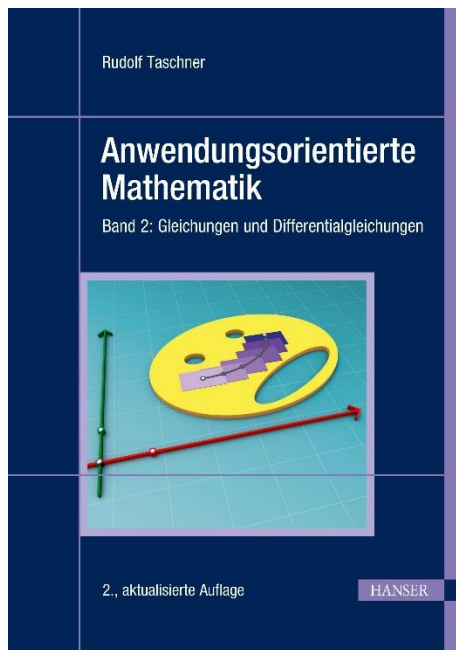


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Anwendungsorientierte Mathematik 2

von Rudolf Taschner

Print-ISBN: 978-3-446-47187-0

E-Book-ISBN: 978-3-446-47201-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446471870>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

Gleichungen und Differentialgleichungen, die das zentrale Thema des zweiten Bandes meines Lehrbuchs über Anwendungsorientierte Mathematik bilden, werden von der Differentialrechnung im Reellen und von der Differentialrechnung im Komplexen umrahmt. Nicht alle in diesem Band vorgestellten Details müssen beim ersten Durchlesen intensiv studiert werden. Auch bei der Vorlesung für Studentinnen und Studenten der Elektro- und Informationstechnik an der Technischen Universität Wien, die dem Buch zugrunde liegt, werden einige der hier ausführlich erörterten Abschnitte nur skizzenhaft präsentiert. So kann man ohne Schaden für das Kennenlernen der wichtigsten Erkenntnisse zum Beispiel die Abschnitte 2.5, 2.10, 4.4, 4.7, 5.3, 5.6 überspringen und für eine spätere und genauere Reflexion bewahren.

Die Ziele des Lehrbuchs werden in diesem Band konsequent weiter verfolgt: Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind.

Kenner der Materie werden wie beim ersten Band feststellen, dass die Anordnung des Lehrstoffs zuweilen ungewohnt ist. So werden *vor* den linearen die nichtlinearen Gleichungssysteme behandelt, der Existenz- und Eindeigkeitssatz findet nicht im fünften Kapitel über Differentialgleichungen, sondern schon viel früher seinen angemessenen Ort, die abstrakte lineare Algebra kommt erst dann zur Sprache, wenn man bereits genug über Determinanten und Matrizen Bescheid weiß. Ich scheute auch nicht davor zurück, den Integralsatz von Cauchy in seiner Homologie- und nicht in der üblichen Homotopieversion vorzustellen. Hier halte ich mich vor allem an das glänzende Lehrbuch „Complex Analysis“ von Lars Ahlfors. Ebenso übernahm ich den von Raymond Redheffer vorgeschlagenen Zugang zum Kurvenintegral, der keine rektifizierbaren Kurven voraussetzt, sondern just jene „Kurvenstücke“, die zu Beginn des ersten Kapitels definiert sind. All dies kommt der Ästhetik besonders entgegen, die der Differentialrechnung im Komplexen eigen ist und die jeder künftige Ingenieur – weiblich wie männlich – kennenlernen soll.

Bei der Differentialrechnung im Reellen werden Experten von der Aussage überrascht sein, dass die punktweise Konvergenz einer Folge von Funktionen, die über einem Kompaktum definiert (und stetig) sind, deren gleichmäßige Konvergenz nach sich zieht. Gewöhnlich benötigt man für Aussagen dieser Art zusätzliche Voraussetzungen, wie sie zum Beispiel Ulisse Dini formulierte. Wenn man allerdings das Kontinuum so sieht wie Luitzen Egbertus Jan Brouwer und Hermann Weyl – eine Betrachtungsweise, die bereits im ersten Band dieses Buches vermittelt wurde –, erweist sich die genannte Aussage als offenkundig wahr. Einige der bekannten scheinbaren Gegenbeispiele werden in der Übungsaufgabe 1.13 ausdrücklich genannt. Wer sich darüber genauer informieren will, mag zu meinem Buch „The Continuum“ greifen. In meinem

Aufsatz „The swap of integral and limit in constructive mathematics“ kommt darüber hinaus die am Ende von Abschnitt 1.9 angedeutete Vertauschbarkeit des Integrals mit dem punktwweisen Grenzwert von Funktionenfolgen zur Sprache.

Auch dieser Band wurde vom Carl Hanser Verlag unter professioneller Betreuung von Christine Fritsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegeben. Ihnen gebührt ein „merci cordialement“. Und auch bei diesem Band bitte ich, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler zu verzeihen.

Wiederholen möchte ich meinen innigen Dank an meine Frau Bianca und meine Kinder Laura und Alexander: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, Mai 2014

*Rudolf Taschner*

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Vorwort</b> .....                                  | <b>5</b>  |
| <b>1 Differenzieren im Reellen</b> .....              | <b>11</b> |
| 1.1 Ebene Kurven .....                                | 11        |
| 1.2 Parabel und Zykloide .....                        | 18        |
| 1.3 Weitere Kurvendiskussionen .....                  | 23        |
| 1.4 Extremwertberechnungen .....                      | 26        |
| 1.5 Unbestimmte Ausdrücke .....                       | 32        |
| 1.6 Asymptotische Berechnungen .....                  | 38        |
| 1.7 Taylorsches Polynom .....                         | 44        |
| 1.8 Gleichmäßige Konvergenz .....                     | 49        |
| 1.9 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit .....      | 55        |
| 1.10 Differentiation eines Integrals .....            | 59        |
| 1.11 Iterierte Integrale .....                        | 64        |
| 1.12 Übungsaufgaben .....                             | 68        |
| <b>2 Nichtlineare Gleichungen</b> .....               | <b>74</b> |
| 2.1 Halbierungs- und Newtonverfahren .....            | 74        |
| 2.2 Kontrahierende Abbildungen .....                  | 77        |
| 2.3 Gleichungen mit Parameter .....                   | 81        |
| 2.4 Gleichungen und Richtungsfelder .....             | 86        |
| 2.5 Existenz- und Eindeutigkeitssatz .....            | 91        |
| 2.6 Zwei Gleichungen mit mehreren Variablen .....     | 97        |
| 2.7 Determinanten .....                               | 102       |
| 2.8 Berechnung von Determinanten .....                | 108       |
| 2.9 Drei Gleichungen mit mehreren Variablen .....     | 114       |
| 2.10 Mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen ..... | 118       |
| 2.11 Struktur von Gleichungssystemen .....            | 122       |
| 2.12 Übungsaufgaben .....                             | 126       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>3</b> | <b>Lineare Gleichungen .....</b>                                  | <b>133</b> |
| 3.1      | Lineare Gleichungssysteme .....                                   | 133        |
| 3.2      | Eliminationsverfahren .....                                       | 137        |
| 3.3      | Lösungen linearer Gleichungssysteme .....                         | 142        |
| 3.4      | Matrizenrechnung.....   | 147        |
| 3.5      | Übungsaufgaben .....  | 152        |
| <b>4</b> | <b>Vektor- und Tensorrechnung.....</b>                            | <b>155</b> |
| 4.1      | Lineare Räume .....   | 155        |
| 4.2      | Lineare Funktionen .....  | 161        |
| 4.3      | Inhalt und Orientierung .....                                     | 165        |
| 4.4      | Keilprodukt von Vektoren .....                                    | 169        |
| 4.5      | Länge und Winkel .....  | 176        |
| 4.6      | Quadratische Formen in zwei Variablen .....                       | 182        |
| 4.7      | Quadratische Formen in mehreren Variablen .....                   | 187        |
| 4.8      | Übungsaufgaben .....  | 193        |
| <b>5</b> | <b>Differentialgleichungen .....</b>                              | <b>198</b> |
| 5.1      | Geburt der mathematischen Physik .....                            | 198        |
| 5.2      | Keplers Gesetze der Planetenbewegung.....                         | 205        |
| 5.3      | Geburt der Variationsrechnung .....                               | 212        |
| 5.4      | Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung .....              | 217        |
| 5.5      | Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.....              | 220        |
| 5.6      | Spezielle lineare Differentialgleichungen .....                   | 225        |
| 5.7      | Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten..... | 231        |
| 5.8      | Lineare Differentialgleichungssysteme.....                        | 234        |
| 5.9      | Gekoppelte Schwingungen.....                                      | 239        |
| 5.10     | Störglieder und Resonanz .....                                    | 242        |
| 5.11     | Resonanz bei gedämpfter Schwingung.....                           | 246        |
| 5.12     | Übungsaufgaben .....  | 249        |
| <b>6</b> | <b>Differenzieren im Komplexen .....</b>                          | <b>254</b> |
| 6.1      | Holomorphe Funktionen .....                                       | 254        |
| 6.2      | Harmonische Funktionen .....                                      | 258        |
| 6.3      | Integrale holomorpher Funktionen.....                             | 264        |
| 6.4      | Komplexer Logarithmus .....                                       | 268        |
| 6.5      | Einfach zusammenhängende Gebiete.....                             | 272        |
| 6.6      | Laurententwicklung holomorpher Funktionen .....                   | 279        |

