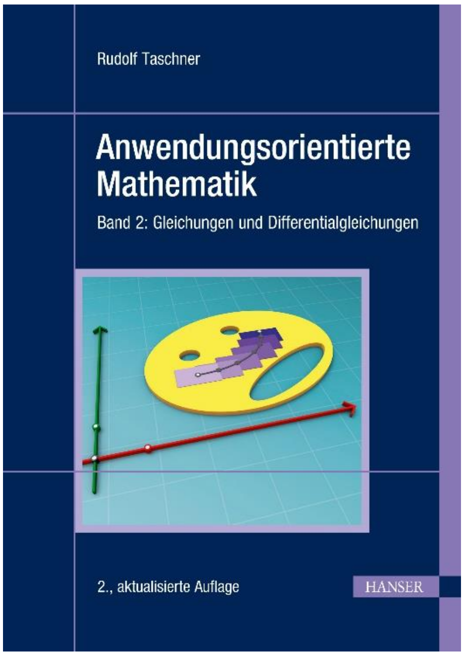
HANSER



Leseprobe

zu

Anwendungsorientierte Mathematik 2

von Rudolf Taschner

Print-ISBN: 978-3-446-47187-0
E-Book-ISBN: 978-3-446-47201-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter

https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471870

sowie im Buchhandel

Vorwort

Gleichungen und Differentialgleichungen, die das zentrale Thema des zweiten Bandes meines Lehrbuchs über Anwendungsorientierte Mathematik bilden, werden von der Differentialrechnung im Reellen und von der Differentialrechnung im Komplexen umrahmt. Nicht alle in diesem Band vorgestellten Details müssen beim ersten Durchlesen intensiv studiert werden. Auch bei der Vorlesung für Studentinnen und Studenten der Elektro- und Informationstechnik an der Technischen Universität Wien, die dem Buch zugrunde liegt, werden einige der hier ausführlich erörterten Abschnitte nur skizzenhaft präsentiert. So kann man ohne Schaden für das Kennenlernen der wichtigsten Erkenntnisse zum Beispiel die Abschnitte 2.5, 2.10, 4.4, 4.7, 5.3, 5.6 überspringen und für eine spätere und genauere Reflexion bewahren.

Die Ziele des Lehrbuchs werden in diesem Band konsequent weiter verfolgt: Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind.

Kenner der Materie werden wie beim ersten Band feststellen, dass die Anordnung des Lehrstoffs zuweilen ungewohnt ist. So werden *vor* den linearen die nichtlinearen Gleichungssysteme behandelt, der Existenz- und Eindeutigkeitssatz findet nicht im fünften Kapitel über Differentialgleichungen, sondern schon viel früher seinen angemessenen Ort, die abstrakte lineare Algebra kommt erst dann zur Sprache, wenn man bereits genug über Determinanten und Matrizen Bescheid weiß. Ich scheute auch nicht davor zurück, den Integralsatz von Cauchy in seiner Homologie- und nicht in der üblichen Homotopieversion vorzustellen. Hier halte ich mich vor allem an das glänzende Lehrbuch „Complex Analysis“ von Lars Ahlfors. Ebenso übernahm ich den von Raymond Redheffer vorgeschlagenen Zugang zum Kurvenintegral, der keine rektifizierbaren Kurven voraussetzt, sondern just jene „Kurvenstücke“, die zu Beginn des ersten Kapitels definiert sind. All dies kommt der Ästhetik besonders entgegen, die der Differentialrechnung im Komplexen eigen ist und die jeder künftige Ingenieur – weiblich wie männlich – kennenlernen soll.

Bei der Differentialrechnung im Reellen werden Experten von der Aussage überrascht sein, dass die punktweise Konvergenz einer Folge von Funktionen, die über einem Kompaktum definiert (und stetig) sind, deren gleichmäßige Konvergenz nach sich zieht. Gewöhnlich benötigt man für Aussagen dieser Art zusätzliche Voraussetzungen, wie sie zum Beispiel Ulisse Dini formulierte. Wenn man allerdings das Kontinuum so sieht wie Luitzen Egbertus Jan Brouwer und Hermann Weyl – eine Betrachtungsweise, die bereits im ersten Band dieses Buches vermittelt wurde –, erweist sich die genannte Aussage als offenkundig wahr. Einige der bekannten scheinbaren Gegenbeispiele werden in der Übungsaufgabe 1.13 ausdrücklich genannt. Wer sich darüber genauer informieren will, mag zu meinem Buch „The Continuum“ greifen. In meinem

Aufsatz „The swap of integral and limit in constructive mathematics“ kommt darüber hinaus die am Ende von Abschnitt 1.9 angedeutete Vertauschbarkeit des Integrals mit dem punktweisen Grenzwert von Funktionenfolgen zur Sprache.

Auch dieser Band wurde vom Carl Hanser Verlag unter professioneller Betreuung von Christine Fritzsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegeben. Ihnen gebührt ein „merci cordialement“. Und auch bei diesem Band bitte ich, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler zu verzeihen.

