Abiturvorbereitung

Gymnasium

Mathematik

Analysis

Klausur Training

Ausführliche Beispiele und Lösungen

Thomas Schneider

Autor und Herausgeber

Thomas Schneider studierte Elektrotechnik an der FH Schweinfurt und Mathematik an der Fernuniversität Hagen. Hauptberuflich ist er Softwareentwickler und langjähriger Nachhilfelehrer für Mathematik, Physik und Informatik.

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbiographie; detallierte bibliografische Daten sind im Internet über **http://dnb.dnb.de** abrufbar.

1. Auflage 2021

Verlag: Thomas Schneider
Gabelsbergerstraße 6
97421 Schweinfurt
thomas.schweinfurt@gmxl.net
Druck: Pulsio Print in Sofia

Printed in Bulgaria

Vertrieb: Nova MD GmbH, Vachendorf

ISBN: 978-3-96966-856-6

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Schülerin lieber Schüler,

mit dem vorliegenden **Buch** haben Sie einen hervorragenden **Helfer** an der Hand, um sich **optimal** auf das schriftliche Abiturfach Mathematik im **Fachgebiet Analysis**, vorzubereiten. Anhand der zahlreichen **Aufgaben** und **Klausuren** können Sie mit konsequenter Übung die notwendige **Sicherheit** erlangen und somit die Unsicherheit am **Prüfungstag** minimieren. Der ein oder andere Schüler von Ihnen hat die Oberstufe im Fach Mathematik mit mehr oder weniger großen **Wissenslücken** erreicht und muss daher diese erst **schließen,** um sich erfolgreich mit dem Thema Analysis befassen zu können. Das **Buch unterstützt** Sie in den ersten Kapiteln mit den notwendigen **mathematischen Grundlagen** und Übungen dabei. Die folgenden Kapitel vermitteln Ihnen dann **Schritt für Schritt** den eigentlichen **Gymnasialstoff** der **Analysis**, der Sie schließlich an das abschließende Klausurtraining sicher heranführen soll. Das **Klausurtraining** sollte von **jedem Schüler komplett** bearbeitet und durchgeführt werden, da es Sie auf die **Aufgabenstellungen**, die **Aufgabentypen** und auf die **Bearbeitungszeit** der schriftlichen **Abiturprüfung** gut einstellt.

Das vorliegende Buch enthält:

- Zu allen **Themen** ein **ausführliches Beispiel**, das jeden **einzelnen Rechenschritt** beinhaltet.
- Zu allen **Themen** zahlreiche **Aufgaben** mit ausführlichen **Lösungen**.
- Zahlreiche **Beispiele** mit geeigneten **Lösungsverfahren.**
- Zahlreiche mathematische **Formeln** und mathematische **Sätze.**
- Ehemalige **Klausuren** mit allen **Aufgabentypen** und **Musterlösungen**.

Viel **Erfolg** im **Abitur** wünscht Ihnen der Verfasser!

Analysis-Aufgaben in der schriftlichen Abiturprüfung

Das schriftliche Abiturfach Mathematik besteht aus den drei Fachgebieten **Analysis**, **analytische Geometrie** und **Stochastik**. Die **Analysis** hat in der Prüfung den **größten Anteil** und beinhaltet die zwei wichtigen Gebiete der Differential- und der Integralrechnung. Das zentrale Thema der **Differentialrechnung** ist die Berechnung **lokaler Veränderungen** von Funktionen. Der Grundbegriff der Differentialrechnung ist die **Ableitung** einer Funktion, deren geometrische Entsprechung die **Tangentensteigung** der Funktion ist. Die **Integralrechnung** kann als die Umkehrung des Differenzierens angesehen werden und ist definiert als der **Flächeninhalt**, der von einer Funktion auf einem Intervall eingeschlossen wird.

Mit den **mathematischen Methoden,** die sich aus der Differentialrechnung und aus der Integralrechnung ergeben, werden **im Abitur** folgende **Funktionsklassen** mit ihren einfachen **Verkettungen** oder **Verknüpfungen** analysiert.

