm.

TIPP **Lösungshinweise – Übungsaufgabe 2**

Teilaufgabe a

Ermitteln des Modells und Beschreiben der Vorgehensweise

Die geforderte Sinuskurve hat allgemein die Gleichung
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$.

Welche geometrische Bedeutung haben die Parameter a, b, c und d?

Lassen Sie den Rechner die Daten darstellen. Dazu geben Sie die Daten als Listen unter **Lists&Spreadsheets** ein und definieren den Plot unter **Graphs** als Streudiagramm. Wählen Sie die Fenstereinstellungen geeignet aus.

Aus dieser Darstellung erhalten Sie eine Vorstellung, wie die gewünschte Sinuskurve verlaufen soll.

Sie müssen die Amplitude, die Periode und die Verschiebungen in x- und y-Richtung ermitteln.

Die Amplitude ergibt sich aus dem vertikalen Abstand der Extrempunkte.

Die Verschiebung in y-Richtung ergibt sich aus dem Mittelwert der Extremwerte.

Die Periode ist 1 Jahr bzw. die Anzahl der Tage, die der Wertetabelle zugrunde liegen.

Für die Verschiebung in x-Richtung können Sie eine Extremstelle betrachten. Überlegen Sie, an welcher Stelle sie bei der einfachen Sinuskurve liegt und an welcher Stelle sie hier liegen soll.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Grafik. Achten Sie auf die Bogenmaßeinstellung.

Bestimmung des Mittelwertes im Juli

Berechnen Sie den Juli-Mittelwert mithilfe eines Integrals.

Die Grenzen des Intervalls sind die Tage des Jahres, die dem Monat Juli entsprechen.

Das Ergebnis der Integration wird durch die Anzahl der Tage des Monats dividiert.

Erläutern des Ergebnisses

Eine Erläuterung des Ergebnisses ist dann besonders interessant, wenn es von den vorgegebenen Werten abweicht.

Überlegen Sie, was der Grund für diese Abweichung sein könnte.

Teilaufgabe b

Ermitteln der Tage mit maximaler Temperaturänderung und Extremtemperaturen

Die Tage mit maximaler Temperaturänderung können Sie mit der zweiten Ableitung bestimmen.

Notwendig ist, dass die zweite Ableitung den Wert 0 aufweist.

Vergessen Sie nicht das Prüfen einer hinreichenden Bedingung.

Bestimmen Sie die Tage mit Extremtemperaturen mit der ersten Ableitung.

Notwendig ist, dass die erste Ableitung den Wert 0 aufweist.

Vergessen Sie auch hier nicht das Prüfen einer hinreichenden Bedingung.

Skizzieren des Graphen von f
Zeichnen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschriften Sie die Achsen.

Wählen Sie geeignete Einheiten auf den Achsen und zeichnen Sie den Graphen von f.

Bestimmen des Terms g(x)
Die Temperaturschwankungen werden durch die Amplitude angegeben.

Wenn sich die Temperaturschwankungen um 0,07 °C erhöhen, so erhöht sich jedes Jahr die Amplitude um 0,07 °C.

Die Jahresmitteltemperatur ist durch die Konstante im Funktionsterm gegeben.

Erhöht sich die Jahresmitteltemperatur um 0,5 %, so erhöht sich die Konstante mit dem Faktor 1,005.

Ermitteln der Jahresmitteltemperatur und der extremen Tagestemperaturen
Berechnen Sie Amplitude und Konstante in 100 Jahren.

Geben Sie diesen Funktionsterm in den Rechner ein und bestimmen Sie Jahresmitteltemperatur, Minimum und Maximum in 100 Jahren.

Teilaufgabe c

Ermitteln des Terms h(x)
Ein Polynom 3. Grades hat vier Koeffizienten.

Vier Bedingungen genügen, um die Koeffizienten zu berechnen.

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, indem Sie vier der Wertepaare einsetzen. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Rechner.

Überprüfen Sie, ob auch das 5. Wertepaar die Gleichung erfüllt.

Bestimmen des Funktionsterms
Für die stetige und differenzierbare Fortsetzung müssen vier Bedingungen erfüllt sein.

Die drei Punkte $(8 \mid 16{,}9)$, $(9 \mid 13{,}9)$ und $(10 \mid 10)$ müssen auf dem Graphen liegen und die Steigung an der Übergangsstelle $x = 8$ muss rechts und links gleich sein.