Wiederholen möchte ich meinen innigen Dank an meine Frau Bianca und meine Kinder Laura und Alexander: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, Mai 2014 *Rudolf Taschner*

Inhalt

1 Differenzieren im Reellen

1.1 Ebene Kurven

Die im Zeitalter des Barocks von Newton und Leibniz entdeckte Differentialrechnung stellte sich als schier unerschöpfliche Fundgrube mathematischer Erkenntnisse heraus. Die meisten der gewonnenen Einsichten waren für die damals in Entwicklung befindlichen Natur- und Ingenieurwissenschaften nicht bloß außerordentlich wertvoll, sie waren mehr als nur das: Die Differentialrechnung bildet das unverzichtbare Fundament, auf dem die exakten Wissenschaften in den auf das Barock folgenden Jahrhunderten ihre Erfolge aufbauen konnten. Es handelt sich um jene Erfolge, die den Weg der Gesellschaft in die Aufklärung und zur Moderne, in das technisch-naturwissenschaftlich geprägte Zeitalter, ebnete. Die Kapitel der beiden folgenden Bände berichten darüber.

Die Differentialrechnung erlaubt, den Begriff „Kurve", insbesondere jenen der „Funktionskurve", mathematisch exakt zu fassen: Wir betrachten ein offenes Intervall J auf der t-Achse. Eine *ebene Kurve* liegt vor, wenn mithilfe zweier stetiger Funktionen $f_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 : J \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abhängigkeit $x = x(t) = f_1(t)$, $y = y(t) = f_2(t)$ der Koordinaten x, y des in der x-y-Ebene variablen Punktes $X = (x, y) = X(t)$ vom Parameter t beschrieben wird.

Die beiden einfachsten Beispiele ebener Kurven sind die Gerade und der Kreis. Wenn zwei verschiedene Punkte $P = (p, q)$ und $Q = (p + a, q + b)$ vorliegen, ist durch

$$\begin{cases} x = p + at \\ y = q + bt \end{cases}$$

die durch P und Q laufende Gerade gegeben, wenn der Parameter t die als t-Achse verstandene Skala $\mathbb{R}$ durchläuft. Wenn ein Punkt $M = (m, n)$ und eine positive Konstante r vorliegen, ist durch

$$\begin{cases} x = m + r\cos\varphi \\ y = n + r\sin\varphi \end{cases}$$

der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r gegeben, wenn der Parameter φ die als φ-Achse verstandene Skala $\mathbb{R}$ durchläuft. Eine weitere Beispielgruppe von Kurven sind die Funktionskurven: Es liegt eine im offenen Intervall J definierte und stetige Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ vor. Dann ist

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

eine etwas umständliche Beschreibung der Beziehung $y = f(x)$. Sie zeigt, dass man das Schaubild der Funktion f als ebene Kurve auffassen kann, wobei der Parameter x das Intervall J durchläuft.

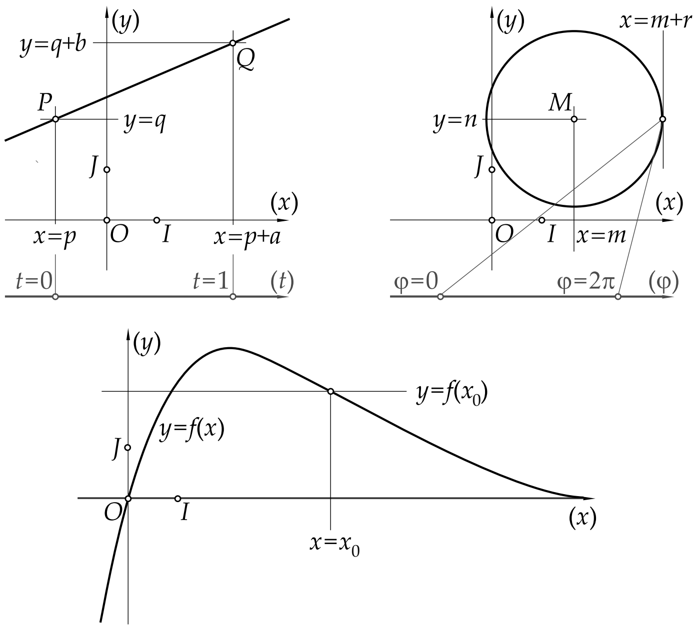


Bild 1.1 Beispiele dreier Kurven: oben links die Gerade durch die Punkte P und Q, oben rechts der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, unten eine Funktionskurve

Ist durch

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

eine ebene Kurve gegeben, wenn der Parameter t das offene Intervall J durchläuft, und bezeichnet $[a; b]$ ein kompaktes Teilintervall von J, nennen wir die Gesamtheit aller Punkte dieser Kurve, bei denen t aus $[a; b]$ entnommen ist, ein *Kurvenstück* dieser Kurve. Der Punkt $A = \left(f_1(a), f_2(a)\right)$ heißt der *Anfangspunkt* und der Punkt $B = \left(f_1(b), f_2(b)\right)$ heißt der *Endpunkt* dieses Kurvenstücks. Betrachtet man zum Beispiel bei der oben gegebenen Gerade das Kurvenstück, bei dem t das Intervall $[0; 1]$ durchläuft, erhält man die Strecke mit P als Anfangs- und mit Q als Endpunkt. Betrachtet man beim oben gegebenen Kreis das Kurvenstück, bei dem φ das Intervall $\left[\alpha; \beta\right]$ durchläuft, wobei $\beta - \alpha \leq 2\pi$ ist, erhält man einen Kreisbogen. Dessen Anfangspunkt und dessen Endpunkt sind voneinander verschieden, wenn $\beta - \alpha < 2\pi$ ist. Im Falle $\beta - \alpha = 2\pi$ stimmen der Anfangs- und Endpunkt des Kreisbogens überein. Man sagt dazu, der Kreisbogen ist *geschlossen*. Benannt nach dem im 19. Jahrhundert an der Pariser École Polytechnique lehrenden Mathematiker und Ingenieur Camille Jordan heißt eine ebene Kurve