|   |            |
|---|------------|
| 6.7 Mittelwerteigenschaft und Taylorentwicklung ..... | 284        |
| 6.8 Spezielle Taylorreihen.....                       | 288        |
| 6.9 Isolierte Singularitäten.....                     | 292        |
| 6.10 Residuen und Residuensatz.....                   | 296        |
| 6.11 Fourier-, Fresnel- und Mellinintegrale .....     | 299        |
| 6.12 Übungsaufgaben .....                             | 304        |
| <b>Index.....</b>                                     | <b>308</b> |



## ■ 1.1 Ebene Kurven

Die im Zeitalter des Barocks von Newton und Leibniz entdeckte Differentialrechnung stellte sich als schier unerschöpfliche Fundgrube mathematischer Erkenntnisse heraus. Die meisten der gewonnenen Einsichten waren für die damals in Entwicklung befindlichen Natur- und Ingenieurwissenschaften nicht bloß außerordentlich wertvoll, sie waren mehr als nur das: Die Differentialrechnung bildet das unverzichtbare Fundament, auf dem die exakten Wissenschaften in den auf das Barock folgenden Jahrhunderten ihre Erfolge aufbauen konnten. Es handelt sich um jene Erfolge, die den Weg der Gesellschaft in die Aufklärung und zur Moderne, in das technisch-naturwissenschaftlich geprägte Zeitalter, ebnete. Die Kapitel der beiden folgenden Bände berichten darüber.

Die Differentialrechnung erlaubt, den Begriff „Kurve“, insbesondere jenen der „Funktionskurve“, mathematisch exakt zu fassen: Wir betrachten ein offenes Intervall  $J$  auf der  $t$ -Achse. Eine *ebene Kurve* liegt vor, wenn mithilfe zweier stetiger Funktionen  $f_1 : J \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$  die Abhängigkeit  $x = x(t) = f_1(t)$ ,  $y = y(t) = f_2(t)$  der Koordinaten  $x, y$  des in der  $x$ - $y$ -Ebene variablen Punktes  $X = (x, y) = X(t)$  vom Parameter  $t$  beschrieben wird.

Die beiden einfachsten Beispiele ebener Kurven sind die Gerade und der Kreis. Wenn zwei verschiedene Punkte  $P = (p, q)$  und  $Q = (p + a, q + b)$  vorliegen, ist durch

$$\begin{cases} x = p + at \\ y = q + bt \end{cases}$$

die durch  $P$  und  $Q$  laufende Gerade gegeben, wenn der Parameter  $t$  die als  $t$ -Achse verstandene Skala  $\mathbb{R}$  durchläuft. Wenn ein Punkt  $M = (m, n)$  und eine positive Konstante  $r$  vorliegen, ist durch

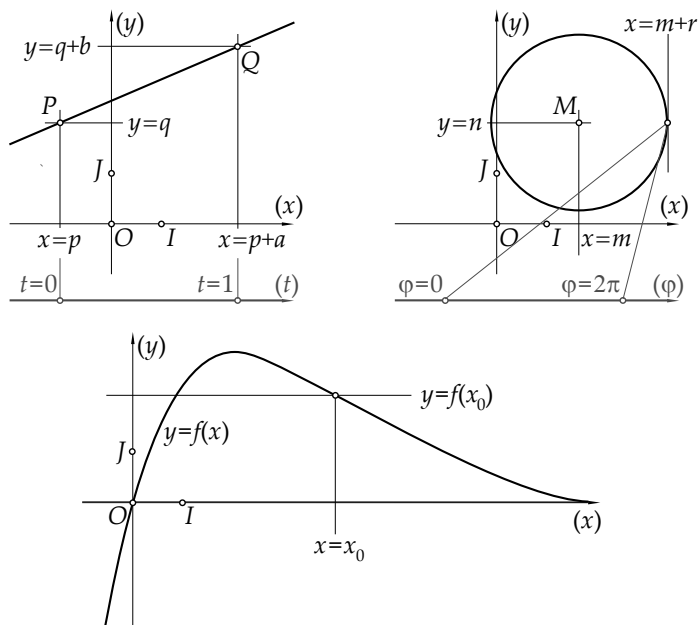
$$\begin{cases} x = m + r \cos \varphi \\ y = n + r \sin \varphi \end{cases}$$

der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  gegeben, wenn der Parameter  $\varphi$  die als  $\varphi$ -Achse verstandene Skala  $\mathbb{R}$  durchläuft. Eine weitere Beispielgruppe von Kurven sind die Funktionskurven: Es liegt eine im offenen Intervall  $J$  definierte und stetige Funktion  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  vor. Dann ist

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

eine etwas umständliche Beschreibung der Beziehung  $y = f(x)$ . Sie zeigt, dass man das Schaubild der Funktion  $f$  als ebene Kurve auffassen kann, wobei der Parameter  $x$  das Intervall  $J$  durchläuft.





**Bild 1.1** Beispiele dreier Kurven: oben links die Gerade durch die Punkte  $P$  und  $Q$ , oben rechts der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ , unten eine Funktionskurve

Ist durch

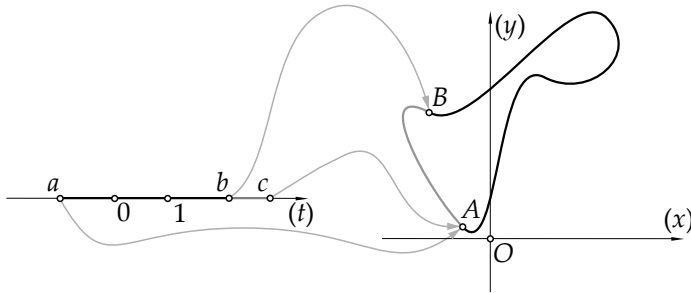
$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

eine ebene Kurve gegeben, wenn der Parameter  $t$  das offene Intervall  $J$  durchläuft, und bezeichnet  $[a; b]$  ein kompaktes Teilintervall von  $J$ , nennen wir die Gesamtheit aller Punkte dieser Kurve, bei denen  $t$  aus  $[a; b]$  entnommen ist, ein *Kurvenstück* dieser Kurve. Der Punkt  $A = (f_1(a), f_2(a))$  heißt der *Anfangspunkt* und der Punkt  $B = (f_1(b), f_2(b))$  heißt der *Endpunkt* dieses Kurvenstücks. Betrachtet man zum Beispiel bei der oben gegebenen Gerade das Kurvenstück, bei dem  $t$  das Intervall  $[0; 1]$  durchläuft, erhält man die Strecke mit  $P$  als Anfangs- und mit  $Q$  als Endpunkt. Betrachtet man beim oben gegebenen Kreis das Kurvenstück, bei dem  $\varphi$  das Intervall  $[\alpha; \beta]$  durchläuft, wobei  $\beta - \alpha \leq 2\pi$  ist, erhält man einen Kreisbogen. Dessen Anfangspunkt und dessen Endpunkt sind voneinander verschieden, wenn  $\beta - \alpha < 2\pi$  ist. Im Falle  $\beta - \alpha = 2\pi$  stimmen der Anfangs- und Endpunkt des Kreisbogens überein. Man sagt dazu, der Kreisbogen ist *geschlossen*. Benannt nach dem im 19. Jahrhundert an der Pariser École Polytechnique lehrenden Mathematiker und Ingenieur Camille Jordan heißt eine ebene Kurve

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

eine *Jordankurve*, wenn bei verschiedenen Parameterwerten die ihnen zugeordneten Kurvenpunkte stets voneinander verschieden sind. Sind zusätzlich die beiden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  an den Intervallgrenzen  $\alpha$  und  $\beta$  des Parameterintervalls  $J$  stetig und gilt  $f_1(\alpha) = f_1(\beta)$  sowie  $f_2(\alpha) = f_2(\beta)$ , spricht man von einer *geschlossenen Jordankurve*. Lässt man zum Beispiel beim

oben genannten Kreis im Bild 1.1 den Parameter  $\varphi$  nur das offene Intervall  $]-\pi; \pi[$  durchlaufen, beschreibt der so definierte Kreis eine geschlossene Jordankurve.



