

Inhaltsverzeichnis

Teil A. Unendliche Produkte und Partialbruchreihen

<i>Kapitel 1. Unendliche Produkte holomorpher Funktionen</i>	2
§1. Unendliche Produkte	3
1. Unendliche Produkte von Zahlen	3
2. Unendliche Produkte von Funktionen	4
§2. Normale Konvergenz	6
1. Normale Konvergenz	6
2. Normal konvergente Produkte holomorpher Funktionen	7
3. Logarithmische Differentiation	9
§3. Das Sinusprodukt $\sin \pi z = \pi z \prod_{v=1}^{\infty} (1 - z^2/v^2)$	10
1. Standardbeweis	10
2. Charakterisierung des Sinus durch die Verdopplungsformel	12
3. Beweis der EULERSchen Formel mit Hilfe von Lemma 2	13
4*. Beweis der Verdopplungsformel für das EULER-Produkt nach EISENSTEIN	14
5. Historisches zum Sinusprodukt	15
§4*. EULERSche Partitionsprodukte	16
1. Partitionen natürlicher Zahlen und EULERSche Produkte	17
2. Pentagonal-Zahlen-Satz. Rekursionsformeln für $p(n)$ und $\sigma(n)$	18
3. Potenzreihenentwicklung von $\prod_{v=1}^{\infty} (1 + q^v z)$ nach z	20
4. Historisches zu Partitionen und zum Pentagonal-Zahlen-Satz ..	21
§5*. JACOBIS Produktdarstellung der Reihe $J(z, q) := \sum_{v=-\infty}^{\infty} q^{v^2} z^v$	22
1. Theorem von JACOBI	23
2. Diskussion des JACOBISchen Theorems	24
3. Historisches zur JACOBISchen Identität	25
Literatur	27

<i>Kapitel 2. Die Gammafunktion</i>	29
§ 1. Die WEIERSTRASSsche Funktion $\Delta(z) = z^{yz} \prod_{v \geq 1} (1 + z/v) e^{-z/v}$	31
1. Die Hilfsfunktion $H(z) := z \prod_{v=1}^{\infty} (1 + z/v) e^{-z/v}$	31
2. Die ganze Funktion $\Delta(z) := e^{yz} H(z)$	33
§ 2. Die Gammafunktion	34
1. Eigenschaften der Γ -Funktion	34
2. Historische Notizen	36
3. Die logarithmische Ableitung $\psi := \Gamma'/\Gamma$	37
4. Das Eindeutigkeitsproblem	38
5. Multiplikationsformeln	40
6*. Satz von HÖLDER	42
7*. Der Logarithmus der Γ -Funktion	42
§ 3. EULERSche und HANKELSche Integraldarstellung von $\Gamma(z)$	43
1. Konvergenz des EULERSchen Integrals	44
2. Satz von EULER	45
3*. Die Gleichung $\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-it} dt = e^{-\pi iz/2} \Gamma(z)$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$	46
4*. Das HANKELSche Schleifenintegral	48
§ 4. STIRLINGSche Formel und GUDERMANNsche Reihe	50
1. STIELTJESSche Definition der Funktion $\mu(z)$	51
2. STIRLINGSche Formel	52
3. Wachstum von $ \Gamma(x + iy) $ für $ y \rightarrow \infty$	54
4*. GUDERMANNsche Reihe	54
5*. STIRLINGSche Reihe	56
6*. Feinabschätzungen des Restgliedes	57
7*. BINETSches Integral	58
8*. LINDELÖFSche Abschätzung	60
§ 5*. Die Betafunktion	61
1. Beweis der EULERSchen Identität	61
2. Klassische Beweise der EULERSchen Identität	63
Literatur	64
<i>Kapitel 3. Ganze Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen</i>	66
§ 1. WEIERSTRASSscher Produktsatz für \mathbb{C}	66
1. Divisoren und Hauptdivisoren	67
2. WEIERSTRASS-Produkte	68
3. WEIERSTRASS-Faktoren	68
4. Produktsatz von WEIERSTRASS	69
5. Folgerungen	70
6. Historisches zum Produktsatz	71