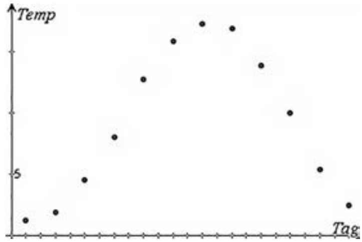
Mit vier Bedingungen wählt man als Ansatz ein Polynom 3. Grades.

Stellen Sie ein Gleichungssystem auf und lassen Sie es vom Rechner lösen.

Lösungsvorschlag

a) Ermitteln des Modells und Beschreiben der Vorgehensweise:

	A tag	B temp	C
=	=seq(15+30*i,i,0,11)		
1	15	1.3	
2	45	1.9	
3	75	4.6	
4	105	8.1	
5	135	12.8	



Mit der Reduzierung des Jahres auf 360 Tage kann man von einer Sinusfunktion mit der Periode $\frac{2\pi}{360}$ ausgehen.
Das Maximum der Daten liegt bei H(195 | 17,3) und das Minimum liegt bei T(15 | 1,3).
Wenn die Sinuskurve in H ihr Maximum und in T ihr Minimum erreichen soll, dann gilt für die Amplitude a:

$$a = \frac{1}{2}(17,3 - 1,3) = 8$$

Die vertikale Verschiebung d errechnet sich aus dem Mittelwert von Maximal- und Minimalwert:

$$d = \frac{1}{2}(17,3 + 1,3) = 9,3$$

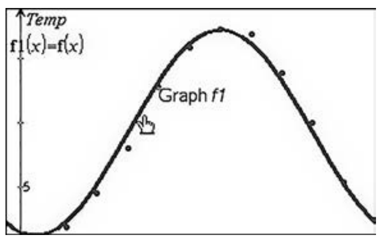
Für die horizontale Verschiebung c betrachtet man die Extremstellen. Bei 90 hätte der Sinus im Gradmaß sein Maximum, also muss die Kurve um 105 nach rechts verschoben werden, damit das Maximum bei H liegt.

$\frac{17.3-1.3}{2} \to a$	8
$\frac{17.3+1.3}{2} \to d$	$\frac{93}{10}$
$\frac{2\cdot\pi}{360} \to b$	$\frac{\pi}{180}$
$-105 \to c$	-105
$a\cdot\sin(b\cdot(x+c))+d \to f(x)$	*Fertig*
$f(x)$	$8\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot(x-105)}{180}\right)+\frac{93}{10}$

Es folgt für den Term der Sinusfunktion:

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360°} \cdot (x - 105)\right) + 9,3$$

Der Graph wird zusammen mit den Daten gezeichnet.



Bestimmen des Mittelwertes im Juli:
Der Juli umfasst 30 Tage zwischen 180 und 210. Den Mittelwert M erhält man durch das Integral:

$$A = \frac{1}{30} \cdot \int_{180}^{210} f(x)\,dx \approx 17{,}21$$

$$\frac{1}{30} \cdot \int_{180}^{210} f(x)\,dx \qquad 17.2089$$

Erläutern des Ergebnisses:
Obwohl der Graph von f exakt durch den Hochpunkt (195 | 17,3) geht, erhält man durch Integration eine andere Monatsmitteltemperatur. Sie liegt niedriger als der vorgegebene Wert. Sie muss auch niedriger sein, weil alle anderen Sinuswerte niedriger als das Maximum sind. Wie schon der Verlauf der Datenpunkte vermuten lässt, ist also die oben genannte Modellannahme falsch, dass genau in der Mitte des Monats Juli das Maximum liegt. Da die Mitteltemperatur des Monats August höher liegt als die des Monats Juni, wird das wahre Maximum erst in der zweiten Julihälfte angenommen.

b) Ermitteln der Tage mit maximaler Temperaturänderung und Extremtemperaturen:

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3}\pi\right) + 9$$

$$f'(x) = -\frac{2\pi}{45} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$f''(x) = \frac{\pi^2}{4\,050} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi^2}{4\,050} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$$

$$\underset{0 \le x \le 360}{\Leftrightarrow} \quad x = 120 \vee x = 300$$

Es gilt:

$f'(0) \approx -0{,}07$

$f'(120) \approx 0{,}14$

$f'(300) \approx -0{,}14$

$f'(360) \approx -0{,}07$

Daher steigt die Temperatur am 120. Tag des Jahres (30. April) am stärksten und sinkt am 300. Tag (30. Oktober) am stärksten.