**Bild 1.2** Die Kurve mit  $]a; b[$  als Parameterintervall ist eine Jordankurve mit  $A$  als Anfangs- und  $B$  als Endpunkt. Die Kurve mit  $]a; c[$  als Parameterintervall ist eine geschlossene Jordankurve.

Wenn bei einer ebenen Kurve

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

die beiden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  stetig differenzierbar sind, sprechen wir von einer *glatten* Kurve. Denn dann kann man jedem Kurvenpunkt  $X = (x, y)$  einen *Tangentenvektor*

$$dX = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} dt$$

zuweisen. Newton deutete den Parameter  $t$  als Zeit – daher auch die Bezeichnung. Denn das englische Wort für Zeit ist „time“, das lateinische Wort für Zeit ist „tempus“, und beide Wörter beginnen mit dem Buchstaben t. Newton sah den Kurvenpunkt  $X = (x, y)$  als Ort eines sich entlang der Kurve bewegendem punktförmigen Körpers: Zum Zeitpunkt  $t$  nimmt er die Position  $X(t) = (x(t), y(t))$  ein. Das Verhältnis des Tangentenvektors  $dX$  zum Zeitdifferential  $dt$  nennt Newton den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Newton selbst kannte die Bezeichnung von Leibniz nicht. Er sprach auch nicht von Differentialen, sondern er kürzte die Differentiation nach dem Zeitparameter  $t$  mit einem hochgestellten Punkt ab. Statt der obigen Formel schrieb er

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}$$

und sprach bei  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  von den *Fluxionen* der *Fluents*  $x, y$ . Denn das lateinische flux ist der „Fluss“ und fluere bedeutet „fließen“. Dies ist die einzige der von Newton erfundenen Bezeichnungen, die wir übernehmen: den hochgestellten Punkt als Abkürzung für den Quotienten des Differentials der genannten Variable durch das Differential des immer mit  $t$  bezeichneten Parameters. Wenn der Parameter der Kurve mit einem anderen Symbol als  $t$  bezeichnet wird, halten wir uns strikt an die Bezeichnungsweise von Leibniz.

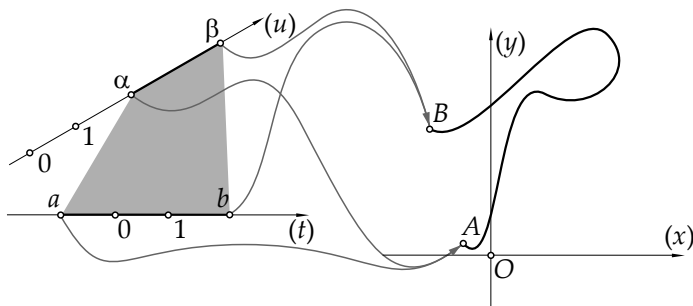
Ob eine Kurve schnell oder langsam durchlaufen wird, spielt für ihr geometrisches Erscheinungsbild keine Rolle. Wir unterscheiden daher zwischen der *Kinematik* der Kurve, bei der wir – dem griechischen *kínein* zufolge, das „bewegen“ bedeutet – die Bewegung des Körpers entlang der Kurve im Sinne Newtons untersuchen, und der *Geometrie* der Kurve, bei der allein das Bild der Kurve zur Diskussion steht. Gehen wir allein vom geometrischen Bild aus, sind Kurven auch dann einander gleich, wenn sie verschiedenartig durchlaufen werden. Fassen wir dies genauer: Wenn zwei offene Intervalle  $I$  und  $J$  vorliegen,  $I$  als Teil der  $u$ -Achse und  $J$  als Teil der  $t$ -Achse, und wenn eine stetige und streng monoton wachsende Funktion  $h: I \rightarrow J$  zusammen mit ihrer ebenfalls stetigen und streng monoton wachsenden Umkehrfunktion  $H: J \rightarrow I$  die Variablen  $u$  und  $t$  gemäß  $t = h(u)$  und  $u = H(t)$  ineinander überführen, unterscheiden wir geometrisch nicht zwischen den beiden Kurven

$$\begin{cases} x = x(t) = f_1(t) \\ y = y(t) = f_2(t) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = x(u) = f_1(h(u)) \\ y = y(u) = f_2(h(u)) \end{cases},$$

wobei links  $t$  das Intervall  $J$  und rechts  $u$  das Intervall  $I$  durchlaufen. Das streng monotone Wachsen der Funktionen  $h$  und  $H$  verlangen wir, damit bei Kurvenstücken Anfangs- und Endpunkte als solche erhalten bleiben und nicht vertauscht werden. Kürzen wir die verketteten Funktionen  $f_1 \circ h$  und  $f_2 \circ h$  mit  $g_1 = f_1 \circ h$  und  $g_2 = f_2 \circ h$  ab, besagt die obige Formelzeile, dass wir geometrisch nicht zwischen den beiden Kurven

$$\begin{cases} x = x(u) = g_1(u) \\ y = y(u) = g_2(u) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = x(t) = g_1(H(t)) \\ y = y(t) = g_2(H(t)) \end{cases}$$

unterscheiden, wobei links  $u$  das Intervall  $I$  und rechts  $t$  das Intervall  $J$  durchlaufen. Damit ist die Symmetrie dieses Begriffs der Gleichheit von Kurven dokumentiert. Die Abbildung  $t = h(u)$  beziehungsweise ihre Umkehrung  $u = H(t)$ , die wechselseitig  $I$  und  $J$  ineinander überführen, nennt man einen *Homöomorphismus* zwischen diesen beiden Intervallen. Das griechische *hómoios* heißt „gleichwertig“ und *morphé* ist die „Form“. Sind – was wir in Zukunft meist voraussetzen – die beiden Funktionen  $h$  und  $H$  außerdem stetig differenzierbar, spricht man von einem *Diffeomorphismus*. Dies ist ein dem Wort Homöomorphismus nachgebildetes Kunstwort, in dem das „Diffeo-“ auf die Differenzierbarkeit hinweisen soll.



**Bild 1.3** Zwischen den beiden Intervallen  $[a; b]$  und  $[\alpha; \beta]$  besteht ein Diffeomorphismus, der durch die graue Fläche symbolisiert wird. Beide Intervalle dienen für die gleiche Kurve als Parameterintervalle.

Ein einfaches Beispiel stellt der von  $P = (p, q)$  ausgehende und durch  $Q = (p + a, q + b)$  verlaufende Strahl dar, der durch

$$\begin{cases} x = x(u) = p + au \\ y = y(u) = q + bu \end{cases}$$

beschrieben wird, wenn  $u$  die positive reelle Achse  $\mathbb{R}^+ = ]0; \infty[$  durchläuft. Mit der Festlegung  $t = \ln u$ , die das Gleiche wie  $u = e^t$  besagt, ist ein Diffeomorphismus zwischen der positiven  $u$ -Achse  $\mathbb{R}^+$  und der reellen  $t$ -Achse  $\mathbb{R}$  gegeben. Darum liegt geometrisch der gleiche Strahl vor, wenn er durch

$$\begin{cases} x = x(t) = p + ae^t \\ y = y(t) = q + be^t \end{cases}$$

beschrieben wird, wobei  $t$  ganz  $\mathbb{R}$  durchläuft.