§ 2. Diskussion des Produktsatzes	72
1. Kanonische Produkte	73
2. Drei klassische kanonische Produkte	74
3. Die σ -Funktion	74
4. Die \wp -Funktion	76
5*. Eine Bemerkung von HURWITZ	77
Literatur	78
 <i>Kapitel 4*. Holomorphe Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen</i>	 79
§ 1. Produktsatz für beliebige Bereiche	79
1. Konvergenzlemma	79
2. Produktsatz für spezielle Divisoren	80
3. Allgemeiner Produktsatz	81
4*. Zweiter Beweis des allgemeinen Produktsatzes	82
5. Folgerungen	82
§ 2. Anwendungen und Beispiele	83
1. Teilbarkeit in $\mathcal{O}(G)$. Größter gemeinsamer Teiler	84
2. Beispiele von WEIERSTRASS-Produkten	85
3. Historisches zum allgemeinen Produktsatz	86
4. Ausblick auf mehrere Veränderliche	86
§ 3. Beschränkte Funktionen in \mathbb{E} und ihre Divisoren	87
1. Verallgemeinerung des SCHWARZschen Lemmas	88
2. Notwendigkeit der BLASCHKE-Bedingung	89
3. BLASCHKE-Produkte	89
4. Beschränkte Funktionen in der rechten Halbebene	90
Anhang zum Paragraphen 3: Die JENSENSche Formel	91
Literatur	93
 <i>Kapitel 5. Satz von ISS'SA. Holomorphiegebiete</i>	 94
§ 1. Der Satz von ISS'SA	94
1. Satz von BERS	94
2. Satz von ISS'SA	95
3. Beweis des Lemmas	96
4. Historisches zu den Sätzen von BERS und ISS'SA	97
5*. Bestimmung aller Bewertungen von $\mathcal{M}(G)$	97
§ 2. Holomorphiegebiete	98
1. Eine Konstruktion von GOURSAT	100
2. Gut verteilte Randmengen. Erster Beweis des Existenzsatzes ...	101
3. Diskussion des Begriffes Holomorphiegebiet	102
4. Randnahe Mengen. Zweiter Beweis des Existenzsatzes	103
5. Historisches zum Begriff des Holomorphiegebietes	104
6. Ausblick auf mehrere Veränderliche	105

§ 3. Einfache Beispiele von Holomorphiegebieten	106
1. Beispiele für \mathbb{E}	106
2. Liftungssatz	107
3. CASSINI-Bereiche und Holomorphiegebiete	107
Literatur	108

Kapitel 6. Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen 110

§ 1. Satz von MITTAG-LEFFLER für \mathbb{C}	110
1. Hauptteil-Verteilungen	111
2. MITTAG-LEFFLER-Reihen	112
3. Satz von MITTAG-LEFFLER	112
4. Folgerungen	113
5. Kanonische MITTAG-LEFFLER-Reihen. Beispiele	114
6. Historisches zum Satz von MITTAG-LEFFLER für \mathbb{C}	114
§ 2. Satz von MITTAG-LEFFLER für beliebige Bereiche	115
1. Spezielle Hauptteil-Verteilungen	115
2. Allgemeiner Satz von MITTAG-LEFFLER	116
3. Folgerungen	117
4. Historisches zum allgemeinen Satz von MITTAG-LEFFLER	118
5. Ausblicke auf mehrere Veränderliche	119
§ 3*. Idealtheorie in Ringen holomorpher Funktionen	119
1. Nicht endlich erzeugbare Ideale in $\mathcal{O}(G)$	120
2. Lemma von WEDDERBURN (Darstellung der Eins)	120
3. Lineare Darstellung des ggT. Hauptidealsatz	121
4. Nullstellenfreie Ideale	122
5. Hauptsatz der Idealtheorie für $\mathcal{O}(G)$	123
6. Historisches zur Idealtheorie holomorpher Funktionen	124
7. Ausblicke auf mehrere Veränderliche	124
Literatur	125

Teil B. Abbildungstheorie

<i>Kapitel 7. Die Sätze von Montel und Vitali</i>	128
§ 1. Der Satz von MONTEL	128
1. Satz von MONTEL für Folgen	129
2. Beweis des Satzes von MONTEL	130
3. MONTELSches Konvergenzkriterium	131
4. Satz von VITALI	131
5*. Punktweise konvergente Folgen holomorpher Funktionen	132
§ 2. Normale Familien	133
1. Satz von MONTEL für normale Familien	133
2. Diskussion des MONTELSchen Satzes	134