- **Ganzrationale** Funktionen
- **Gebrochenrationale** Funktionen
- **Exponential-** und **Logarithmus**funktionen
- **Sinus-** und **Kosinus**funktionen

Mathematische **Aufgabentypen** im **Abitur**:

1. Kurvendiskussion mit Extremwertaufgabe

Untersucht wird eine **Funktion** aus den Funktionsklassen auf Symmetrieeigenschaften, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen **Extremstellen**, **Wendepunkte** und **Flächenbestimmung**. Lösen einer Extremwertaufgabe.

2. Kurvendiskussion ohne Extremwertaufgabe

Untersucht wird eine **Funktionenschar** aus den Funktionsklassen in ihrem Definitionsbereich auf Symmetrieeigenschaften, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen **Extremstellen**, **Wendepunkte**, Terassenpunkte und **Flächenbestimmung** oder ihr **Rotationsvolumen** in Abhängigkeit eines Parameters. Zusätzlich werden bei **Funktionsscharen** häufig die **Ortslinien** spezieller Punkte ermittelt.

3, Mathematische Modelle untersuchen

Es werden **realitätsnahe Probleme** durch geeignete **Funktionen** aus den Funktionsklassen **beschrieben** und auf **sachbezogene Fragestellungen** hin **untersucht**. Damit wird das erlernte **mathematische Wissen** in konkreten Situationen **sinnvoll verwendet**.

6.3 Differentialrechnung

Die **Differentialrechnung** ist ein wichtiger Teil der Analysis. Sie ist eng verknüpft mit der **Integralrechnung**, mit der beide unter der Bezeichnung Infinitesimalrechnung zusammengefasst wurden. Das zentrale Thema der **Differentialrechnung** ist die Berechnung **lokaler Veränderungen** von Funktionen. Der Grundbegriff der Differentialrechnung ist die **Ableitung** einer Funktion, deren geometrische Entsprechung die **Tangentensteigung** der Funktion ist. In vielen Fällen ist die Differentialrechnung ein unverzichtbares Hilfsmittel um mathematische Modelle zu beschreiben und zu analysieren.

6.3.1 Ableitung einer Funktion

Differenzenquotienten oder mittlere Änderungsrate

Der **Differenzenquotient** ist ein Maß für die **mittlere Änderungsrate** der betrachteten Funktion über ein entsprechendes Intervall. Geometrisch interpretiert, kennzeichnet der **Differenzenquotient** die **Steigung** der **Sekante** der Funktion durch die folgenden Punkte $P_1(x_1, f(x_1))$ und $P_2(x_2, f(x_2))$

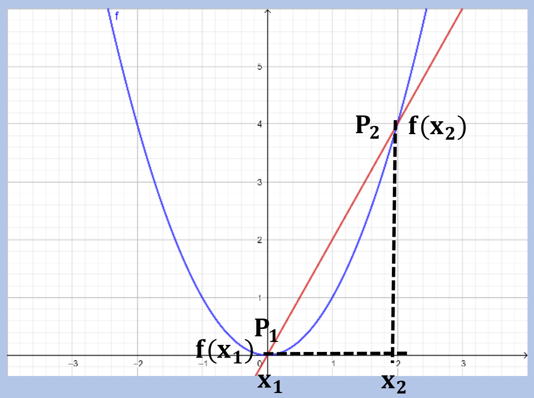
Definition:

Es sei $y = f(x)$ eine auf D_f definierte Funktion und $x_1, x_2 \in R$.

Den Ausdruck $d(x)$ bezeichnet man als Differenzenquotient oder mittlere Änderungsrate der Funktion im Intervall $[x_1; x_2]$.

$$d(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

mit den Punkten $P_1(x_1, f(x_1))$ und $P_2(x_2, f(x_2))$.