Ein zweites Beispiel ist die durch

$$\begin{cases} x = m + r \cos \omega t \\ y = n + r \sin \omega t \end{cases}$$

gegebene Kreislinie mit  $M = (m, n)$  als Mittelpunkt und mit Radius  $r$ , bei dem  $\omega$  eine positive Konstante bezeichnet und der Parameter  $t$  die Skala  $\mathbb{R}$  durchläuft. Der Diffeomorphismus  $\varphi = \omega t$  zeigt, dass es sich geometrisch um den gleichen Kreis handelt wie jener, der oben beschrieben wurde. Deutet man  $t$  als Zeit, lautet hier der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dieser besitzt als Betrag  $r\omega$ . Den Faktor  $\omega$  des Radius  $r$  nennt man die *Winkelgeschwindigkeit*: Sobald  $t$  ein Intervall der Länge  $2\pi/\omega$  durchlaufen hat, wurde der Kreis vom Körper einmal umrundet. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist allerdings von der Größe der Winkelgeschwindigkeit unabhängig.

Ist durch  $X = (x, y) = (x(t), y(t))$  eine glatte Kurve gegeben, lauten

$$dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt, \quad dX = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} dt.$$

Die Länge des Tangentenvektors  $dX$  bezeichnen wir mit

$$ds = \|\dot{X}\| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Den Faktor  $dt$  heben wir deshalb aus der Wurzel heraus, weil wir stets von einer „wachsenden Zeit“  $t$ , also von  $dt > 0$  ausgehen wollen. Man nennt  $ds = \|dX\|$  das *Differential der Bogenlänge* der Kurve und das unbestimmte Integral

$$s = \int ds = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

die *Bogenlänge* der Kurve. Wenn der Parameter  $t$  seinerseits diffeomorph gemäß  $t = t(u)$  von einem anderen Parameter  $u$  abhängt, kann man diese Substitution im Integral durchführen

und erhält statt der von  $t$  abhängigen Bogenlänge  $s = s(t)$  nun die gleiche, jetzt aber von  $u$  abhängige Bogenlänge  $s = s(u)$ .

Bei der durch

$$\begin{cases} x = p + at \\ y = q + bt \end{cases}$$

gegebenen Geraden lauten  $\dot{x} = a$  und  $\dot{y} = b$ . Folglich errechnet sich deren Bogenlänge als  $s = s(t) = t\sqrt{a^2 + b^2} + s_0$  mit der Integrationskonstante  $s_0$ . Betrachten wir die von  $P = (p, q)$  zu  $Q = (p + a, q + b)$  führende Strecke, entspricht diese jenem „Geradenstück“, bei dem der Parameter  $t$  das Intervall  $[0; 1]$  durchläuft. Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 ds = \sqrt{a^2 + b^2}$$

teilt uns die Länge dieser Strecke mit. Allgemein sei ein Kurvenstück einer glatten Kurve dadurch gegeben, dass der Kurvenparameter  $t$  das Teilintervall  $[a; b]$  des offenen Intervalls  $J$  durchläuft. Dann definiert das Integral

$$L = \int_a^b ds = s|_{t=b} - s|_{t=a}$$

die *Länge* dieses Kurvenstücks. Betrachten wir als Beispiel den durch

$$\begin{cases} x = m + r \cos \varphi \\ y = n + r \sin \varphi \end{cases}$$

gegebenen Kreis: Hier lauten  $dx = -r \sin \varphi \cdot d\varphi$ ,  $dy = r \cos \varphi \cdot d\varphi$ , also  $ds = r d\varphi$ . Darum ist  $s = r\varphi + s_0$  mit einer Integrationskonstante  $s_0$ . Lassen wir bei zwei Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$  den Winkel  $\varphi$  nur das Intervall  $[\alpha; \beta]$  durchlaufen, verbleibt vom Kreis als Kurvenstück ein Kreisbogen der Länge  $r(\beta - \alpha)$ . Der gleiche Wert ergibt sich natürlich, wenn man den Kreis mit der Zeit  $t$  gemäß  $\varphi = \omega t$  parametrisiert. Hier lautet die Bogenlänge  $s = r\omega t + s_0$  und man hat zu beachten, dass bei diesem Diffeomorphismus dem Intervall  $[\alpha; \beta]$  auf der  $\varphi$ -Achse das Intervall  $[\alpha/\omega; \beta/\omega]$  auf der  $t$ -Achse entspricht.

Wenn bei einer durch  $X = X(t) = (x, y)$  gegebenen glatten Kurve der Tangentenvektor  $dX$  vom Nullvektor verschieden ist, definiert man ihren *Tangenteneinheitsvektor* als

$$(dX)_0 = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

und ihren *Normaleneinheitsvektor* als

$$(dX)_0^\perp = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

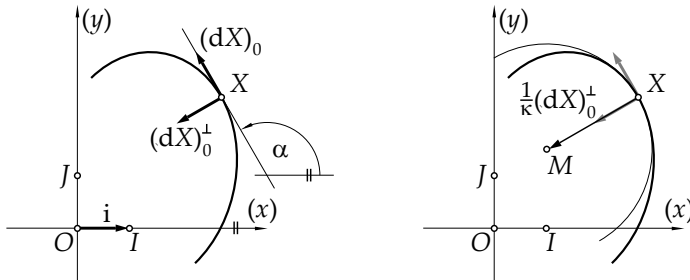
Diese beiden Vektoren sind offenkundig allein durch die Geometrie der Kurve bestimmt und hängen nicht von der Wahl der Parametrisierung ab. Nur bei Kurvenpunkten mit  $dX = 0$  existieren sie nicht. Man nennt derartige Kurvenpunkte *singulär*. Wir wollen sie im Folgenden von der Betrachtung ausschließen. Im Falle  $dx \neq 0$  kann man den Tangentenanstieg  $k = dy/dx$  berechnen, und im Falle  $dy \neq 0$  kann man den Normalenanstieg  $k_\perp = -dx/dy$  berechnen.

Kurvenpunkte mit  $k = 0$  besitzen waagrechte Tangenten. Sie allein kommen als *Hoch-* oder *Tiefpunkte* der Kurve infrage, also als jene Kurvenpunkte, deren  $y$ -Koordinate einen maximalen oder minimalen Wert annimmt. Kurvenpunkte mit  $k_{\perp} = 0$  besitzen senkrechte Tangenten. Sie allein kommen als *linke* oder *rechte Randpunkte* der Kurve infrage, also jene Kurvenpunkte, deren  $x$ -Koordinate einen minimalen oder maximalen Wert annimmt. Der vom Vektor  $\mathbf{i}$ , dem Einheitsvektor in Richtung der  $x$ -Achse, und vom Vektor  $d\mathbf{X}$  aufgespannte Winkel  $\alpha$  heißt der *Anstiegswinkel* der Kurve. Offenkundig gilt:

$$k = \tan \alpha \quad \text{und} \quad k_{\perp} = \tan \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right).$$

Falls  $\alpha = \alpha(t)$  stetig differenzierbar von  $t$  abhängt, erhält man  $dk = (1 + k^2) d\alpha$  und daher

$$d\alpha = \frac{dk}{1+k^2} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} = \frac{\dot{x}d\dot{y} - \dot{y}d\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$



**Bild 1.4** Links eine Kurve mit Tangenteneinheitsvektor, Normaleneinheitsvektor und Anstiegswinkel; rechts die Kurve mit dem Krümmungskreis und dessen Mittelpunkt

Die von der Parametrisierung unabhängige Größe

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$$

heißt die *Krümmung* der Kurve. Anhand des Kreises erkennt man, was dieser Begriff bedeutet: Geht man von

$$\begin{cases} x = m + r \cos \omega t \\ y = n + r \sin \omega t \end{cases}$$

aus, errechnen sich  $\dot{x} = -r\omega \sin \omega t$ ,  $\dot{y} = r\omega \cos \omega t$ , ferner  $\ddot{x} = -r\omega^2 \cos \omega t$ ,  $\ddot{y} = -r\omega^2 \sin \omega t$  und  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\omega^2$ . Folglich ist

$$d\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -r\omega \sin \omega t & r\omega \cos \omega t \\ -r\omega^2 \cos \omega t & -r\omega^2 \sin \omega t \end{vmatrix}}{r^2\omega^2} dt = \frac{r^2\omega^3 dt}{r^2\omega^2} = \omega dt.$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch  $ds = r\omega dt$ , verbleibt die Krümmung  $\kappa = 1/r$ . Wenn die Krümmung einer Kurve von Null verschieden ist, nennt man daher den Betrag ihres Kehrwertes den *Krümmungsradius* der Kurve.

