

2022

Abitur

Original-Prüfung
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Thüringen

Mathematik

+ Übungsaufgaben
+ Online-Glossar

ActiveBook
• Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2021 zum Download



STARK

Inhalt

Vorwort	
Stichwortverzeichnis	

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1	Ablauf der Prüfung	I
2	Inhalte und Schwerpunktthemen	II
3	Leistungsanforderungen und Bewertung	V
4	Operatoren	VII
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	VIII
6	Technische Grundlagen für den Umgang mit CAS-Rechnern	IX
7	Hinweise und Warnungen für das Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern	XXVIII

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil	Ü-1
Hinweise und Tipps	Ü-12
Lösungen	Ü-18
CAS-Übungsaufgabe 1: Analysis	Ü-31
CAS-Übungsaufgabe 2: Analysis	Ü-41
CAS-Übungsaufgabe 3: Analysis	Ü-52
CAS-Übungsaufgabe 4: Geometrie/Stochastik	Ü-62
CAS-Übungsaufgabe 5: Stochastik/Geometrie	Ü-72
CAS-Übungsaufgabe 6: Geometrie/Stochastik	Ü-82
CAS-Übungsaufgabe 7: Stochastik/Geometrie	Ü-91
CAS-Übungsaufgabe 8: Geometrie/Stochastik	Ü-100
CAS-Übungsaufgabe 9: Stochastik/Geometrie	Ü-108

Abiturprüfung 2018

Pflichtaufgaben Teil A	2018-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2018-14
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2018-27
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2018-39

Abiturprüfung 2019

Pflichtaufgaben Teil A	2019-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2019-14
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2019-26
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2019-39

Abiturprüfung 2020

Pflichtaufgaben Teil A	2020-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2020-13
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2020-26
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2020-42

Abiturprüfung 2021

www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe beeinflusst. Um Ihnen die Prüfung 2021 schnellstmöglich zur Verfügung stellen zu können, bringen wir sie in digitaler Form heraus. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden.



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.



Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Dr. Hubert Langlotz, Wutha-Farnroda (Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil und CAS-Übungsaufgaben 6 bis 9; 2018: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 4], B [Aufgabe 2] und C2; 2019: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 4], B [Teilaufgaben a bis d] und C2; 2020: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 3], B [Teilaufgabe 2] und C2; 2021: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B [Teilaufgabe 1] und C2)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil und CAS-Übungsaufgaben 1 bis 5; 2018: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 5 bis 8], B [Aufgabe 1] und C1; 2019: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 5 bis 8], B [Teilaufgaben e bis h] und C1; 2020: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 4 bis 8], B [Teilaufgabe 1] und C1; 2021: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 10], B [Teilaufgabe 2] und C1)

Vorwort

Liebe Abiturientinnen und Abiturienten,

dieses Buch hilft Ihnen, sich frühzeitig und umfassend auf die **Abiturprüfung 2022 im Kernfach Mathematik** der Oberstufe vorzubereiten. Dazu enthält es neben den **Prüfungsaufgaben der Jahre 2018 bis 2020** speziell auf die Struktur der Prüfung mit Computeralgebrasystem (CAS) abgestimmte **Übungsaufgaben** sowohl für den hilfsmittelfreien Pflichtteil wie für alle anderen Aufgaben. Diese Übungsaufgaben berücksichtigen die Vorgaben des neuen Lehrplans. Wenn Sie anhand dieser Aufgaben die Prüfungssituation „durchspielen“, sollten Sie sich sowohl an der vorgegebenen Bearbeitungszeit orientieren als auch die Situation des „Auswählen-Müssens“ von bestimmten Aufgaben berücksichtigen.

Die Bildschirmausdrucke im Lösungsteil wurden mit einem TI-NspireCX CAS erstellt. Sie sind aber in den meisten Fällen jeweils in annähernd gleicher Weise mit einem anderen CAS reproduzierbar. In vielen Fällen wurde die Möglichkeit genutzt, **alternative Lösungsvorschläge** darzustellen, die zum Teil die verschiedenen Möglichkeiten des digitalen Werkzeugs aufzeigen oder aber ganz ohne Hilfsmittel auskommen.