Differenzenquotient

Differenzialquotienten oder momentane Änderungsrate

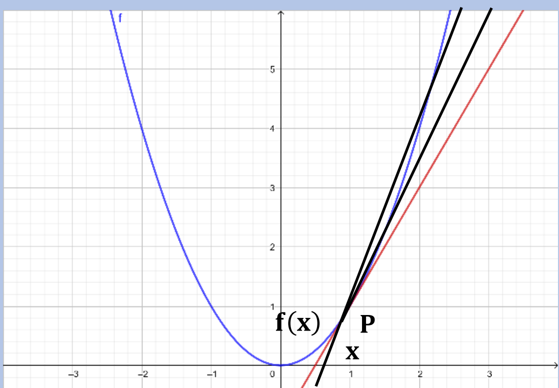
Der **Differenzialquotient** beschreibt die Änderung einer Funktion an einer speziellen Stelle. Er beschreibt die sogenannte **momentane** oder **punktuelle Änderungsrate**. Geometrisch interpretiert, kennzeichnet die **Ableitung** der Funktion ein Maß für die **Steigung** der **Tangente** im Punkt $\mathbf{P}$ des Graphen. Der Steigungswinkel $\boldsymbol{\alpha}$ der Tangente im Punkt $\mathbf{P}$ ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})' = \mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha})$. Um vom Differenzenquotient zur momentanen Änderungsrate zu kommen, verkleinert man das Intervall $[\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}]$ immer weiter mit $\mathbf{x_1} = \mathbf{x}$ **und** $\mathbf{x_2} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$ **für** $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0}$.

Definition:

Es sei $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ eine auf $\mathbf{D_f}$ definierte Funktion.

Den Ausdruck $\mathbf{f}(\mathbf{x})'$ bezeichnet man als Differenzialquotient oder als Ableitung der Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})' = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}$$



Ableitung der Sinusfunktion

Wir wollen nun die **Ableitung** der Sinusfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{sin}(\mathbf{x})$ zu jedem beliebigen **x-Wert** bestimmen, d.h. wir suchen eine Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})'$ die zu jedem beliebigen **x-Wert** die zugehörige Steigung der Tangente der Sinusfunktion angibt.

Die Ableitung erhalten wir mit dem **Differenzialquotienten** der **Sinusfunktion**:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})' = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f(x)' = \lim_{h\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$\frac{\lim\limits_{h\to 0}\big(\sin(x)\cos(h)\big) + \lim\limits_{h\to 0}\big(\cos(x)\sin(h)\big) - \lim\limits_{h\to 0}\sin(x)}{\lim\limits_{h\to 0} h}$$

$$\frac{\sin(x) + \lim\limits_{h\to 0}\cos(x)\, h - \sin(x)}{\lim\limits_{h\to 0} h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cos(x)}{\cancel{h}} = \cos(x)$$

6.3.2 Tabelle von Ableitungen elementarer Funktionen

Alle elementaren Funktionen und deren Ableitungen werden mit dem Differenzial-quotienten bestimmt. Die folgende **Tabelle** enthält die **Ableitungen** aller **wichtigen** elementaren **Funktionen**.

Elementare Funktionen	Funktion	Ableitungen
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$	$f(x)' = n\,x^{n-1}$
Natürliche Exponentialfunktion	$f(x) = e^x$	$f(x)' = e^x$
Natürliche Logarithmusfunktion	$f(x) = \ln(x)$	$f(x)' = \frac{1}{x}$
Sinusfunktion	$f(x) = \sin(x)$	$f(x)' = \cos(x)$
Kosinusfunktion	$f(x) = \cos(x)$	$f(x)' = -\sin(x)$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$	$f(x)' = a^x \ln(a)$
Logarithmusfunktion	$f(x) = \log_a(x)$	$f(x)' = \frac{1}{x\ln(a)}$

Die **Ableitungen** aus der oberen **Tabelle** sollten Sie **auswendig** können.

Das nächste Kapitel untersucht mit den Grundrechenarten verknüpfte Funktionen und deren Ableitungsregeln.