Jener Punkt  $M$ , den man gemäß der Formel

$$M = X + \frac{1}{\kappa} (dX)_0^\perp$$

erhält, ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Krümmungsradius als Radius, der im Kurvenpunkt  $X$  nicht nur die gleiche Tangente, sondern auch die gleiche Krümmung wie die Kurve besitzt. Man nennt diesen Kreis den *Krümmungskreis* der Kurve. Kurvenpunkte mit maximalem beziehungsweise mit minimalem Krümmungsradius nennt man *Scheitel* oder *Scheitelpunkte* der Kurve. Kurvenpunkte, bei denen die Krümmung verschwindet, besitzen keinen Krümmungskreis. Bei ihnen schmiegt sich die Tangente besonders gut an die Kurve, und daher nennen wir diese Punkte *Tangentenschmiegepunkte*. Je nachdem, ob die Tangente im Tangentenschmiegepunkt die Kurve durchsetzt oder aber (jedenfalls in der Nähe des Tangentenschmiegepunktes) begrenzt, nennt man den Tangentenschmiegepunkt einen *Wendepunkt* oder einen *Flachpunkt* der Kurve.

## ■ 1.2 Parabel und Zykloide

Als erstes Beispiel betrachten wir die bei einem konstanten positiven  $p$  durch

$$y^2 = 2px$$

beschriebene Kurve, die den Namen *Parabel* trägt. Apollonius von Perge hat sie so genannt, weil der Flächeninhalt des Rechtecks mit  $x$  als Breite und  $2p$  als Höhe mit jenem des Quadrats mit  $y$  als Seitenlänge übereinstimmt. Denn das griechische *parabolé*, wörtlich „das daneben Gehende“ steht für den „Vergleich“ und das „Gleichnis“; *parabállein* heißt „nebeneinander stellen“. Setzt man die Variable  $y$  als Kurvenparameter fest, errechnet sich  $x$  als  $x = y^2/2p$ . Ausführlich angeschrieben besitzt daher die Parabel die Parameterdarstellung

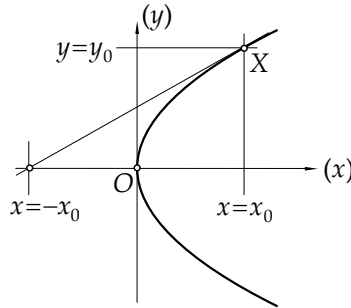
$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{2p} \\ y = y, \end{cases}$$

wobei  $y$  die  $y$ -Achse  $\mathbb{R}$  durchläuft. Offenkundig ändert sich  $x = x(y)$  nicht, wenn man  $y$  durch  $-y$  ersetzt. Die Parabel ist folglich zur  $x$ -Achse symmetrisch. Und weil bei  $y \neq 0$  die Variable  $x$  positiv ist, erweist sich der Ursprung  $O = (0, 0)$  als linker Randpunkt der Parabel. Tatsächlich ergibt die Differentiation von  $y^2 = 2px$  die Differentialgleichung  $2ydy = 2pdx$ , vereinfacht:  $ydy = pdx$ . Darum errechnet sich für Parabelpunkte  $(x, y)$ , die vom Ursprung verschieden sind, der Parabelanstieg als  $k = dy/dx = p/y$ . Greift man einen vom Ursprung verschiedenen Parabelpunkt  $(x_0, y_0)$  heraus, besitzt in ihm die Tangente den Anstieg  $k_0 = p/y_0$  und die Geradengleichung der Tangente kann als

$$y = \frac{p}{y_0}x + c$$

angesetzt werden. Die Konstante  $c$  gewinnt man, indem man für  $x$  und  $y$  die Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  des Punktes einsetzt: Aus  $y_0^2 = px_0 + cy_0$  und der Tatsache, dass  $(x_0, y_0)$  auf der Parabel

liegt, also  $y_0^2 = 2px_0$  zutrifft, erhält man  $cy_0 = px_0$ . Folglich lautet die Gleichung der Parabeltangente durch den Parabelpunkt  $(x_0, y_0)$  so:  $y_0 y = p(x + x_0)$ . Die Tatsache, dass diese Tangente die  $x$ -Achse an der Stelle  $(-x_0, 0)$  schneidet, erlaubt eine sehr schnell durchzuführende Tangentenkonstruktion.



**Bild 1.5** Parabel mit Tangente an einem Parabelpunkt

Das Differential der Bogenlänge  $s$  der Parabel errechnet sich als

$$ds = \sqrt{\frac{y^2}{p^2} + 1} \cdot dy.$$

Führen wir  $t = t(y) = y/p$  als neuen, zu  $y$  diffeomorphen Parameter ein, erspart man sich unter der Wurzel den Bruch und bekommt wegen  $dy = p dt$  für das Differential der Bogenlänge  $ds = p\sqrt{t^2 + 1} dt$ . Um hieraus die Bogenlänge selbst berechnen zu können, führen wir als zu  $t$  diffeomorphen Parameter nun  $u = u(t) = \operatorname{arsinh} t$  ein. Denn bei  $t = t(u) = \sinh u$  gilt  $t^2 + 1 = \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$ , und die Wurzel davon lautet einfach nur  $\cosh u$ . Allerdings ist  $dt = d(\sinh u) = \cosh u \cdot du$  zu bedenken, sodass sich die Bogenlänge aus einer partiellen Integration folgendermaßen errechnet:

$$\begin{aligned} s &= p \int \sqrt{t^2 + 1} dt = p \int \cosh^2 u \cdot du = p \int \cosh u \cdot d(\sinh u) = \\ &= p \cosh u \cdot \sinh u - p \int \sinh u \cdot d(\cosh u) = p \cosh u \cdot \sinh u - p \int \sinh^2 u \cdot du = \\ &= p \cosh u \cdot \sinh u + p \int (1 - \cosh^2 u) du = p \cosh u \cdot \sinh u + pu - p \int \cosh^2 u du = \\ &= p \cosh u \cdot \sinh u + pu - (s - 2s_0), \end{aligned}$$

wobei  $-2s_0$  für die Integrationskonstante steht. Addiert man nämlich in dieser Gleichung auf beiden Seiten  $s$  und dividiert man danach durch 2, erhält man

$$s = \frac{p}{2} (u + \cosh u \cdot \sinh u) + s_0, \quad \text{wobei} \quad x = \frac{p}{2} \sinh^2 u, \quad y = p \sinh u \quad \text{gilt.}$$

Schließlich berechnen wir das Differential des Anstiegswinkels  $\alpha = \arctan k$  aus der bereits bekannten Formel  $k = p/y$ :

$$d\alpha = \frac{dk}{1+k^2} = \frac{\frac{-pdy}{y^2}}{1+\frac{p^2}{y^2}} = \frac{-p}{y^2+p^2} dy.$$



Die Krümmung der Parabel lautet daher:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{-p}{y^2 + p^2} dy}{\frac{1}{p} \sqrt{y^2 + p^2} dy} = \frac{-p^2}{(y^2 + p^2)^{3/2}}.$$

Offenkundig ist  $\kappa$  an der Stelle  $y = 0$ , also im Ursprung  $O = (0, 0)$  am kleinsten. Daher ist dieser Punkt der Scheitel der Parabel und der Radius des Krümmungskreises im Scheitel beträgt  $(p^2)^{3/2}/p^2 = p$ . Der Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises ist offenkundig der Punkt  $(p, 0)$ . Allgemein findet man den Mittelpunkt  $M$  des zum Parabelpunkt  $X$  gehörenden Krümmungskreises wegen

$$(dX)_0^\perp = \frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix} = \frac{p}{\sqrt{y^2 + p^2}} \frac{1}{dy} \begin{pmatrix} -dy \\ (y/p) dy \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + p^2}} \begin{pmatrix} -p \\ y \end{pmatrix}$$

aufgrund der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} M &= X + \frac{1}{\kappa} (dX)_0^\perp = (x, y) + \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + p^2}} \begin{pmatrix} p \\ -y \end{pmatrix} = (x, y) + \left( \frac{y^2}{p^2} + 1 \right) \begin{pmatrix} p \\ -y \end{pmatrix} \\ &= \left( p + x + \frac{y^2}{p}, \frac{-y^3}{p^2} \right) = \left( p + \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2}{p}, \frac{-y^3}{p^2} \right) = (p, 0) + \begin{pmatrix} 3y^2/2p \\ -y^3/p^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Führt man noch einmal  $t = y/p$  als einen zu  $y$  diffeomorphen Parameter ein und vergisst man die bisherige Bedeutung von  $x$  und  $y$  als Koordinaten eines Parabelpunktes, erhält man die Kurve, welche die Krümmungskreismittelpunkte der Parabel trägt, in der Darstellung

$$\begin{cases} x = p + \frac{3p}{2} t^2 \\ y = -pt^3. \end{cases}$$

Sie heißt *neilsche Parabel*, benannt nach dem im 17. Jahrhundert lebenden Mitbegründer der Royal Society William Neile. Bildet man einerseits  $(x - p)^3$  und andererseits  $y^2$  erkennt man, dass die parameterfreie Gleichung

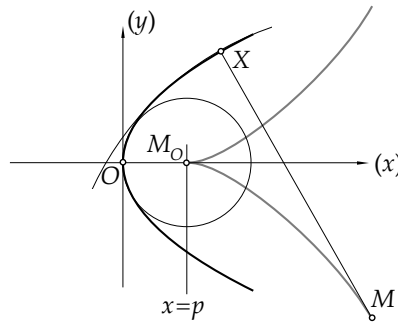
$$(x - p)^3 = \frac{27p}{8} y^2$$

die obige neilsche Parabel beschreibt.