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

eine *Jordankurve*, wenn bei verschiedenen Parameterwerten die ihnen zugeordneten Kurvenpunkte stets voneinander verschieden sind. Sind zusätzlich die beiden Funktionen f_1 und f_2 an den Intervallgrenzen α und β des Parameterintervalls J stetig und gilt $f_1(\alpha) = f_1\left(\beta\right)$ sowie $f_2(\alpha) = f_2\left(\beta\right)$, spricht man von einer *geschlossenen Jordankurve*. Lässt man zum Beispiel beim oben genannten Kreis im Bild 1.1 den Parameter φ nur das offene Intervall $]-\pi;\pi[$ durchlaufen, beschreibt der so definierte Kreis eine geschlossene Jordankurve.

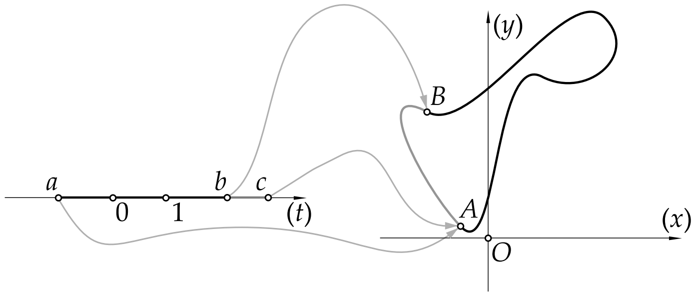


Bild 1.2 Die Kurve mit $]a;b[$ als Parameterintervall ist eine Jordankurve mit A als Anfangs- und B als Endpunkt. Die Kurve mit $]a;c[$ als Parameterintervall ist eine geschlossene Jordankurve.

Wenn bei einer ebenen Kurve

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

die beiden Funktionen f_1 und f_2 stetig differenzierbar sind, sprechen wir von einer *glatten* Kurve. Denn dann kann man jedem Kurvenpunkt $X = \left(x, y\right)$ einen *Tangentenvektor*

$$\mathrm{d}X = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

zuweisen. Newton deutete den Parameter t als Zeit – daher auch die Bezeichnung. Denn das englische Wort für Zeit ist „time“, das lateinische Wort für Zeit ist „tempus“, und beide Wörter beginnen mit dem Buchstaben t. Newton sah den Kurvenpunkt $X = \left(x, y\right)$ als Ort eines sich entlang der Kurve bewegenden punktförmigen Körpers: Zum Zeitpunkt t nimmt er die Position $X(t) = \left(x(t), y(t)\right)$ ein. Das Verhältnis des Tangentenvektors $\mathrm{d}X$ zum Zeitdifferential $\mathrm{d}t$ nennt Newton den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Newton selbst kannte die Bezeichnung von Leibniz nicht. Er sprach auch nicht von Differentialen, sondern er kürzte die Differentiation nach dem Zeitparameter t mit einem hochgestellten Punkt ab. Statt der obigen Formel schrieb er

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}$$

und sprach bei $\dot{x}$ und $\dot{y}$ von den *Fluxionen* der *Fluenten* x, y. Denn das lateinische flux ist der „Fluss“ und fluere bedeutet „fließen“. Dies ist die einzige der von Newton erfundenen Bezeichnungen, die wir übernehmen: den hochgestellten Punkt als Abkürzung für den Quotienten des Differentials der genannten Variable durch das Differential des immer mit t bezeichneten Parameters. Wenn der Parameter der Kurve mit einem anderen Symbol als t bezeichnet wird, halten wir uns strikt an die Bezeichnungsweise von Leibniz.

Ob eine Kurve schnell oder langsam durchlaufen wird, spielt für ihr geometrisches Erscheinungsbild keine Rolle. Wir unterscheiden daher zwischen der *Kinematik* der Kurve, bei der wir – dem griechischen kínein zufolge, das „bewegen“ bedeutet – die Bewegung des Körpers entlang der Kurve im Sinne Newtons untersuchen, und der *Geometrie* der Kurve, bei der allein das Bild der Kurve zur Diskussion steht. Gehen wir allein vom geometrischen Bild aus, sind Kurven auch dann einander gleich, wenn sie verschiedenartig durchlaufen werden. Fassen wir dies genauer: Wenn zwei offene Intervalle I und J vorliegen, I als Teil der u-Achse und J als Teil der t-Achse, und wenn eine stetige und streng monoton wachsende Funktion $h : I \longrightarrow J$ zusammen mit ihrer ebenfalls stetigen und streng monoton wachsenden Umkehrfunktion $H : J \longrightarrow I$ die Variablen u und t gemäß $t = h(u)$ und $u = H(t)$ ineinander überführen, unterscheiden wir geometrisch nicht zwischen den beiden Kurven