6.3.3 Regeln zum Ableiten von Funktionen

Ist die Ableitung **keine elementare** Funktion, so gelten **die Ableitungsregeln,** die in der folgenden **Tabelle** zusammengefasst sind. Die verknüpften Funktionen müssen jede für sich differenzierbar sein.

Ableitungsregeln	Verknüpfte Funktionen	Ableitungen verknüpfter Funktionen
Faktorregel	$f(x)' = (c \cdot g(x))'$	$f(x)' = c \cdot g(x)'$
Summenregel	$f(x)' = (g(x) \pm h(x))'$	$f(x)' = g(x)' \pm h(x)'$
Produktregel	$f(x)' = (g(x) \cdot h(x))'$	$f(x)' = g(x)' \cdot h(x) + h(x)' \cdot g(x)$
Quotientenregel	$f(x)' = \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)'$	$f(x)' = \frac{g(x)' \cdot h(x) - h(x)' \cdot g(x)}{h(x)^2}$
Kettenregel	$f(x)' = \left(g\left(h(x)\right)\right)'$	$f(x)' = g\left(h(x)\right)' \cdot h(x)'$

6.3.4 Tangenten und Normalen

Eine **Tangentengleichung** ist eine **Gerade**, die an einem bestimmten Punkt eine Funktion **berührt**. Eine **Normalengleichung** ist eine **Gerade**, die an einem bestimmten Punkt eine Funktion **senkrecht schneidet**. Mithilfe der Differentialrechnung kann man diese beiden Geraden einfach bestimmen.

Ermitteln einer Tangentengleichung der Funktion f

1. Die Gleichung der Tangente aufstellen.

$$Y = m_t x + t$$

2. Bestimmen der Steigung m_t an einem Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ der Funktion f.

$$m_t = f(x_0)'$$

3. Bestimmen des Achsenabschnittes t mit dem Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ der Funktion.

$$t = f(x_0) - f(x_0)' \cdot x_0$$

4. Die Gleichung der Tangente an dem Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$.

$$y = f(x_0)'(x - x_0) + f(x_0)$$

Ermitteln einer Normalengleichung der Funktion $\mathbf{f}$

1. Die Gleichung der Normalen aufstellen.

$$\mathbf{Y = m_n x + t}$$

2. Bestimmen der Steigung $\mathbf{m_n}$ an einem Punkt $\mathbf{P(x_0 \mid f(x_0))}$ der Funktion $\mathbf{f}$.

$$\mathbf{m_n = -\frac{1}{f(x_0)'} \text{ mit } f(x_0)' \neq 0}$$

3. Bestimmen des Achsenabschnittes $\mathbf{t}$ mit dem Punkt $\mathbf{P(x_0 \mid f(x_0))}$ der Funktion.

$$\mathbf{t = f(x_0) + \frac{1}{f(x_0)'} \cdot x_0}$$

4. Die Gleichung der Normalen an dem Punkt $\mathbf{P(x_0 \mid f(x_0))}$.

$$\mathbf{y = -\frac{1}{f(x_0)'}(x - x_0) + f(x_0)}$$

Beispiel 3.)

Die Ableitung mit der Faktor- und Summenregel bestimmen.

$$\mathbf{f(x) = 4x^3 + 2\ln(x) + \frac{1}{x^2} + 2e^x}$$

Den Term $\mathbf{\frac{1}{x^2}}$ als negative Potenz schreiben.

$$\mathbf{f(x) = 4x^3 + 2\ln(x) + x^{-2} + 2e^x}$$

Jeden Summanden einzeln differenzieren und den Faktor stehen lassen.

$$\mathbf{f(x)' = (4x^3)' + \left(2\ln(x)\right)' + (x^{-2})' + (2e^x)'}$$

Den negativen Exponenten mit $\mathbf{n = -2}$ als Potenzfunktion differenzieren.

$$\mathbf{f(x)' = (3 \cdot 4x^2) + \left(2\frac{1}{x}\right) - (2x^{-3}) + (2e^x)}$$

Den negativen Exponenten umschreiben und den Faktor $\mathbf{2}$ ausklammern.

$$\mathbf{f(x)' = 2\left(6x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + e^x\right)}$$

Beispiel 4.)