Die neilsche Parabel ist zur  $x$ -Achse symmetrisch und sie besitzt  $(p, 0)$  als linken Randpunkt. Weil bei ihr wegen

$$\begin{cases} dx = 3pt dt \\ dy = -3pt^2 dt \end{cases}$$

beide Differentiale  $dx$  und  $dy$  für  $t = 0$  verschwinden, handelt es sich bei diesem Randpunkt um einen singulären Punkt. In der Tat sieht man ihn in Bild 1.6 als eine Spitze. Im Übrigen stimmt der Anstieg  $dy/dx = -t$  der neilschen Parabel mit dem entgegengesetzten Parameter überein: Wenn  $t$  das Intervall  $]-\infty; \infty[$  von links nach rechts durchläuft, zieht sich die neilsche



**Bild 1.6** Parabel mit Scheitelkrümmungskreis, Krümmungskreis an einem Parabelpunkt und mit der neilschen Parabel als Trägerin der Mittelpunkte der Krümmungskreise

Parabel von oben steil herab, verliert an Anstieg bis sie in der Spitze  $(p, 0)$  abflacht, wonach sie zunehmend steil in die Tiefe sinkt.

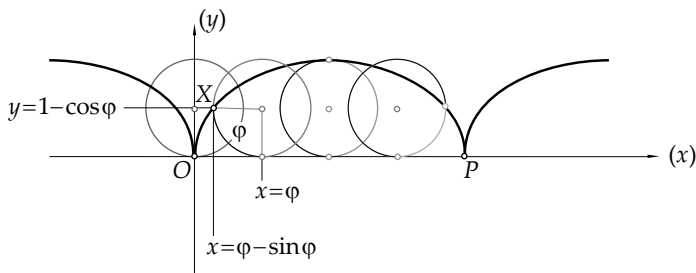
In einem zweiten Beispiel betrachten wir die durch

$$\begin{cases} x = \varphi - \sin \varphi \\ y = 1 - \cos \varphi \end{cases}$$

gegebene Kurve. Sie heißt *Zykloide* und ist das Beispiel einer *Rollkurve*. Die griechischen Wörter *kýklos* und *eidés* bedeuten „Kreis“ und „ähnlich“. Das Bild 1.7 zeigt, wie die Kurve die Bahn eines Punktes am Rand eines Kreises vom Radius 1 verfolgt, wenn dieser Kreis entlang der  $x$ -Achse abrollt. In jenem Augenblick, da der Kreismittelpunkt die  $y$ -Achse bei  $(0, 1)$  durchläuft, fällt dabei dieser Punkt mit dem Ursprung zusammen. Natürlich ist hier wichtig, dass der Winkel  $\varphi$  im Bogenmaß gemessen wird. Die Zykloide ist periodisch mit Periode  $2\pi$ . Es genügt daher, sie für Winkel  $\varphi$  mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$  zu untersuchen. Es lauten die Differentiale der Zykloidenkoordinaten und das Differential  $ds$  der Bogenlänge folgendermaßen:

$$\begin{cases} dx = (1 - \cos \varphi) d\varphi \\ dy = \sin \varphi \cdot d\varphi, \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \cdot d\varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi.$$



**Bild 1.7** Zykloide mit dem Kreis, der entlang der  $x$ -Achse abrollt und dadurch die Kurve erzeugt

# Index

- Abbildung, gebrochen lineare, 306  
Abbildung, kontrahierende, 78  
Abel, Niels Henrik, 106  
Abschätzung, cauchysche, 287  
absolute Zeit, 199  
absoluter Raum, 199  
Abstand, 78  
allgemeine Lösung, 146, 220  
allgemeine lineare Gruppe, 152  
alternierende Gruppe, 107  
Amplitude, 204  
analytisch, 255  
Anfangsbedingung, 86  
Anfangspunkt, 12, 273  
Anordnung, gerade, 103  
Anordnung, ungerade, 103  
Anstiegswinkel, 17  
antikommutatives Rechengesetz, 166, 169  
Aphel, 210  
Apollonius von Perge, 18, 206  
Approximation, quadratische, 45  
Archimedes, 206  
Arcussinusreihe, 291  
Arcustangensreihe, 291  
Aristarch von Samos, 206  
Aristoteles, 198  
assoziatives Rechengesetz, 170, 174  
Asymptote, 35  
Ausdruck, unbestimmter, 32, 33  
Axiom, erstes newtonsches, 200  
Axiom, zweites newtonsches, 200  
  
babylonisches Wurzelziehen, 74  
Banach, Stefan, 78  
Basis, 156  
Bernoulli, Daniel, 227  
Bernoulli, Jakob, 213–219  
Bernoulli, Johann, 32, 34, 212, 213, 217, 227  
bernoullische Differentialgleichung, 249  
  
Beschleunigungsfeld, 200  
beschränkte Funktion, 287  
Bessel, Friedrich Wilhelm, 227  
Besselfunktion, 227  
besselsche Differentialgleichung, 226  
Beziehung, asymptotische, 35  
Bilinearform, 188  
Binomialkoeffizient, 289  
binomische Formel, 289  
binomische Funktion, 288  
binomische Reihe, 289  
Bivektor, 169  
Bogenlänge, 15  
Bolzano, Bernard, 130  
Brachistochrone, 212  
de Brahe, Tycho, 205  
Bremsbeschleunigung, 201  
Brennpunkt, 206  
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 54  
  
Casorati, Felice, 295  
Cauchy, Augustin Louis, 279  
Cauchy, Louis-Augustin, 180, 255, 256, 266, 281–285, 287, 290, 296, 297, 305, 314  
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung, 259  
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 176  
cauchysche Abschätzung, 287  
cauchysche Integralformel, 282  
cauchyscher Integralsatz, 279  
Cayley, Arthur, 126, 137, 138, 148  
charakteristische Gleichung, 186, 189, 231  
du Châtelet, Émilie, 203, 204, 212, 215, 232, 239  
Cramer, Gabriel, 102, 168  
cramersche Regel, 168  
  
Dämpfung, 246  
Determinante, 102, 186, 189  
diagonalisieren, 190

- Diagonalmatrix, 142, 190  
 Diffeomorphismus, 14  
 Differential der Bogenlänge, 15  
 Differentialgleichung, 86  
 Differentialgleichung, bernoullische, 249  
 Differentialgleichung, besselsche, 226  
 Differentialgleichung, Cauchy-Riemannsche, 259  
 Differentialgleichung, eulersche, 251  
 Differentialgleichung, homogene lineare, 219  
 Differentialgleichung, hypergeometrische, 227  
 Differentialgleichung, inhomogene lineare, 219  
 Differentialgleichung, laplacesche, 259  
 Differentialgleichung, legendresche, 229  
 Differentialgleichung, lineare, 217, 221  
 Differentialgleichung, riccatische, 250  
 Differentialgleichung, vom Typ der trennbaren Variablen, 127  
 Differentialgleichungen, entkoppelte, 241  
 Differentialgleichungssystem, lineares, 234  
 Differentialoperator, 221  
 Differentiationsregel eines Parameterintegrals, 60  
 Dilatation, 306  
 Dimension, 155  
 distributives Rechengesetz, 170, 175  
 Drehung, 163  
 Dreiecksungleichung, 78  
  
 ebene Kurve, 11  
 Eigenfrequenz, 245  
 Eigenvektor, 184, 188  
 Eigenwert, 184, 188  
 Eigenwertgleichung, 186, 189, 238  
 eindimensionale Zelle, 273  
 einfach zusammenhängend, 272  
 Einheitsmatrix, 150  
 Einheitsvektor, 176  
 Eliminationsverfahren, 137  
 Ellipse, 206  
 Endpunkt, 12, 273  
 entgegengesetzter Vektor, 155  
 entkoppelte Differentialgleichungen, 241  
 Entwicklungspunkt, 285  
 Entwicklungssatz von Laplace, 113, 175  
  