Weiter finden Sie zusätzliche  **Hinweise und Tipps**, die zwischen den Aufgaben und Lösungen stehen und für jede Teilaufgabe ausgearbeitet sind. Diese liefern Denkanstöße zur Lösung und sind nach zunehmendem Grad der Hilfestellung geordnet. Sollten Sie bei einer Aufgabe also keinen eigenen Lösungsansatz finden, so lesen Sie zunächst den **ersten Tipp** zu der entsprechenden Teilaufgabe und verdecken die weiteren Tipps mit einem Blatt. Denken Sie über den Tipp nach und versuchen Sie nun selbst einen Ansatz zu schaffen. Sollten Sie gar nicht weiterkommen, dann lesen Sie den **nächsten Tipp** usw. Schlagen Sie in der Lösung erst nach, wenn Sie mit allen zu der Aufgabe gehörenden Tipps nicht weiterkommen. Im Lösungsteil werden zudem ausführliche  **Hinweise** gegeben, die Ihnen die vorgerechnete **Lösung erläutern und erklären**, sodass Sie die Lösung selbstständig nachvollziehen und verstehen können. Bei der Lösungsdarstellung werden teilweise auch alternative Lösungswege aufgezeigt, damit Sie Ihre angefertigte Lösung korrigieren können und um zu zeigen, dass es oft eine Vielfalt von mathematischen Lösungsansätzen gibt.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2022 vom Ministerium für Bildung, Jugend und Sport bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
<http://www.stark-verlag.de/mystark>

Viel Erfolg!

Ihr Autorenteam

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Ablauf der Prüfung

Im Freistaat Thüringen gibt es im Kernfach Mathematik für Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau ein zentrales schriftliches Abitur. Die Aufgaben werden durch eine Abituraufgabenkommission erstellt, in der erfahrene Lehrerinnen und Lehrer mitarbeiten.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im Zusammenhang mit der Einführung zentraler Bildungsstandards durch die Kultusministerkonferenz wird eine Angleichung der Lehrpläne und der Abiture in allen deutschen Bundesländern angestrebt. Deshalb wurde der Mathematiklehrplan für Gymnasien auch in Thüringen etwas verändert. Im Unterricht der Mathematik-Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau fällt die Wahl zwischen zwei Vertiefungsthemen Geometrie oder Stochastik weg. Es werden alle Themen behandelt und diese sind auch prüfungsrelevant. Allerdings wird in der Stochastik das Stoffgebiet „Testen von Hypothesen“ durch „Prognose- und Konfidenzintervalle“ ersetzt. Dieses ist dann auch prüfungsrelevant. Diese Umstände führen zu einer Veränderung des Mathematikabiturs in Thüringen. Die Abiturprüfung hat folgende Struktur:

Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (40 BE)

Teil B: Analysis (40 BE)

Teil C1: Geometrie (25 BE), Stochastik (15 BE)

Teil C2: Stochastik (25 BE), Geometrie (15 BE)

Für den Prüfungsteil A ist ein Arbeitsblatt, das die Aufgaben sowie zu vervollständigende Koordinatensysteme und Platz für die Lösungen enthält, vorgesehen. Nur die Teile B und C1 bzw. C2 können mit CAS bearbeitet werden.

Alle Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer bearbeiten alle Aufgaben des Prüfungsteils A und alle Teilaufgaben des Prüfungsteils B. Nur im Prüfungsteil C kann zwischen C1 und C2 gewählt werden.

Die im Zusammenhang mit dem Abituraufgabenpool der Länder veröffentlichte Aufgabensammlung für Mathematik dient als Orientierung für die Weiterentwicklung der Aufgabenformate und Anforderungen in der Abiturprüfung in Thüringen. Sie finden sie im Internet unter: <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik>

Dauer der Prüfung

Die Bearbeitungszeit beträgt 300 Minuten. Die Aufgaben aus dem Teil A sind von allen Prüfungsteilnehmern zu Beginn der Bearbeitungszeit zu lösen. Als Hilfsmittel sind nur Zeichengeräte zugelassen. Nachdem der Prüfungsteilnehmer die Lösungen für den Teil A abgegeben hat, werden die Wahlaufgaben aus den Teilen B und C mit den angegebenen Hilfsmitteln bearbeitet.

Zugelassene Hilfsmittel

In Teil A dürfen außer Zeichengeräten keine weiteren Hilfsmittel verwendet werden. In den Teilen B und C1 bzw. C2 kann die im Unterricht verwendete Formelsammlung sowie ein Taschenrechner und ein CAS verwendet werden. Dabei wird man sich an dem Gerät oder der Software orientieren, womit im vorangegangenen Unterricht gearbeitet wurde.