Die Ableitung mit der Produktregel bestimmen.

$(x) = x^3 \cdot \sin(x)$

Die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ bestimmen.

$f(x) = g(x) \cdot h(x) = x^3 \cdot \sin(x) \Rightarrow g(x) = x^3$ **und** $h(x) = \sin(x)$

Die Ableitungen von $g(x)$ und $h(x)$ ermitteln.

$g(x)' = 3x^2$ **und** $h(x)' = \cos(x)$

Die Produktregel anwenden um die Ableitung von $f(x)$ zu erhalten.

$f(x)' = g(x)' \cdot h(x) + h(x)' \cdot g(x) = 3x^2\sin(x) + \cos(x)x^3$

$f(x)' = x^2\left(3\sin(x) + x\cos(x)\right)$

Beispiel 5.)

Bestimmen Sie die Ableitung mit der Quotientregel.

$(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

Die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ bestimmen.

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x+1}{x^2+1} \Rightarrow g(x) = x + 1$ **und** $h(x) = x^2 + 1$

Die Ableitungen von $g(x)$ und $h(x)$ ermitteln.

$g(x)' = 1$ **und** $h(x)' = 2x$

Die Quotientenregel anwenden um die Ableitung von $f(x)$ zu erhalten.

$$f(x)' = \frac{g(x)' \cdot h(x) - h(x)' \cdot g(x)}{h(x)^2} = \frac{(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f(x)' = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

Beispiel 6.)

Die Ableitung mit der Kettenregel bestimmen.

$f(x) = [\ln(x+2)]^2$

Die Funktionen $g(h(x))$ und $h(x)$ bestimmen.

$$f(x) = g(h(x)) = [\ln(x+2)]^2 \Rightarrow h(x) = \ln(x+2)$$

Die Ableitungen von $g(h(x))$ und $h(x)$ ermitteln.

$$g(h(x))' = 2[\ln(x+2)] \text{ und } h(x)' = \frac{1}{(x+2)}$$

Die Kettenregel anwenden um die Ableitung von $f(x)$ zu erhalten.

$$f(x)' = g(h(x))' \cdot h(x)' = 2[\ln(x+2)] \cdot \frac{1}{(x+2)} = \frac{2[\ln(x+2)]}{(x+2)}$$

Beispiel 7.)

Die Tangentengleichung und die Normalengleichung bestimmen.

$$f(x) = \frac{3}{x} \; ; \; P\left(2\middle|\frac{3}{2}\right)$$

Die Ableitung $f(x_0)'$ den Funktionswert $f(x_0)$ und den x-Wert x_0 bestimmen.

$$f(x_0)' = -\frac{3}{x_0^2} \Rightarrow f(2)' = -\frac{3}{4} \text{ und } f(x_0) \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} \text{ und } x_0 = 2$$

Die Gleichung der Tangente ermitteln.

$$y = f(x_0)'(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow -\frac{3}{4}(x-2) + \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}x + 3$$

Die Gleichung der Normalen ermitteln.

$$y = -\frac{1}{f(x_0)'}(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow -\frac{1}{-\frac{3}{4}}(x-2) + \frac{3}{2} = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4}{3}x - \frac{7}{6}$$

Aufgabe 1.) **Lösungen ab Seite 211**

Bestimmen Sie die Ableitung mit der Summen- und Faktorregel.

$$\text{a.) } f(x) = 5x^4 + 7x^2 + 2 \quad \text{b.) } f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4a^2}{x^3} - \frac{2b}{x^4} \quad \text{c.) } f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} - 4\sqrt[5]{x^2}$$

$$\text{d.) } f(x) = 2\ln(x) - 2e^x \quad \text{e.) } f(x) = 2\cos(x) + 3\sin(x) + 4 \quad \text{f.) } f(x) = 5^x - \log_7(x)$$

Aufgabe 2.)