 Erdbeschleunigung, 201  
 Erregerfrequenz, 245  
 erstes newtonsches Axiom, 200  
 erweiterte Koeffizientenmatrix, 139  
 euklidisch, 176  
 Euler, Leonhard, 64, 215, 227, 251  
 euler-poissonsches Integral, 64  
 eulersche Differentialgleichung, 251  
 eulersche Formel, 232  
 eulersche Gleichung, 215  
 Existenz- und Eindeutigkeitssatz, 93  
 explizite Funktion, 85  
 Extremale, 214  
  
 Faktorielle, 38  
 Fakultät, 38  
 Fehlerintegral, 64  
 Fehlstand, 104, 172  
 de Fermat, Pierre, 213  
 Fixpunkt, 78  
 Fixpunktgleichung, 78  
 Flächeninhalt, orientierter, 165  
 Flachpunkt, 18  
 Fluente, 13  
 Fluxion, 13  
 Formel, binomische, 289  
 Formel, eulersche, 232  
 Fourier, Joseph, 301  
 Fourierintegral, 301  
 freier Fall, 200  
 Frequenz, 204  
 Fresnel, Augustin Jean, 301  
 Fresnelintegral, 301  
 Fundamentalgröße, metrische, 177  
 Fundamentalmatrix, metrische, 177  
 Fundamentalsatz der Algebra, 131, 287  
 Fundamentalsystem, 223  
 Funktion, analytische, 255  
 Funktion, beschränkte, 287  
 Funktion, binomische, 288  
 Funktion, explizite, 85  
 Funktion, ganze, 287  
 Funktion, harmonische, 259  
 Funktion, holomorphe, 255  
 Funktion, implizite, 85  
 Funktion, konforme, 256  
 Funktion, lineare, 161

- Funktionalgleichung des Arcustangens, 42  
Funktionskurve, 11
- Galilei, Galileo, 23, 198, 200, 212  
Galois, Évariste, 106  
ganze Funktion, 287  
Gauß, Carl Friedrich, 64, 137, 139–141, 144, 227, 229, 255  
gaußsches Fehlerintegral, 64  
gebrochen lineare Abbildung, 306  
genaue Dimension, 155  
gerade Anordnung, 103  
gerade Permutation, 107  
geschlossene Jordankurve, 12  
geschlossene Kette, 276  
geschlossene Kurve, 12  
Geschwindigkeitsvektor, 13  
glatte Kurve, 13  
gleichmäßige Konvergenz, 52  
Gleichung, charakteristische, 186, 189, 231  
Gleichung, eulersche, 215  
Gleichung, lagrangesche, 215  
Gleichungssystem, homogenes, 146  
Gleichungssystem, inhomogenes, 146  
Gleichungssystem, lineares, 133  
Gleichungssystem, reguläres, 124, 141  
Gleichungssystem, singuläres, 124, 141  
Graßmann, Hermann, 169–172  
Grad, 107  
graduieretes kommutatives Rechengesetz, 175  
Gram, Jørgen Pedersen, 180  
Grenzfunktion, 51  
große Halbachse, 206  
Gruppe, 106, 152  
Gruppe, allgemeine lineare, 152  
Gruppe, alternierende, 107  
Gruppe, orthogonale, 182  
Gruppe, spezielle lineare, 168  
Gruppe, spezielle orthogonale, 182  
Gruppe, symmetrische, 107
- Halbachse, große, 206  
Halbierungsverfahren, 75  
Halbwertszeit, 246  
harmonisch, 259  
harmonisch konjugiert, 260  
harmonischer Oszillator, 204
- Hauptbedingung, 27  
Hauptsatz über gleichmäßige Konvergenz, 55  
Hauptteil einer Laurentreihe, 293  
Hauptzweig des Logarithmus, 270  
hebbare Singularität, 293  
Hochpunkt, 17  
holomorph, 255  
holomorpher Teil einer Laurentreihe, 293  
Homöomorphismus, 14  
homogene lineare Differentialgleichung, 219  
homogenes Gleichungssystem, 146  
Hooke, Robert, 202, 203  
de l'Hospital, Guillaume François Antoine, 34, 102, 213  
Huygens, Christiaan, 23  
hypergeometrische Differentialgleichung, 227  
hypergeometrische Funktion, 229
- Identität, 105  
implizite Funktion, 85  
indefinit, 185, 193  
Index, 271  
Inertialsystem, 199  
Inhalt, orientierter, 166  
inhomogene lineare Differentialgleichung, 219  
inhomogenes Gleichungssystem, 146  
inneres Produkt, 176  
Integral, entlang einer Kette, 275  
Integral, entlang einer Zelle, 275  
Integral, entlang eines Kurvenstücks, 267  
Integral, fouriersches, 301  
Integral, fresnelsches, 301  
Integral, iteriertes, 65  
Integral, mellinsches, 302  
Integralformel von Cauchy, 282  
Integralgleichung, 89  
Integralsatz von Cauchy, 279  
Integralsinus, 62  
Invariante, 186, 189  
inverse Matrix, 151  
inverse Permutation, 106  
Inversion, 306  
isolierte Singularität, 281  
iterierter Logarithmus, 35

- jacobische Matrix, 114, 119  
 Jordan, Camille, 12, 276, 299  
 Jordankurve, 12  
 Jordankurve, geschlossene, 12  
 jordansche Ungleichung, 300  
 jordansches Lemma, 299  
  
 Keilprodukt, 169, 173  
 Keim, 82, 265  
 Kepler, Johannes, 126, 205, 206, 208  
 Keplergleichung, 126  
 keplersche Gesetze, 205, 206  
 Kern, 146  
 Kette, 273  
 Kette, geschlossene, 276  
 Kinematik, 14  
 Koeffizientenmatrix, 134  
 Koeffizientenmatrix, erweiterte, 139  
 Kombinatorik, 105  
 Komponente, 156, 157  
 konform, 256  
 konjugiert harmonisch, 260  
 kontrahierende Abbildung, 78  
 Kontraktion, 78  
 Konvergenz, gleichmäßige, 52  
 Konvergenz, punktweise, 51  
 Konvergenzradius, 285  
 Kopernikus, Nikolaus, 206  
 Krümmung, 17  
 Krümmungskreis, 18  
 Krümmungsradius, 17  
 Kramp, Christian, 39  
 Kreisfrequenz, 204  
 Kurve, ebene, 11  
 Kurve, glatte, 13  
 Kurvenintegral, 267  
 Kurvenintegralformel, 280  
 Kurvenstück, 12  
  
 Länge, 16, 176  
 Lösung, allgemeine, 146, 220  
 Lösung, partikuläre, 220  
 Lösung, spezielle, 146, 220  
 Lösungskeim, 82, 265  
 Lösungszweig, 82  
 Lagrange, Joseph-Louis, 106, 215, 219  
 Lagrangefunktion, 215  
 lagrangesche Gleichung, 215  
 lagrangescher Multiplikator, 28  
 Laplace, Pierre Simon, 112, 180, 259  
 Laplaceoperator, 259  
 laplacesche Differentialgleichung, 259  
 laplacescher Entwicklungssatz, 113  
 Laurent, Pierre Alphonse, 284  
 Laurentkoeffizient, 284  
 Laurentreihe, 284  
 Lebesgue, Henri, 58  
 Legendre, Adrien Marie, 229  
 Legendrepolynom, 230  
 legendresche Differentialgleichung, 229  
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 11, 13, 34, 42, 59–62, 64–66, 100, 102, 105, 212–214, 285  
 Lemma von Jordan, 299  
 Levi-Civita, Tullio, 172  
 linear abhängig, 158  
 linear unabhängig, 158  
 lineare Differentialgleichung, 217, 221  
 lineare Funktion, 161  
 linearer Raum, 146, 155  
 lineares Differentialgleichungssystem, 234  
 lineares Gleichungssystem, 133  
 Linearisierungsformel, 44  
 Linearkombination, 156  
 Liouville, Joseph, 287  
 Lipschitz, Rudolf, 92  
 Lipschitzbedingung, 92  
 Loch, 272  
 Logarithmus, iterierter, 35  
 logistisches Wachstum, 128  
 lokale Maximumstelle, 185  
 lokale Minimumstelle, 185  
  