$$\begin{cases} x = x(t) = f_1(t) \\ y = y(t) = f_2(t) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = x(u) = f_1(h(u)) \\ y = y(u) = f_2(h(u)) \end{cases},$$

wobei links t das Intervall J und rechts u das Intervall I durchlaufen. Das streng monotone Wachsen der Funktionen h und H verlangen wir, damit bei Kurvenstücken Anfangs- und Endpunkte als solche erhalten bleiben und nicht vertauscht werden. Kürzen wir die verketteten Funktionen $f_1 \circ h$ und $f_2 \circ h$ mit $g_1 = f_1 \circ h$ und $g_2 = f_2 \circ h$ ab, besagt die obige Formelzeile, dass wir geometrisch nicht zwischen den beiden Kurven

$$\begin{cases} x = x(u) = g_1(u) \\ y = y(u) = g_2(u) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = x(t) = g_1(H(t)) \\ y = y(t) = g_2(H(t)) \end{cases}$$

unterscheiden, wobei links u das Intervall I und rechts t das Intervall J durchlaufen. Damit ist die Symmetrie dieses Begriffs der Gleichheit von Kurven dokumentiert. Die Abbildung $t = h(u)$ beziehungsweise ihre Umkehrung $u = H(t)$, die wechselseitig I und J ineinander überführen, nennt man einen *Homöomorphismus* zwischen diesen beiden Intervallen. Das griechische hómoios heißt „gleichwertig“ und morphé ist die „Form“. Sind – was wir in Zukunft meist voraussetzen – die beiden Funktionen h und H außerdem stetig differenzierbar, spricht man von einem *Diffeomorphismus*. Dies ist ein dem Wort Homöomorphismus nachgebildetes Kunstwort, in dem das „Diffeo-“ auf die Differenzierbarkeit hinweisen soll.

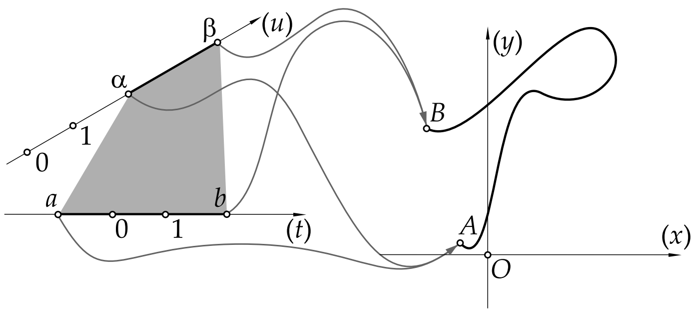


Bild 1.3 Zwischen den beiden Intervallen $[a; b]$ und $[\alpha; \beta]$ besteht ein Diffeomorphismus, der durch die graue Fläche symbolisiert wird. Beide Intervalle dienen für die gleiche Kurve als Parameterintervalle.

Ein einfaches Beispiel stellt der von $P = (p, q)$ ausgehende und durch $Q = (p + a, q + b)$ verlaufende Strahl dar, der durch

$$\begin{cases} x = x(u) = p + au \\ y = y(u) = q + bu \end{cases}$$

beschrieben wird, wenn u die positive reelle Achse $\mathbb{R}^+ =]0;\infty[$ durchläuft. Mit der Festlegung $t = \ln u$, die das Gleiche wie $u = \mathrm{e}^t$ besagt, ist ein Diffeomorphismus zwischen der positiven u-Achse $\mathbb{R}^+$ und der reellen t-Achse $\mathbb{R}$ gegeben. Darum liegt geometrisch der gleiche Strahl vor, wenn er durch

$$\begin{cases} x = x(t) = p + a\mathrm{e}^t \\ y = y(t) = q + b\mathrm{e}^t \end{cases}$$

beschrieben wird, wobei t ganz $\mathbb{R}$ durchläuft.

Ein zweites Beispiel ist die durch

$$\begin{cases} x = m + r\cos\omega t \\ y = n + r\sin\omega t \end{cases}$$

gegebene Kreislinie mit $M = (m, n)$ als Mittelpunkt und mit Radius r, bei dem ω eine positive Konstante bezeichnet und der Parameter t die Skala $\mathbb{R}$ durchläuft. Der Diffeomorphismus $\varphi = \omega t$ zeigt, dass es sich geometrisch um den gleichen Kreis handelt wie jener, der oben beschrieben wurde. Deutet man t als Zeit, lautet hier der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Dieser besitzt als Betrag $r\omega$. Den Faktor ω des Radius r nennt man die *Winkelgeschwindigkeit*: Sobald t ein Intervall der Länge $2\pi/\omega$ durchlaufen hat, wurde der Kreis vom Körper einmal umrundet. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist allerdings von der Größe der Winkelgeschwindigkeit unabhängig.