3.	Historisches zum Satz von MONTEL	134
4*.	Quadrat-integriable Funktionen und normale Familien	135
§ 3*.	Der Satz von VITALI	136
1.	Konvergenzlemma	137
2.	Satz von VITALI (endgültige Fassung)	137
3.	Historisches zum Satz von VITALI	138
§ 4*.	Anwendungen des Satzes von VITALI	139
1.	Vertauschung von Integration und Differentiation	139
2.	Kompakte Konvergenz des Γ -Integrals	140
3.	Satz von MÜNTZ	141
§ 5.	Folgerungen aus einem Satz von HURWITZ	142
	Literatur	144
 <i>Kapitel 8. Der Riemannsche Abbildungssatz</i>		145
§ 1.	Integralsätze für homotope Wege	146
1.	Homotope Wege bei festen Endpunkten	146
2.	Frei homotope geschlossene Wege	147
3.	Nullhomotopie und Nullhomologie	148
4.	Einfach zusammenhängende Gebiete	149
5*.	Reduktion des Integralsatzes 1 auf ein Lemma	150
6*.	Beweis von Lemma 5*	151
§ 2.	Der RIEMANNsche Abbildungssatz	152
1.	Reduktion auf Q -Gebiete	153
2.	Existenz holomorpher Injektionen	153
3.	Existenz von Dehnungen	154
4.	Existenzbeweis mittels eines Extremalprinzips	155
5.	Zur Eindeutigkeit der Abbildungsfunktion	156
6.	Äquivalenztheorem	156
§ 3.	Zur Geschichte des RIEMANNschen Abbildungssatzes	157
1.	RIEMANNs Dissertation	157
2.	Frühgeschichte	158
3.	Von CARATHÉODORY-KOEBE zu FEJÉR-RIESZ	160
4.	Der finale Beweis von CARATHÉODORY	161
5.	Historisches zur Eindeutigkeit und zum Randverhalten	162
6.	Ausblick auf mehrere Veränderliche	163
§ 4.	Isotropiegruppen einfach zusammenhängender Gebiete	163
1.	Beispiele	164
2.	Die Gruppe $\text{Aut}_a G$ für einfach zusammenhängende Gebiete $G \neq \mathbb{C}$	164
3*.	Abbildungsradius. Monotoniesatz	165

Anhang zu Kapitel 8: CARATHÉODORY-KOEBE-Theorie	166
§ 1. Einfache Eigenschaften von Dehnungen	166
1. Dehnungslemma	166
2. Zulässige Dehnungen. Quadratwurzel-Verfahren	167
3*. Die Mondsichel-Dehnung	168
§ 2. Der CARATHÉODORY-KOEBE-Algorithmus	169
1. Eigenschaften von Dehnungsfolgen	169
2. Konvergenzsatz	170
3. KOEBE-Familien und KOEBE-Folgen	170
4. Resümee. Konvergenzgüte	171
5. Historisches: Der Wettstreit zwischen CARATHÉODORY und KOEBE	172
§ 3. Die KOEBE-Familien \mathcal{K}_m und \mathcal{K}_∞	173
1. Ein Lemma	173
2. Die Familien \mathcal{K}_m und \mathcal{K}_∞	174
Literatur zu Kapitel 8 und zum Anhang	175
<i>Kapitel 9. Automorphismen und endliche innere Abbildungen</i>	177
§ 1. Innere Abbildungen und Automorphismen	177
1. Konvergente Folgen in $\text{Hol } G$ und $\text{Aut } G$	177
2. Konvergenzsatz für Folgen von Automorphismen	178
3. Beschränkte homogene Gebiete	179
4*. Innere Abbildungen von \mathbb{H} und Homothetien	179
§ 2. Iteration innerer Abbildungen	180
1. Elementare Eigenschaften	180
2. Satz von H. CARTAN	181
3. Die Gruppe $\text{Aut}_a G$ für beschränkte Gebiete	182
4. Die abgeschlossenen Untergruppen der Kreisgruppe	183
5*. Automorphismen von Gebieten mit Löchern. Ringsatz	183
§ 3. Endliche holomorphe Abbildungen	184
1. Drei allgemeine Eigenschaften	185
2. Endliche innere Abbildungen von \mathbb{E}	185
3. Randlemma für Kreise	186
4. Endliche innere Abbildungen von Kreisen	188
5. Bestimmung aller endlichen Abbildungen zwischen Kreisen	189
§ 4*. Satz von RADÓ. Abbildungsgrad	190
1. Abgeschlossene Abbildungen. Äquivalenzsatz	190
2. Windungsabbildungen	191
3. Satz von RADÓ	192
4. Abbildungsgrad	193
5. Ausblicke	193
Literatur	194