$8 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{360} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + 9 \rightarrow f(x)$	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow fs(x)$	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(fs(x)) \rightarrow fss(x)$	*Fertig*
$fs(x)$	$\frac{-2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{180} + \frac{\pi}{3}\right)}{45}$
$fss(x)$	$\frac{\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{180} + \frac{\pi}{3}\right)}{4050}$

solve(fss(x)=0,x)|0≤x≤360	x=120 or x=300
fs(0)	-0.069813
fs(120)	0.139626
fs(300)	-0.139626
fs(360)	-0.069813

Wahlteil (CAS) – Aufgabe 1 A

Unter der Körpertemperatur eines Menschen versteht man die Temperatur des Körperinneren.
Die Körpertemperatur eines gesunden Menschen (Normaltemperatur) wird mit 37,0 °C angenommen.
Bei Temperaturen ab 37,9 °C spricht man von Fieber.

Der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person lässt sich bei bestimmten Erkrankungen modellhaft mithilfe der Funktion f mit

$f(t) = 37 + 3t \cdot e^{-\frac{1}{7}t^2}$, $t \geq 0$, beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen nach dem Ausbruch der Krankheit und f(t) die Körpertemperatur in °C.
Die zu ermittelnden Zeiten sollen in Tagen, auf eine Nachkommastelle gerundet, angegeben werden.

Punkte

a) Berechnen Sie
- die Abweichung der Körpertemperatur der erkrankten Person am Ende des ersten Tages von der Normaltemperatur,
- die Länge des Zeitraumes, in dem die Person Fieber hat.

Berechnen Sie f'(2) und deuten Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.
Nennen Sie zwei Aspekte, die verdeutlichen, dass es sich bei diesem Modell um eine Vereinfachung der Realität handelt. 11

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur der Person am stärksten ansteigt, und den Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt.
Die Temperatur der Person sinkt zu einem Zeitpunkt unter 37,5 °C.
Begründen Sie mithilfe des Terms der 1. Ableitung von f, dass ab diesem Zeitpunkt die Temperatur dauerhaft unter 37,5 °C bleibt. 11

c) Eine andere Person mit gleichem Krankheitsverlauf nimmt 3 Tage nach Ausbruch der Krankheit ein fiebersenkendes Medikament ein. Man geht davon aus, dass ab diesem Zeitpunkt die Temperatur exponentiell abnimmt und sich der Normaltemperatur nähert. Sechs Stunden nach der Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur 37,6 °C.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt nach der Medikamenteneinnahme, zu dem die Person fieberfrei wird. 9

d) Die Funktionen f_k mit $f_k(t) = 37 + 3t \cdot e^{-k \cdot t^2}$, $t \geq 0$, $k > 0$, können ebenfalls modellhaft den Temperaturverlauf bei bestimmten Erkrankungen beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen nach dem Ausbruch der Krankheit und $f_k(t)$ die Körpertemperatur in °C. Der Parameter k hängt von der maximalen Körpertemperatur während der Erkrankung ab.
In der Abbildung 1 sind die Graphen der Funktionen $f_{0,1}$ und $f_{0,2}$ dargestellt.

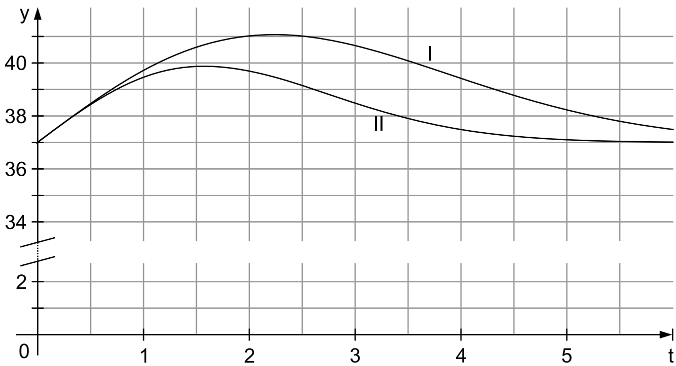


Abbildung 1

Entscheiden Sie, welcher Graph zu welcher Funktion gehört.
Für jeden Wert von k wird der Inhalt A(k) der Fläche zwischen dem Graphen von f_k und der Geraden zu $y = 37$ als ein Maß für die Belastung einer erkrankten Person angenommen.

Zeigen Sie, dass $A(k) = \frac{3}{2k}$ gilt.

Bestimmen Sie alle Werte von k, für die die Graphen von f_k einen Temperaturverlauf mit Fieber beschreiben, die Temperatur aber nicht über 40 °C steigt. $\frac{15}{46}$

TIPP **Lösungshinweise zum Wahlteil (CAS) – Aufgabe 1 A**

Teilaufgabe a

Berechnen der Abweichung am Ende des ersten Tages

Die Normaltemperatur ist im einführenden Text genannt.

f(1) gibt die Körpertemperatur am Ende des ersten Tages an.