Ist durch $X = (x, y) = (x(t), y(t))$ eine glatte Kurve gegeben, lauten

$$\mathrm{d}x = \dot{x}\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}y = \dot{y}\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}X = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \mathrm{d}t\,.$$

Die Länge des Tangentenvektors $\mathrm{d}X$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{d}s = \|\dot{X}\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

Den Faktor $\mathrm{d}t$ heben wir deshalb aus der Wurzel heraus, weil wir stets von einer „wachsenden Zeit“ t, also von $\mathrm{d}t > 0$ ausgehen wollen. Man nennt $\mathrm{d}s = \|\mathrm{d}X\|$ das *Differential der Bogenlänge* der Kurve und das unbestimmte Integral

$$s = \int \mathrm{d}s = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

die *Bogenlänge* der Kurve. Wenn der Parameter t seinerseits diffeomorph gemäß $t = t(u)$ von einem anderen Parameter u abhängt, kann man diese Substitution im Integral durchführen und erhält statt der von t abhängigen Bogenlänge $s = s(t)$ nun die gleiche, jetzt aber von u abhängige Bogenlänge $s = s(u)$.

Bei der durch

$$\begin{cases} x = p + at \\ y = q + bt \end{cases}$$

gegebenen Geraden lauten $\dot{x} = a$ und $\dot{y} = b$. Folglich errechnet sich deren Bogenlänge als $s = s(t) = t\sqrt{a^2 + b^2} + s_0$ mit der Integrationskonstante s_0. Betrachten wir die von $P = (p, q)$ zu $Q = (p + a, q + b)$ führende Strecke, entspricht diese jenem „Geradenstück", bei dem der Parameter t das Intervall $[0; 1]$ durchläuft. Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + b^2}$$

teilt uns die Länge dieser Strecke mit. Allgemein sei ein Kurvenstück einer glatten Kurve dadurch gegeben, dass der Kurvenparameter t das Teilintervall $[a; b]$ des offenen Intervalls J durchläuft. Dann definiert das Integral

$$L = \int_a^b \mathrm{d}s = s|_{t=b} - s|_{t=a}$$

die *Länge* dieses Kurvenstücks. Betrachten wir als Beispiel den durch

$$\begin{cases} x = m + r\cos\varphi \\ y = n + r\sin\varphi \end{cases}$$

gegebenen Kreis: Hier lauten $\mathrm{d}x = -r\sin\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}y = r\cos\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi$, also $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\varphi$. Darum ist $s = r\varphi + s_0$ mit einer Integrationskonstante s_0. Lassen wir bei zwei Winkeln α und β mit $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$ den Winkel φ nur das Intervall $[\alpha; \beta]$ durchlaufen, verbleibt vom Kreis als Kurvenstück ein Kreisbogen der Länge $r(\beta - \alpha)$. Der gleiche Wert ergibt sich natürlich, wenn man den Kreis mit der Zeit t gemäß $\varphi = \omega t$ parametrisiert. Hier lautet die Bogenlänge $s = r\omega t + s_0$ und man hat zu beachten, dass bei diesem Diffeomorphismus dem Intervall $[\alpha; \beta]$ auf der φ-Achse das Intervall $[\alpha/\omega; \beta/\omega]$ auf der t-Achse entspricht.

Wenn bei einer durch $X = X(t) = (x, y)$ gegebenen glatten Kurve der Tangentenvektor $\mathrm{d}X$ vom Nullvektor verschieden ist, definiert man ihren *Tangenteneinheitsvektor* als

$$(\mathrm{d}X)_0 = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

und ihren *Normaleneinheitsvektor* als

$$(\mathrm{d}X)_0^\perp = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} .$$

Diese beiden Vektoren sind offenkundig allein durch die Geometrie der Kurve bestimmt und hängen nicht von der Wahl der Parametrisierung ab. Nur bei Kurvenpunkten mit $\mathrm{d}X = 0$ existieren sie nicht. Man nennt derartige Kurvenpunkte *singulär*. Wir wollen sie im Folgenden von der Betrachtung ausschließen. Im Falle $\mathrm{d}x \ne 0$ kann man den Tangentenanstieg $k = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ berechnen, und im Falle $\mathrm{d}y \ne 0$ kann man den Normalenanstieg $k_\perp = -\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ berechnen.

Kurvenpunkte mit $k = 0$ besitzen waagrechte Tangenten. Sie allein kommen als *Hoch-* oder *Tiefpunkte* der Kurve infrage, also als jene Kurvenpunkte, deren y-Koordinate einen maximalen oder minimalen Wert annimmt. Kurvenpunkte mit $k_\perp = 0$ besitzen senkrechte Tangenten. Sie allein kommen als *linke* oder *rechte Randpunkte* der Kurve infrage, also jene Kurvenpunkte, deren x-Koordinate einen minimalen oder maximalen Wert annimmt. Der vom Vektor i, dem Einheitsvektor in Richtung der x-Achse, und vom Vektor dX aufgespannte Winkel α heißt der *Anstiegswinkel* der Kurve. Offenkundig gilt:

$$k = \tan\alpha \qquad \text{und} \qquad k_\perp = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Falls $\alpha = \alpha(t)$ stetig differenzierbar von t abhängt, erhält man $\mathrm{d}k = \left(1+k^2\right)\mathrm{d}\alpha$ und daher