2 Inhalte und Schwerpunktthemen

Die verbindlichen Lehrplanvorgaben, nach denen in den vier Kurshalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen die inhaltlichen Anforderungen. Die Binomialverteilung einschließlich der Zwei-Sigma-Regel und deren Anwendungen spielen nach dem veränderten Lehrplan von 2018 eine größere Rolle. Unter <https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392> finden Sie eine ausführliche Darstellung des weiterentwickelten Lehrplans für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik. Eine (nicht ganz vollständige) Übersicht über wichtige, abiturrelevante Kompetenzen dieses Lehrplans ist nachstehend aufgeführt.

Analysis – Sachkompetenz

Der Schüler kann

- die mittlere Änderungsrate auch in Sachzusammenhängen ermitteln und interpretieren,
- die Ableitung einer Funktion als lokale Änderungsrate und als Differenzialquotient beschreiben, erläutern und geometrisch als Tangentenanstieg interpretieren,
- die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen aus der Anschauung heraus deuten,
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktion erkennen, begründen und darstellen,
- Ableitungen für Funktionen ermitteln, ohne Hilfsmittel für
 - Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten,
 - ganzrationale Funktionen (Summe von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten),
 - Exponentialfunktionen (Basis e),
 - Sinus-, Kosinusfunktionen und die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$,
 - Verknüpfungen und einfache Verkettungen dieser Funktionen,
- Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen (Basis e) sowie deren Verkettungen und Verknüpfungen auf Eigenschaften (Definitions- und Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Symmetrie bezüglich der y -Achse und des Koordinatenursprungs, Monotonie, Extrem- und Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen) untersuchen,
- von Funktionen
 - Eigenschaften ermitteln,
 - die Stetigkeit anschaulich erläutern,
 - waagerechte und senkrechte Asymptoten angeben,
 - Periodizität angeben,
- die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ nutzen,
- eine Schar von Funktionen mit reellen Parametern auf Eigenschaften untersuchen,
- Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen ermitteln,
- Gleichungen von ganzrationalen Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften ermitteln,
- Extremwertprobleme lösen,

Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2020
Pflichtaufgabe Teil B: Analysis

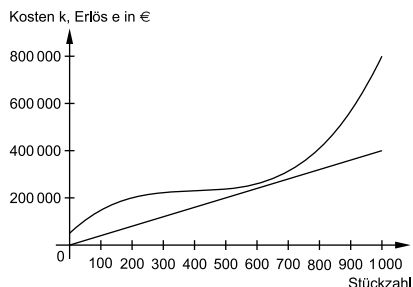
1. Gegeben sind mit $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{10}x^2 \cdot (x - 6)$ und für jede reelle Zahl a ($a \neq 0$) eine Funktion g_a durch $g_a(x) = f(x) + a \cdot x$.
 - a) Zeigen Sie, dass $x = 2$ die Wendestelle von f ist. (2 BE)
 - b) Begründen Sie, dass die Funktionen f und g_a für alle Werte von a eine gemeinsame Wendestelle besitzen. (2 BE)
 - c) Weisen Sie nach, dass sich die Wendetangente an den Graphen von f und alle Wendetangenten an die Graphen von g_a in einem gemeinsamen Punkt schneiden. (4 BE)
 - d) Die Punkte $P\left(0 \mid \frac{4}{5}\right)$, $W_f(2 \mid f(2))$ und $W_{g_a}(2 \mid g_a(2))$ sind Eckpunkte eines Dreiecks.
 Untersuchen Sie, für welche Werte von a dieses Dreieck rechtwinklig ist. (6 BE)
 - e) Die Graphen von f und g_a sowie die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche vollständig.
 Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der Inhalt dieser Fläche 10 FE beträgt. (3 BE)

2. Ein Unternehmen produziert E-Scooter.
 Die monatlichen Produktionskosten der E-Scooter in Euro werden im Unternehmen mithilfe der Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{400}x^3 - 3x^2 + 1250x + 50\,000$ mathematisch beschrieben.
 Für den Erlös e beim Verkauf der E-Scooter gilt der funktionale Zusammenhang $e(x) = p \cdot x$, wobei p der Stückpreis in Euro und x die Stückzahl bedeuten.
 Der Gewinn g eines Unternehmens lässt sich als Differenz aus dem Erlös e und den Produktionskosten k berechnen.