Beachten Sie, dass die Abweichung (Differenz) nicht negativ sein kann.

Berechnen der Länge des Fieberzeitraumes

Die Temperatur, ab der man von Fieber spricht, ist im einführenden Text genannt.

Sie benötigen die Zeitpunkte, zu denen die Körpertemperatur diesen Wert aufweist.

Lösen Sie die entsprechende Gleichung mit dem **Solve**-Befehl des Rechners.

Ermitteln Sie nun den Bereich, in dem die Körpertemperatur über 37,9 °C liegt.

Vergessen Sie am Ende nicht, die Länge des Zeitraumes anzugeben.

Berechnen von $f'(2)$ und Deutung
Die erste Ableitung kann mit dem Rechner bestimmt werden.

Einsetzen von $t = 2$ liefert den geforderten Wert.

Die erste Ableitung gibt die momentane Änderungsrate an.

Sie sollen nun den berechneten Wert im Sachzusammenhang deuten.

Beachten Sie, dass ein negativer Wert eine Temperaturabnahme bedeutet.

Nennen von zwei Aspekten der Modellvereinfachung
Vergleichen Sie $f(t)$ mit ihren Kenntnissen über den Verlauf einer fiebrigen Erkrankung.

Beachten Sie z. B., dass $f(t)$ nur genau einmal die Normaltemperatur liefert.

Teilaufgabe b

Ermitteln der Zeitpunkte der stärksten Zu- bzw. Abnahme
Zu ermitteln sind die absoluten Extremstellen der ersten Ableitung.

Als eine notwendige Bedingung muss bei relativen Extremstellen die zweite Ableitung null sein.

Bestimmen Sie mithilfe des Rechners für $t \geq 0$ die Nullstellen der zweiten Ableitung.

Als hinreichende Bedingung können Sie z. B. den Vergleich der Funktionswerte der ersten Ableitung verwenden, um die entsprechenden Zeitpunkte zuzuordnen.

Formulieren Sie einen im Sachzusammenhang passenden Antwortsatz.

Begründen einer Temperatur unter 37,5 °C
Im Text wird vorausgesetzt, dass die Temperatur zu diesem Zeitpunkt sinkt.

$f(t)$ nimmt also ab, d. h., $f(t)$ fällt streng monoton.

Untersuchen Sie, für welche $t \geq 0$ die Funktion f streng monoton fällt.

Bestimmen Sie mithilfe des Rechners alle $t \geq 0$, für die $f'(t) < 0$ ist.

Überlegen Sie anhand des Resultates, was gesagt werden kann, wenn $f(t)$ irgendwann angefangen hat zu sinken.

Deuten Sie dies im Zusammenhang mit der obigen Voraussetzung.

Teilaufgabe c

Bestimmen des Zeitpunktes
Sie benötigen den Term, der die im Text angegebene Abnahme beschreibt.

Der allgemeine Term einer begrenzten exponentiellen Abnahme besitzt drei Formvariablen.

Aus der Formelsammlung können Sie diesen Term entnehmen: $g(t) = S + a \cdot e^{-k \cdot t}$

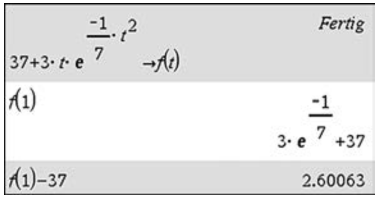
Lesen Sie den Text genau durch, denn er enthält genau drei Angaben zur Bestimmung der Formvariablen.

a) Berechnen der Abweichung am Ende des ersten Tages:

$f(1) = 37 + 3 \cdot e^{-\frac{1}{7}}$

$f(1) - 37 = 3 \cdot e^{-\frac{1}{7}} \approx 2{,}6006$

Die Temperatur weicht am Ende des ersten Tages um etwa 2,6 °C von der Normaltemperatur (nach oben) ab.



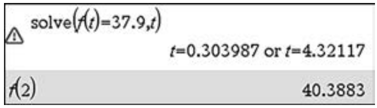
Berechnen der Länge des Fieberzeitraumes:

$f(t) = 37{,}9$

$\underset{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} \quad t = 0{,}3039\ldots \ \vee \ t = 4{,}3211\ldots$

$f(2) = 40{,}3883\ldots$

Da die Temperatur zwischen den Zeitpunkten über 37,9 °C liegt, hat die Person etwa 4,0 Tage lang Fieber.