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}k}{1+k^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)}{1+\frac{\dot y^2}{\dot x^2}} = \frac{\frac{\dot x\mathrm{d}\dot y - \dot y\mathrm{d}\dot x}{\dot x^2}}{1+\frac{\dot y^2}{\dot x^2}} = \frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{\dot x^2+\dot y^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\begin{vmatrix} \dot x & \dot y \\ \ddot x & \ddot y \end{vmatrix}}{\dot x^2+\dot y^2}\,\mathrm{d}t .$$

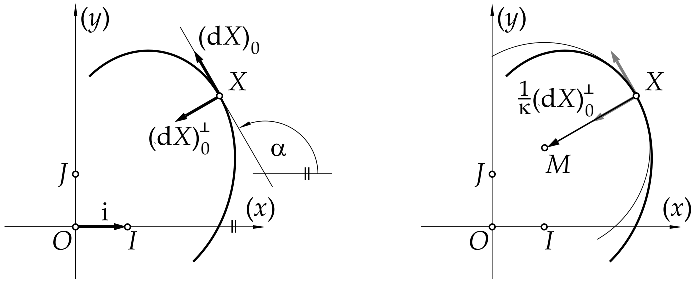


Bild 1.4 Links eine Kurve mit Tangenteneinheitsvektor, Normaleneinheitsvektor und Anstiegswinkel; rechts die Kurve mit dem Krümmungskreis und dessen Mittelpunkt

Die von der Parametrisierung unabhängige Größe

$$\boxed{\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}}$$

heißt die *Krümmung* der Kurve. Anhand des Kreises erkennt man, was dieser Begriff bedeutet: Geht man von

$$\begin{cases} x = m + r\cos\omega t \\ y = n + r\sin\omega t \end{cases}$$

aus, errechnen sich $\dot x = -r\omega\sin\omega t$, $\dot y = r\omega\cos\omega t$, ferner $\ddot x = -r\omega^2\cos\omega t$, $\ddot y = -r\omega^2\sin\omega t$ und $\dot x^2 + \dot y^2 = r^2\omega^2$. Folglich ist

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -r\omega\sin\omega t & r\omega\cos\omega t \\ -r\omega^2\cos\omega t & -r\omega^2\sin\omega t \end{vmatrix}}{r^2\omega^2}\,\mathrm{d}t = \frac{r^2\omega^3\mathrm{d}t}{r^2\omega^2} = \omega\mathrm{d}t .$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch $\mathrm{d}s = r\omega\mathrm{d}t$, verbleibt die Krümmung $\kappa = 1/r$. Wenn die Krümmung einer Kurve von Null verschieden ist, nennt man daher den Betrag ihres Kehrwertes den *Krümmungsradius* der Kurve.

Jener Punkt M, den man gemäß der Formel

$$M = X + \frac{1}{\kappa}\,(\mathrm{d}X)_0^{\perp}$$

erhält, ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Krümmungsradius als Radius, der im Kurvenpunkt X nicht nur die gleiche Tangente, sondern auch die gleiche Krümmung wie die Kurve besitzt. Man nennt diesen Kreis den *Krümmungskreis* der Kurve. Kurvenpunkte mit maximalem beziehungsweise mit minimalem Krümmungsradius nennt man *Scheitel* oder *Scheitelpunkte* der Kurve. Kurvenpunkte, bei denen die Krümmung verschwindet, besitzen keinen Krümmungskreis. Bei ihnen schmiegt sich die Tangente besonders gut an die Kurve, und daher nennen wir diese Punkte *Tangentenschmiegepunkte*. Je nachdem, ob die Tangente im Tangentenschmiegepunkt die Kurve durchsetzt oder aber (jedenfalls in der Nähe des Tangentenschmiegepunktes) begrenzt, nennt man den Tangentenschmiegepunkt einen *Wendepunkt* oder einen *Flachpunkt* der Kurve.

1.2 Parabel und Zykloide

Als erstes Beispiel betrachten wir die bei einem konstanten positiven p durch

$$y^2 = 2px$$

beschriebene Kurve, die den Namen *Parabel* trägt. Apollonius von Perge hat sie so genannt, weil der Flächeninhalt des Rechtecks mit x als Breite und $2p$ als Höhe mit jenem des Quadrats mit y als Seitenlänge übereinstimmt. Denn das griechische parabolé, wörtlich „das daneben Gehende“ steht für den „Vergleich“ und das „Gleichnis“; parabállein heißt „nebeneinander stellen“. Setzt man die Variable y als Kurvenparameter fest, errechnet sich x als $x = y^2/2p$. Ausführlich angeschrieben besitzt daher die Parabel die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\[2ex] y = y\,, \end{cases}$$

wobei y die y-Achse $\mathbb{R}$ durchläuft. Offenkundig ändert sich $x = x\left(y\right)$ nicht, wenn man y durch $-y$ ersetzt. Die Parabel ist folglich zur x-Achse symmetrisch. Und weil bei $y \neq 0$ die Variable x positiv ist, erweist sich der Ursprung $O = (0,0)$ als linker Randpunkt der Parabel. Tatsächlich ergibt die Differentiation von $y^2 = 2px$ die Differentialgleichung $2y\mathrm{d}y = 2p\mathrm{d}x$, vereinfacht: $y\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$. Darum errechnet sich für Parabelpunkte $\left(x,y\right)$, die vom Ursprung verschieden sind, der Parabelanstieg als $k = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = p/y$. Greift man einen vom Ursprung verschiedenen Parabelpunkt $\left(x_0,y_0\right)$ heraus, besitzt in ihm die Tangente den Anstieg $k_0 = p/y_0$ und die Geradengleichung der Tangente kann als