Für die folgenden Aufgaben wird vorausgesetzt, dass alle produzierten E-Scooter auch verkauft werden.

- a) Dargestellt sind die Graphen der Funktionen k und e mit $p = 400$ im Intervall $0 \leq x \leq 1000$.

Entscheiden Sie mithilfe der Graphen, ob der Stückpreis von 400 € für das Unternehmen rentabel ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



- b) Im Unternehmen wird nach Analyse der Marktsituation entschieden, den Preis für einen E-Scooter auf 725 € festzusetzen.
 Bestimmen Sie die monatliche Mindest- und die Höchstanzahl von E-Scootern, damit Gewinn erwirtschaftet werden kann.
 Berechnen Sie den Maximalgewinn, den das Unternehmen erzielen kann. (7 BE)

Hinweise und Tipps

Aufgabe 1a

- Falls Sie diese einfache Funktion ohne CAS ableiten wollen, dann multiplizieren Sie den Funktionsterm von f aus. So lässt es sich besser ableiten.
- Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von f .
- Berechnen Sie die Nullstellen von $f''(x)$. Wenn es solche Nullstellen gibt, dann sind sie die möglichen Wendestellen.
- Prüfen Sie eine hinreichende Bedingung für Wendestellen.
- Untersuchen Sie also, ob $f'''(2) \neq 0$ ist.

Aufgabe 1b

- Die Funktion $g_a(x) = f(x) + a \cdot x$ unterscheidet sich von $f(x)$ durch den Summanden $a \cdot x$. Das ist der Funktionsterm einer linearen Funktion.
- Begründen Sie, weshalb aus diesem Grunde die 2. und 3. Ableitungen von $f(x)$ und $g_a(x)$ übereinstimmen müssen.
- Überlegen Sie, welche Schlussfolgerungen bezüglich der Existenz von Wendestellen sich aus der Übereinstimmung der 2. und 3. Ableitungen ergeben.

Aufgabe 1c

- Am einfachsten lassen sich die Wendetangenten mit dem CAS bestimmen.
- Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten von $f(x)$ und $g_a(x)$ an der gemeinsamen Wendestelle $x=2$.
- Vergleichen Sie diese Gleichungen und ziehen Sie Schlussfolgerungen für einen gemeinsamen Punkt.

Aufgabe 1d

- Berechnen Sie die Funktionswerte $f(2)$ und $g_a(2)$.
- Machen Sie sich die gegenseitige Lage der Punkte P , W_f und W_{g_a} klar.
- Fertigen Sie eine Skizze dazu an.
- Überlegen Sie, wie man die Rechtwinkligkeit eines Dreiecks nachweisen kann.
- Sie können z. B. auf den Satz des Pythagoras oder das Skalarprodukt geeigneter Vektoren zurückgreifen.
- Durch den Operator „Untersuchen Sie ...“ ist auch eine grafische Lösung möglich.

Aufgabe 1e

- Verwenden Sie im Ansatz das bestimmte Integral zur Flächenberechnung.
- Veranschaulichen Sie sich die gegenseitige Lage der Graphen der Funktionen $g_a(x)$ mit dem Graphen der Funktion $f(x)$.
- Beachten Sie bei der Festlegung der Integrationsgrenzen, dass die Funktionen $f(x)$ und $g_a(x)$ den Punkt $O(0|0)$ gemeinsam haben.
- Bedenken Sie, dass die Graphen von $g_a(x)$ unterhalb oder oberhalb des Graphen von $f(x)$ liegen können.

Lösungen

1. a) Ableitungen

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 \cdot (x-6) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2$$

$$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 - \frac{6}{5}x$$

$$f''(x) = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{5}$$

Notwendige Bedingung für Wendestellen

$f''(x) = 0$ setzen und lösen:

$$\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} = 0$$

$$x = 2$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen

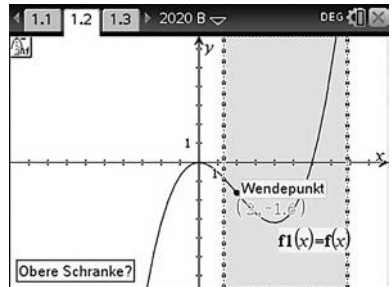
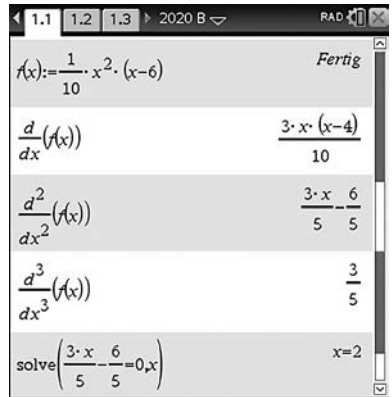
Prüfen, ob $f'''(x) \neq 0$ ist:

$$f'''(2) = \frac{3}{5} > 0$$

Damit ist sicher, dass $x=2$ eine Wendestelle von f ist.

Alternative Lösung zur hinreichenden Bedingung: $f''(x)$ wechselt an der Stelle $x=2$ das Vorzeichen von minus zu plus.

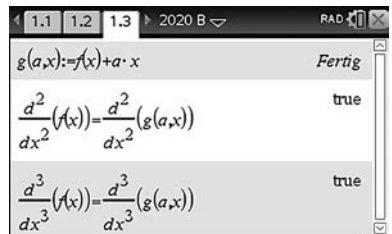
Hinweis: Durch eine grafische Bestimmung der Wendestelle kann man das Ergebnis selbst kontrollieren.



- b) Die 1. Ableitung der Funktion $y = a \cdot x$ ist $y' = a$ und die 2. Ableitung ist $y'' = 0$.

Damit ist klar, dass die 2. und 3. Ableitungen von $f(x)$ und $g_a(x)$ übereinstimmen.

Demzufolge hat $g_a(x)$ dieselbe Wendestelle $x=2$ wie $f(x)$, die in Teilaufgabe 1a bestimmt wurde.



Alternative Lösung: Die Wendestelle von $g_a(x)$ wird „traditionell“ berechnet mit der Nullstelle x_0 der 2. Ableitung als notwendiger Bedingung und dem von null verschiedenen Wert der 3. Ableitung an der Stelle x_0 . Anschließend erfolgt ein Vergleich mit der Wendestelle der Funktion f .

$$\frac{d^2}{dx^2}(g(a,x)) = \frac{3 \cdot x - 6}{5}$$

$$\text{solve}\left(\frac{3 \cdot x - 6}{5} = 0, x\right) \quad x=2$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(g(a,x)) = \frac{3}{5}$$

- c) Die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an einer Stelle x_0 lässt sich mit dem CAS-Befehl $\text{tangentLine}(f(x), x, x_0)$ unter <Analysis> und <Tangententerm> bestimmen.

Die Tangentengleichung für $f(x)$ an der Stelle $x = 2$ ist:

$$y = -\frac{6}{5} \cdot x + \frac{4}{5}$$

Die Funktionen $g_a(x)$ haben an der Stelle $x = 2$ die Tangentengleichungen:

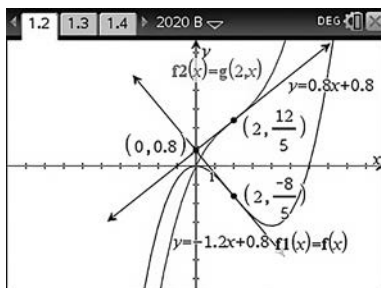
$$y = \frac{5a-6}{5} \cdot x + \frac{4}{5}$$

Die Tangentengleichungen haben ein und dasselbe Absolutglied $\frac{4}{5}$ und wegen $a \neq 0$ unterschiedliche Anstiege. Da es sich um lineare Funktionen handelt, die, wenn sich ihre Graphen schneiden, genau einen Schnittpunkt haben, so muss dies der Punkt $P\left(0 \mid \frac{4}{5}\right)$ sein.

Wieder ist hier eine grafische Selbstkontrolle möglich.

$$\text{tangentLine}(f(x), x, 2) = -\frac{6}{5} \cdot x + \frac{4}{5}$$

$$\text{tangentLine}(g(a,x), x, 2) = \frac{(5 \cdot a - 6) \cdot x}{5} + \frac{4}{5}$$



Alternative Lösung: Die Tangentengleichungen sind von der Form $y = m \cdot x + n$. Der Anstieg m wird über die 1. Ableitung der Funktion an der Stelle $x = 2$ bestimmt. Durch Einsetzen von m sowie $x = 2$ und dem Funktionswert an der Stelle $x = 2$ kann n ermittelt werden.