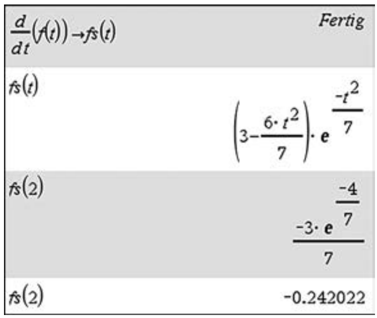


Berechnen von f'(2) und Deutung:

$f'(t) \underset{\text{CAS}}{=} \left(3 - \frac{6}{7} t^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{7} \cdot t^2}$

$f'(2) = -\frac{3}{7} \cdot e^{-\frac{4}{7}} \approx -0{,}2420$

Am Ende des zweiten Tages beträgt die momentane Temperaturabnahme etwa 0,24 °C pro Tag.



Nennen von zwei Aspekten der Modellvereinfachung:

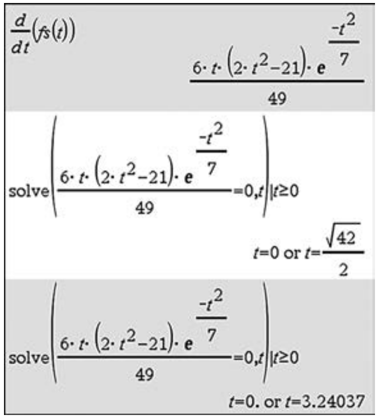
- Wenn eine Person erkrankt, erreicht sie nach dem Modell nie wieder die Normaltemperatur.
- Die Körpertemperatur kann deutlich mehr schwanken (morgens/abends) als im Modell.
- Nicht alle Menschen besitzen exakt eine Normaltemperatur von 37,0 °C.

b) Ermitteln der Zeitpunkte der stärksten Zu- bzw. Abnahme:
Zu ermitteln sind diejenigen Stellen, an denen f'(t) maximal oder minimal ist.
Eine notwendige Bedingung für relative Extrema ist $f''(t)=0$.

$f''(t)=0$

$$\underset{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{6\cdot t}{49}\cdot(2\cdot t^2-21)\cdot e^{-\frac{t^2}{7}}=0$$

$$\underset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad t=0 \;\vee\; t=\frac{\sqrt{42}}{2}=3{,}2403\ldots$$

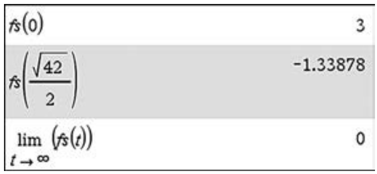


Es gilt:

$f'(0)=3$

$f'\left(\frac{\sqrt{42}}{2}\right)=-1{,}33\ldots$

$\lim\limits_{t\to\infty} f'(t)=0$

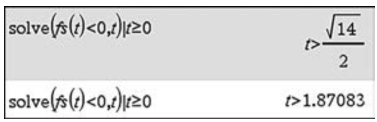


Daher ist f'(t) an der Stelle $t=0$ maximal und an der Stelle $t=3{,}2403\ldots$ minimal.
Zu Beginn steigt die Temperatur am stärksten an und nach etwa 3,24 Tagen nimmt sie am stärksten ab.

Begründen einer Temperatur unter 37,5 °C:
f'(t) ermöglicht eine Aussage zum Monotonieverhalten von f.

$$f'(t)<0 \quad \underset{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} \quad \left(3-\frac{6}{7}\cdot t^2\right)\cdot e^{-\frac{1}{7}\cdot t^2}<0$$

$$\underset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad t>1{,}8708\ldots$$



Wegen der Äquivalenz fällt f also genau dann, wenn $t>1{,}8708\ldots$ ist.
Da vorgegeben ist, dass f zu einem Zeitpunkt fällt, zu dem 37,5 °C erreicht werden, muss diese Stelle größer als $t=1{,}8708\ldots$ sein. Anschließend setzt sich das Sinken beliebig weit fort.

c) Bestimmen des Zeitpunktes:
Die Exponentialfunktion g, die den Krankheitsverlauf beschreibt, soll folgende Bedingungen erfüllen:

- $g(3)=f(3)=37+3\cdot 3\cdot e^{-\frac{1}{7}\cdot 3^2}$
- $g(3{,}25)=37{,}6$
- Die Gerade mit $y=37$ ist Asymptote des Graphen von g.