$$y = \frac{p}{y_0}x + c$$

angesetzt werden. Die Konstante c gewinnt man, indem man für x und y die Koordinaten x_0 und y_0 des Punktes einsetzt: Aus $y_0^2 = px_0 + cy_0$ und der Tatsache, dass $\left(x_0,y_0\right)$ auf der Parabel liegt, also $y_0^2 = 2px_0$ zutrifft, erhält man $cy_0 = px_0$. Folglich lautet die Gleichung der Parabeltangente durch den Parabelpunkt (x_0, y_0) so: $y_0 y = p(x + x_0)$. Die Tatsache, dass diese Tangente die x-Achse an der Stelle $(-x_0, 0)$ schneidet, erlaubt eine sehr schnell durchzuführende Tangentenkonstruktion.

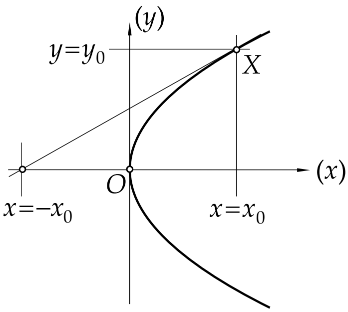


Bild 1.5 Parabel mit Tangente an einem Parabelpunkt

Das Differential der Bogenlänge s der Parabel errechnet sich als

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{y^2}{p^2} + 1} \cdot \mathrm{d}y\,.$$

Führen wir $t = t(y) = y/p$ als neuen, zu y diffeomorphen Parameter ein, erspart man sich unter der Wurzel den Bruch und bekommt wegen $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}t$ für das Differential der Bogenlänge $\mathrm{d}s = p\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Um hieraus die Bogenlänge selbst berechnen zu können, führen wir als zu t diffeomorphen Parameter nun $u = u(t) = \operatorname{arsinh} t$ ein. Denn bei $t = t(u) = \sinh u$ gilt $t^2 + 1 = \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$, und die Wurzel davon lautet einfach nur $\cosh u$. Allerdings ist $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\sinh u) = \cosh u \cdot \mathrm{d}u$ zu bedenken, sodass sich die Bogenlänge aus einer partiellen Integration folgendermaßen errechnet:

$$\begin{aligned}
s &= p\int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = p\int \cosh^2 u \cdot \mathrm{d}u = p\int \cosh u \cdot \mathrm{d}(\sinh u) = \\
&= p\cosh u \cdot \sinh u - p\int \sinh u \cdot \mathrm{d}(\cosh u) = p\cosh u \cdot \sinh u - p\int \sinh^2 u \cdot \mathrm{d}u = \\
&= p\cosh u \cdot \sinh u + p\int \left(1 - \cosh^2 u\right)\mathrm{d}u = p\cosh u \cdot \sinh u + pu - p\int \cosh^2 u\,\mathrm{d}u = \\
&= p\cosh u \cdot \sinh u + pu - (s - 2s_0)\ ,
\end{aligned}$$

wobei $-2s_0$ für die Integrationskonstante steht. Addiert man nämlich in dieser Gleichung auf beiden Seiten s und dividiert man danach durch 2, erhält man

$$s = \frac{p}{2}(u + \cosh u \cdot \sinh u) + s_0\ , \qquad \text{wobei} \quad x = \frac{p}{2}\sinh^2 u\,, \quad y = p\sinh u \quad \text{gilt.}$$

Schließlich berechnen wir das Differential des Anstiegswinkels $\alpha = \arctan k$ aus der bereits bekannten Formel $k = p/y$:

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}k}{1+k^2} = \frac{\dfrac{-p\mathrm{d}y}{y^2}}{1 + \dfrac{p^2}{y^2}} = \frac{-p}{y^2+p^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Die Krümmung der Parabel lautet daher:

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\dfrac{-p}{y^2+p^2}\,\mathrm{d}y}{\dfrac{1}{p}\sqrt{y^2+p^2}\,\mathrm{d}y} = \frac{-p^2}{\left(y^2+p^2\right)^{3/2}} \,.$$