Bestimmen Sie die Ableitung mit der Produktregel.

a.) $f(x) = (2x^3+5)(4x^4-10x)+(x^5-1)(2-8x^2)$ b.) $f(x)=(x-t)(x^2+t^2)$

c.) $f(x) = \cos(x)\cos(x)-\sin(x)\sin(x)$ d.) $f(x) = (x^3+\sqrt{x}+e^x)\sin(x)$

e.) $f(x) = (1-x)(1+x^2)(1+x)$ f.) $f(x) = -e^{-x}(2x^3-4x+1)$

g.) $f(x) = 2(-x^3+3x^2)e^x$ h.) $f(x) = x^3\ln(x)$

Aufgabe 3.)

Ermitteln Sie die Ableitung mit der Quotientenregel.

a.) $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ b.) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+4}$ c.) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^2+1)^3}$

d.) $f(x) = \dfrac{7x^5+x^2-2x}{x^7+3x}$ e.) $f(x) = \dfrac{2ax}{(x-a)^2}$ f.) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$

g.) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}}$ h.) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-18}$ i.) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{3x^3-5x}$

Aufgabe 4.)

Ermitteln Sie die Ableitung mit der Kettenregel

a.) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x+2}\ \ 2x^2-\ln 2\right)^4$ b.) $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{2x+4}\right)$ c.) $f(x) = e^{\sin(2x)}$

d.) $f(x) = \ln(x^2-4x+4)$ e.) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$ f.) $f(x) = e^{2x-x^2+\frac{x^4}{2}}$

g.) $f(x) = e^{3x}+4e^{-x^2}$ h.) $f(x) = (e^{-x}-t)^2$ i.) $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x+1}}$

Aufgabe 5.)

Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x)$.

a.) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$ b.) $f(x) = \ln\left(2+\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)$ c.) $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}\right)$

d.) $f(x) = \dfrac{e^{tx}-e^{-tx}}{e^{tx}+e^{-tx}}$ e.) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos(x)^2}}{\sin(x)}$ f.) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2\sin(x)^3$

Aufgabe 6.)

Bestimmen Sie die Tangenten- und Normalengleichung von f am Punkt P.

$\mathbf{a.)\ f(x) = (2x-1)\ln(x)\ ; x_0 = e\ \ b.)\ f(x) = \frac{2x}{x+2}\ \ ; x_0 = 2\ \ c.)\ f(x) = \sqrt{2x+1}\ \ ; x_0 = 4}$

6.4 Untersuchung von Funktionseigenschaften

Die bisher betrachteten **Funktionseigenschaften** wie Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, **Grenzwertverhalten der Funktion** an den Rändern ihres Definitionsbereiches, **Stetigkeit** und **Differenzierbarkeit** an eventuell vorhandenen Schnittstellen von abschnittsweise definierten Funktionen und das Monotonieverhalten einer Funktion, können mit dem eingeführten **Grenzwertbegriff** und der **ersten Ableitung** behandelt werden. Um Funktionen auf weitere wichtige Eigenschaften wie **Extrema**, **Krümmungsverhalten**, **Wendepunkte** und **Terrassenpunkte** hin zu untersuchen benötigt man **höhere Ableitungen**.