Für die Funktion f bedeutet das:

$$m = f'(2) = \frac{3}{10} \cdot 2^2 - \frac{6}{5} \cdot 2 = -\frac{6}{5}$$

$$f(2) = \frac{1}{10} \cdot 2^2 \cdot (2 - 6) = -\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{8}{5} = -\frac{6}{5} \cdot 2 + n \Rightarrow n = \frac{4}{5} \Rightarrow y = -\frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$$

Für die Funktionen $g_a(x)$ erhält man:

$$m = g'_a(2) = \frac{3}{10} \cdot 2^2 - \frac{6}{5} \cdot 2 + a = a - \frac{6}{5}$$

$$g_a(2) = f(2) + a \cdot 2 = 2a - \frac{8}{5} \Rightarrow 2a - \frac{8}{5} = \left(a - \frac{6}{5}\right) \cdot 2 + n \Rightarrow n = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \left(a - \frac{6}{5}\right)x + \frac{4}{5}$$

Der Vergleich der beiden Tangentengleichungen kann wie oben beschrieben erfolgen.

d) $f(2) = \frac{1}{10} \cdot 2^2 \cdot (2-6) = -\frac{8}{5}; \quad g_a(2) = f(2) + a \cdot 2 = 2a - \frac{8}{5}$

Koordinaten:

$$P\left(0 \mid \frac{4}{5}\right), W_f\left(2 \mid -\frac{8}{5}\right) \text{ und } W_{g_a}\left(2 \mid 2a - \frac{8}{5}\right)$$

Die Punkte W_f und W_{g_a} liegen auf ein und derselben Geraden $x=2$, der Senkrechten zur x -Achse bei $x=2$.

Die Punkte P und W_f liegen eindeutig fest, während der Punkt W_{g_a} jeden Punkt auf der Senkrechten $x=2$ annehmen kann, mit Ausnahme des Punktes W_f , weil an dieser Stelle $a=0$ sein müsste, was in der Aufgabenstellung ausgeschlossen wurde.

Das Dreieck $PW_fW_{g_a}$ kann nur am Eckpunkt P oder am Eckpunkt W_{g_a} einen rechten Innenwinkel haben.

Am Eckpunkt W_f ist der Winkel α zwischen den Geraden $x=2$ und $g(W_fP)$ unabhängig von a ein spitzer Winkel:

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{\frac{4}{5} - \left(-\frac{8}{5}\right)} = \frac{10}{12} \Rightarrow \alpha \approx 39,8^\circ \text{ (muss nicht berechnet werden)}$$

Am Eckpunkt W_{g_a} liegt genau dann ein rechter Innenwinkel vor, wenn P und W_{g_a} auf gleicher Höhe über der x -Achse liegen, ihre y -Werte also gleich sind. Damit muss gelten:

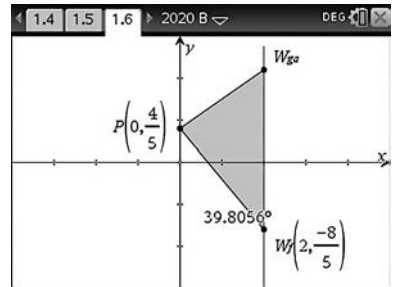
$$2a - \frac{8}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{6}{5}$$

Bei P liegt genau dann ein rechter Winkel vor, wenn die Vektoren $\overrightarrow{PW_{g_a}}$ und $\overrightarrow{PW_f}$ aufeinander senkrecht stehen. Das ist genau dann der Fall, wenn das Skalarprodukt dieser Vektoren null ist:

$$\overrightarrow{PW_{g_a}} \circ \overrightarrow{PW_f} = \left(2a - \frac{8}{5} - \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \circ \left(-\frac{8}{5} - \frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right) = 4 - \frac{24}{5}a + \frac{144}{25} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{61}{30}$$

Es gibt genau zwei Werte für a , für die das Dreieck $PW_fW_{g_a}$ rechtwinklig ist:

$$\underline{\underline{a = \frac{6}{5}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{a = \frac{61}{30}}}$$





© **STARK Verlag**

www.pearson.de
info@pearson.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.