Offenkundig ist κ an der Stelle $y = 0$, also im Ursprung $O = (0,0)$ am kleinsten. Daher ist dieser Punkt der Scheitel der Parabel und der Radius des Krümmungskreises im Scheitel beträgt $\left(p^2\right)^{3/2}/p^2 = p$. Der Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises ist offenkundig der Punkt $(p,0)$. Allgemein findet man den Mittelpunkt M des zum Parabelpunkt X gehörenden Krümmungskreises wegen

$$(\mathrm{d}X)_0^\perp = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}\begin{pmatrix} -\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \frac{p}{\sqrt{y^2+p^2}\,\mathrm{d}y}\begin{pmatrix} -\mathrm{d}y \\ (y/p)\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{y^2+p^2}}\begin{pmatrix} -p \\ y \end{pmatrix}$$

aufgrund der folgenden Rechnung:

$$M = X + \frac{1}{\kappa}(\mathrm{d}X)_0^\perp = (x,y) + \frac{\left(y^2+p^2\right)^{3/2}}{p^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2+p^2}}\begin{pmatrix} p \\ -y \end{pmatrix} = (x,y) + \left(\frac{y^2}{p^2}+1\right)\begin{pmatrix} p \\ -y \end{pmatrix} =$$

$$= \left(p + x + \frac{y^2}{p}, \frac{-y^3}{p^2}\right) = \left(p + \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2}{p}, \frac{-y^3}{p^2}\right) = (p,0) + \begin{pmatrix} 3y^2/2p \\ -y^3/p^2 \end{pmatrix} .$$

Führt man noch einmal $t = y/p$ als einen zu y diffeomorphen Parameter ein und vergisst man die bisherige Bedeutung von x und y als Koordinaten eines Parabelpunktes, erhält man die Kurve, welche die Krümmungskreismittelpunkte der Parabel trägt, in der Darstellung

$$\begin{cases} x = p + \dfrac{3p}{2}t^2 \\ y = -pt^3 \,. \end{cases}$$

Sie heißt *neilsche Parabel*, benannt nach dem im 17. Jahrhundert lebenden Mitbegründer der Royal Society William Neile. Bildet man einerseits $(x-p)^3$ und andererseits y^2 erkennt man, dass die parameterfreie Gleichung

$$(x-p)^3 = \frac{27p}{8}y^2$$

die obige neilsche Parabel beschreibt.

Die neilsche Parabel ist zur x-Achse symmetrisch und sie besitzt $(p,0)$ als linken Randpunkt. Weil bei ihr wegen

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = 3pt\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = -3pt^2\mathrm{d}t \end{cases}$$

beide Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ für $t = 0$ verschwinden, handelt es sich bei diesem Randpunkt um einen singulären Punkt. In der Tat sieht man ihn in Bild 1.6 als eine Spitze. Im Übrigen stimmt der Anstieg $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -t$ der neilschen Parabel mit dem entgegengesetzten Parameter überein: Wenn t das Intervall $]-\infty;\infty[$ von links nach rechts durchläuft, zieht sich die neilsche

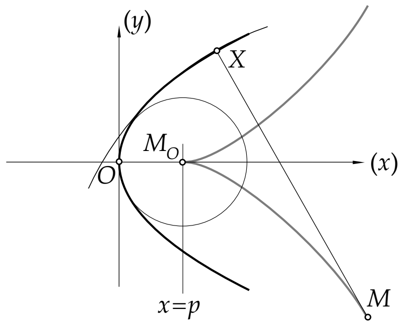


Bild 1.6 Parabel mit Scheitelkrümmungskreis, Krümmungskreis an einem Parabelpunkt und mit der neilschen Parabel als Trägerin der Mittelpunkte der Krümmungskreise

Parabel von oben steil herab, verliert an Anstieg bis sie in der Spitze $(p,0)$ abflacht, wonach sie zunehmend steil in die Tiefe sinkt.

In einem zweiten Beispiel betrachten wir die durch

$$\begin{cases} x = \varphi - \sin\varphi \\ y = 1 - \cos\varphi \end{cases}$$

gegebene Kurve. Sie heißt *Zykloide* und ist das Beispiel einer *Rollkurve*. Die griechischen Wörter kýklos und eidés bedeuten „Kreis" und „ähnlich". Das Bild 1.7 zeigt, wie die Kurve die Bahn eines Punktes am Rand eines Kreises vom Radius 1 verfolgt, wenn dieser Kreis entlang der x-Achse abrollt. In jenem Augenblick, da der Kreismittelpunkt die y-Achse bei $(0,1)$ durchläuft, fällt dabei dieser Punkt mit dem Ursprung zusammen. Natürlich ist hier wichtig, dass der Winkel φ im Bogenmaß gemessen wird. Die Zykloide ist periodisch mit Periode 2π. Es genügt daher, sie für Winkel φ mit $0 \le \varphi < 2\pi$ zu untersuchen. Es lauten die Differentiale der Zykloidenkoordinaten und das Differential ds der Bogenlänge folgendermaßen:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \left(1 - \cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi\,, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(1-\cos\varphi\right)^2 + \sin^2\varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \mathrm{d}\varphi\,.$$

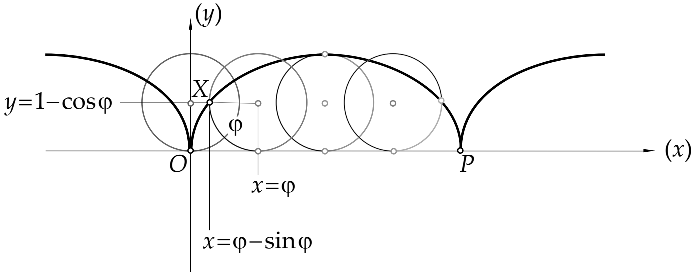


Bild 1.7 Zykloide mit dem Kreis, der entlang der x-Achse abrollt und dadurch die Kurve erzeugt

Index