*m*-dimensionaler Vektorraum, 155, 156  
 Möbius, August Ferdinand, 306  
 Möbiusfunktion, 306  
 Möbiustransformation, 306  
 Machin, John, 42, 44  
 Majorantensatz für gleichmäßige Konvergenz, 57  
 Matrix, 112, 137  
 Matrix, inverse, 151  
 Matrix, jacobische, 114, 119  
 Matrix, orthogonale, 182

- Matrix, symmetrische, 178  
Matrix, transponierte, 177  
Matrizenprodukt, 148  
Maximumprinzip, 306  
Maximumstelle, 185  
Mellin, Hjalmar, 302  
Mellinintegral, 302  
Mercator, Nikolaus, 40  
Mercatorreihe, 290  
metrische Fundamentalgröße, 177  
metrische Fundamentalmatrix, 177  
mindestens  $m$ -dimensional, 155, 156  
Minimumstelle, 185  
Minor, 112  
Mittelwerteigenschaft, 285  
Multiplikationssatz, 167  
Multiplikator, lagrangescher, 28
- nach unendlich divergent, 272  
Nebenbedingung, 27  
negativ definit, 185, 193  
negativ semidefinit, 193  
Neile, William, 20  
neilsche Parabel, 20  
Newton, Sir Isaac, 11, 13, 39, 42, 76, 198, 199, 203, 205–208, 212, 213, 256  
Newtonformel, 76  
nirgends konstant, 130  
Normaleneinheitsvektor, 16  
Normalkoordinate, 241  
normalstehend, 177  
normierter Vektor, 180  
nulldimensionaler Vektorraum, 155  
Nullstelle, 291  
Nullvektor, 155
- Ordnung einer Polstelle, 294  
orientierter Flächeninhalt, 165  
orientierter Inhalt, 166  
Orientierung, 169  
orthogonal, 177  
orthogonale Gruppe, 182  
orthogonale Matrix, 182  
Orthonormalbasis, 180  
oskulieren, 25  
Oszillator, harmonischer, 204
- Parabel, 18  
Parabel, neilsche, 20  
Parameter, 59  
Parameterintegral, 59  
partikuläre Lösung, 220  
Pascal, Blaise, 23, 213  
Perihel, 210  
Periodendauer, 204  
Permutation, 105  
Permutation, gerade, 107  
Permutation, inverse, 106  
Permutation, ungerade, 107  
Phase, 204  
Picard, Émile, 295  
Platon, 39  
Pochhammer, Leo August, 276  
Poisson, Denis, 64  
Polstelle, 294  
Polynom, taylorisches, 46  
positiv definit, 176, 185, 193  
positiv semidefinit, 193  
Potential, 204  
Potenzreihe, 285  
Produkt, inneres, 176  
Produkt, skalares, 176  
Ptolemäus, Claudius, 206  
punktweise Konvergenz, 51
- quadratische Approximation, 45  
quadratische Form, 183, 187
- Räuber-Beute-System, 252  
Rand, 274  
Randbedingung, 213  
Randpunkt, 17  
Rang, 124, 141  
Raphson, Joseph, 76  
Rechengesetz, antikommutatives, 166, 169  
Rechengesetz, assoziatives, 170, 174  
Rechengesetz, distributives, 170, 175  
Rechengesetz, graduiertes kommutatives, 175  
Regel von de l'Hospital, 34  
Regel von Sarrus, 105  
regulär, 124  
reguläres Gleichungssystem, 141  
Reihe, binomische, 289

- Rekursion, 226  
 Residuensatz, 297  
 Residuum, 296  
 Resonanz, 245  
 Restglied, 40, 46  
 Riccati, Jacopo Francesco, 250  
 riccatische Differentialgleichung, 250  
 Ricci-Cubastro, Gregorio, 172  
 Richtungsfeld, 86  
 Riemann, Bernhard, 255, 294  
 Personne de Roberval, Gilles, 23  
 Rollkurve, 21  
 Rudolf II., 205  
 Ruhepotential, 204  
  
 Sarrus, Pierre Frédéric, 105  
 Sattelpunkt, 30, 185  
 Satz über implizite Funktionen, 85  
 Satz von Liouville, 287  
 Satz von Riemann, 294  
 Satz von Schwarz, 67  
 Satz von Weierstraß, 290  
 Scheitel, 18  
 Scheitelpunkt, 18  
 Scherung, 165  
 Schmidt, Erhard, 180  
 Schwarz, Hermann Amandus, 65  
 schwingendes System, 204  
 semidefinit, negativ, 193  
 semidefinit, positiv, 193  
 Simpson, Thomson, 76  
 singular, 16, 124  
 singuläres Gleichungssystem, 141  
 Singularität, hebbare, 293  
 Singularität, isolierte, 281  
 Singularität, wesentliche, 295  
 skalaras Produkt, 176  
 Sommerfeld, Arnold, 207  
 spezielle Lösung, 146, 220  
 spezielle lineare Gruppe, 168  
 spezielle orthogonale Gruppe, 182  
 Spur, 186, 189, 275  
 Störglied, 219  
 Stürzung, 306  
 Standardbasis, 157  
 stationäre Stelle, 182  
 Stolz, Otto, 72  
  
 Streckung, 306  
 Stufe eines Tensors, 172  
 Summensatz des Tangens, 42  
 Superpositionsprinzip, 145, 221  
 Sylvester, James Joseph, 126, 137, 138, 148  
 symmetrisch, 78, 176  
 symmetrische Gruppe, 107  
 symmetrische Matrix, 178  
 System von Gleichungssystemen, 149  
  
 Tangenteneinheitsvektor, 16  
 Tangentenschmiegepunkt, 18  
 Tangentenvektor, 13  
 Taylor, Brook, 44  
 Taylorreihe, 286  
 taylorsches Polynom, 46  
 Tensor, 172  
 Tiefpunkt, 17  
 Torricelli, Evangelista, 23  
 Trägheitsgesetz, 198  
 Translation, 306  
 transponieren, 138  
 transponierte Matrix, 177  
  
 Umlaufzahl, 271  
 unabhängige Variable, 124  
 unbeschränkte  
     Zusammenhangskomponente, 275  
 unbestimmter Ausdruck, 32, 33  
 unendlichdimensionaler Vektorraum, 157  
 ungerade Anordnung, 103  
 ungerade Permutation, 107  
 Ungleichung, jordansche, 300  
 Ungleichung, von Cauchy und Schwarz, 176  
  
 Variable, unabhängige, 124  
 Variation der Konstante, 219, 264  
 Variationsrechnung, 213, 215  
 Vektor, 155  
 Vektor, entgegengesetzter, 155  
 Vektor, normierter, 180  
 Vektorraum, 155  
 Vektorraum, euklidischer, 176  
 Vektorraum,  $m$ -dimensionaler, 155, 156  
 Vektorraum, nulldimensionaler, 155  
 Vektorraum, unendlichdimensionaler, 157  
 Vergilius Maro, Publius, 42



- Verschiebung, 306
- Vertauschung, 107
- Vertauschungsregel für iterierte Integrale, 65
- Vielfachheit einer Nullstelle, 291
- vollständige Menge, 79
- Voltaire, eigentl. Arouet, François-Marie, 206
- Volterra, Vito, 89
- Volumen, 165
  
- Wachstum, logistisches, 128
- Wallenstein, eigentl. von Waldstein, Albrecht, 206
- Weierstraß, Karl, 56, 65, 72, 255, 290, 295
- Weierstraßscher Majorantensatz, 57
- Wendepunkt, 18
- wesentliche Singularität, 295
- Windungszahl, 271
- Winkel, 176
- Winkelgeschwindigkeit, 15, 204
  
- Wirtinger, Wilhelm, 255
- Wirtingerableitung, 255
- Hoëné-Wronski, Josef-Maria, 223
- Wronskideterminante, 223
- Wurzelziehen, babylonisches, 74
  
- Zelle, 273
- Zusammenhang, einfacher, 272
- Zusammenhangskomponente, 275
- Zusammenhangskomponente, unbeschränkte, 275
- Zweig, 82
- zweimal stetig differenzierbar, 44
- zweite Ableitungsfunktion, 44
- zweites newtonsches Axiom, 200
- Zykloide, 21, 217
- Zykloidenbogensegment, 22
- Zyklus, 276