Teil C. Selecta

<i>Kapitel 10. Sätze von Bloch, Picard und Schottky</i>	196
§ 1. Satz von BLOCH	196
1. Beweisvorbereitung	197
2. Beweis des Satzes von BLOCH	198
3*. Verbesserung der Schranke durch Lösen eines Extremalproblems	199
4*. Satz von AHLFORS	200
5*. LANDAUS Weltkonstanten	202
§ 2. Kleiner Satz von PICARD	203
1. Darstellung von Funktionen, die zwei Werte auslassen	203
2. Beweis des kleinen PICARDSchen Satzes	204
3. Zwei amüsante Anwendungen	205
§ 3. Satz von SCHOTTKY und Folgerungen	206
1. Beweis des SCHOTTKYSchen Satzes	207
2. LANDAUS Verschärfung des kleinen PICARDSchen Satzes	208
3. Verschärfung der Sätze von MONTEL und VITALI	208
§ 4. Großer Satz von PICARD	210
1. Beweis des großen PICARDSchen Satzes	210
2. Historisches zu den Sätzen dieses Kapitels	210
Literatur	211
<i>Kapitel 11. Randverhalten von Potenzreihen</i>	212
§ 1. Konvergenz auf dem Rand	212
1. Sätze von FATOU, M. RIESZ und OSTROWSKI	213
2. Ein Lemma von M. RIESZ	214
3. Beweis der Sätze aus 1	215
4. Ein Kriterium für Nichtfortsetzbarkeit	216
Literatur zum Paragraphen 1	217
§ 2. Theorie der Überkonvergenz. Lückensatz	217
1. Überkonvergente Potenzreihen	218
2. Überkonvergenzsatz von OSTROWSKI	219
3. Lückensatz von HADAMARD	220
4. PORTERS Konstruktion überkonvergenter Reihen	221
5. Historisches zum Lückensatz	221
6. Historisches zur Überkonvergenz	222
7. Ausblicke	223
Literatur zum Paragraphen 2	223
§ 3. Ein Satz von FATOU-HURWITZ-PÓLYA	224
1. Der HURWITZsche Beweis	225
2. Ausblicke	226
Literatur zum Paragraphen 3	226

§4. Ein Fortsetzungssatz von SZEGÖ	227
1. Vorbereitungen zum Beweis von (Sz)	227
2. Ein Hilfssatz	229
3. Beweis von (Sz)	229
4. Eine Anwendung	230
5. Ausblicke	231
Literatur zum Paragraphen 4	232
<i>Kapitel 12. Runge-Theorie für Kompakta</i>	233
§1. Hilfsmittel	234
1. CAUCHYSche Integralformel für Kompakta	234
2. Approximation durch rationale Funktionen	236
3. Polstellenverschiebungssatz	237
§2. RUNGE-Theorie für Kompakta	239
1. Approximationssätze von RUNGE	239
2. Folgerungen aus dem kleinen Satz von RUNGE	240
3. Hauptsatz der RUNGE-Theorie für Kompakta	241
§3. Anwendungen des kleinen Satzes von RUNGE	243
1. Punktweise konvergente Polynomfolgen, die nicht überall kompakt konvergieren	243
2. Holomorphe Einbettung des Einheitskreises in den \mathbb{C}^3	246
§4. Diskussion der CAUCHYSchen Integralformel für Kompakta	248
1. Finale Form von Satz 1.1	248
2. Umlaufungssatz	250
Literatur	251
<i>Kapitel 13. Runge-Theorie für Bereiche</i>	253
§1. Die RUNGESchen Sätze für Bereiche	254
1. Auffüllung von Kompakta. RUNGES Beweis des Satzes von MITTAG-LEFFLER	254
2. Approximationssätze von RUNGE	255
3. Hauptsatz der CAUCHYSchen Funktionentheorie	256
4. Zur Theorie der Löcher	257
5. Historisches zur RUNGE-Theorie	258
§2. RUNGESche Paare	258
1. Topologische Charakterisierung RUNGEScher Paare	259
2. RUNGESche Hüllen	260
3. Homologische Charakterisierung RUNGEScher Paare. Satz von BEHNKE-STEIN	260
4. RUNGESche Bereiche	261
5*. Approximation und holomorphe Fortsetzbarkeit	262

§3. Holomorph-konvexe Hüllen und RUNGESche Paare	263
1. Eigenschaften des Hüllenoperators	263
2. Charakterisierung RUNGEScher Paare mittels holomorph-konvexer Hüllen	265
Anhang: Über Komponenten lokal kompakter Räume.	
Satz von ŠURA-BURA	266
1. Komponenten	266
2. Existenz offener Kompakta	267
3. Auffüllungen	268
4. Beweis des Satzes von ŠURA-BURA	268
Literatur	269
<i>Kapitel 14. Invarianz der Löcherzahl</i>	271
§1. Homologietheorie. Trennungslemma	271
1. Homologiegruppen. BETTI-Zahl	271
2. Induzierte Homomorphismen. Natürliche Eigenschaften	272
3. Trennung von Löchern durch geschlossene Wege	274
§2. Invarianz der Löcherzahl. Produktsatz für Einheiten	274
1. Zur Struktur der Homologiegruppe	275
2. Löcherzahl und BETTI-Zahl	276
3. Normalformen mehrfach zusammenhängender Gebiete (Bericht)	277
4. Zur Struktur der multiplikativen Gruppe $\mathcal{O}(G)^\times$	277
5. Ausblicke	279
Literatur	279
<i>Kurzbiographien</i>	281
<i>Porträts berühmter Mathematiker</i>	286
<i>Symbolverzeichnis</i>	287
<i>Namenverzeichnis</i>	288
<i>Sachverzeichnis</i>	291