6.4.1 Höhere Ableitungen

Die **Ableitung** einer Funktion ist in typischen Fällen wieder eine Funktion, von der man die Ableitung bilden kann. Die **Ableitung** einer Funktion $\mathbf{f}$ ist $\mathbf{f}'$, was wieder eine Funktion ist. Die **Ableitung** von $\mathbf{f}'$ wird mit $\mathbf{f}''$ bezeichnet. Das ist auch wieder eine Funktion, sie wird als **zweite Ableitung** von $\mathbf{f}$ bezeichnet, oder als Ableitung zweiter Ordnung. Die **zweite Ableitung** von $\mathbf{f}$ ist also die Ableitung der Ableitung von $\mathbf{f}$. Die Regeln zur Bildung der zweiten Ableitung sind genau dieselben, die man auch bei der Bildung der ersten Ableitung anwendet. Analog kann man auch die dritte, vierte oder eine noch **höhere Ableitung** bilden; diese kann man mit $\mathbf{f}'''$, $\mathbf{f}''''$, bezeichnen. Die Zahl der **Striche** gibt die **Ordnung** der Ableitung an. Um die „normale” Ableitung sprachlich klar von den **höheren Ableitungen** zu unterscheiden, nennt man sie in diesem Zusammenhang **erste Ableitung**.

Definition: Höhere Ableitungen

Die Funktion $\mathbf{f: D \to R}$ sei differenzierbar.

Falls $\mathbf{f}'$ differenzierbar ist, nennen wir $\mathbf{f}'' := (\mathbf{f}')'$ die 2. Ableitung von $\mathbf{f}$, und $\mathbf{f}$ heißt zweimal differenzierbar.

**Analog erhält man die höheren Ableitungen $\mathbf{f}''' = \mathbf{f}^{(3)}, \mathbf{f}^{(4)}$, …, und allgemein die $\mathbf{n \in N}$ $\mathbf{n}$-te Ableitung $\mathbf{f}^{(n)}$ falls $\mathbf{f}^{(n-1)}$ weiterhin differenzierbar ist.
Die Funktion heißt dann $\mathbf{n}$-mal differenzierbar.**

Beispiel 7.)

Die erste, zweite und dritte Ableitung von $f(x)$ bestimmen.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

Die erste Ableitung $f(x)'$ mit der Quotientenregel bestimmen.

$$f(x)' = \frac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^3+4x-4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Die zweite Ableitung $f(x)''$ mit der Quotientenregel aus der ersten Ableitung $f(x)'$ bestimmen.

$$(f(x)')' = f(x)'' = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x\big(4x(x^2+1)\big)}{(x^2+1)^4} = \frac{4\cancel{(x^2+1)}[(x^2+1) - 4x^2]}{\cancel{(x^2+1)^4}}$$

$$f(x)'' = \frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$$

Die dritte Ableitung $f(x)'''$ mit der Quotientenregel aus der zweiten Ableitung $f(x)''$ bestimmen.

$$(f(x)'')' = f(x)''' = \frac{-24x(x^2+1)^3 - (-12x^2+4)6x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6}$$

$$f(x)''' = \frac{\cancel{(x^2+1)^2}(-24x(x^2+1) + (12x^2-4)6x)}{\cancel{(x^2+1)^6}} = \frac{-24x^3-24x+72x^3-24x}{(x^2+1)^4}$$

$$f(x)''' = \frac{48x^3-48x}{(x^2+1)^4} = \frac{48x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$$

6.4.2 Monotonieverhalten einer Funktion

Die Untersuchung von Funktionen auf **Monotonie** ist oft nicht einfach. Ist die Funktion f aber **differenzierbar,** dann liefert der Zusammenhang zwischen der **Monotonie** von f und der **Tangentensteigung** f' den nachfolgenden Satz für Monotonie und für strenge Monotonie:

Anschaulich bedeutet das: Wird der **x-Wert** größer, so wird bei einer **streng monoton steigenden** Funktion auch der Funktionswert $f(x)$ größer. Genauso nennt man eine Funktion **streng monoton fallend**, wenn die Funktionswerte bei wachsendem $f(x)$ kleiner werden.

Sei $\mathbf{f}$ eine im Intervall $\mathbf{I}$ differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$ folgender Satz:

Satz: Zusammenhang zwischen Monotonie und der 1. Ableitung

Die Funktion ist streng monoton steigend, wenn gilt:

Ist $\mathbf{f(x)' > 0}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$, so ist $\mathbf{f(x)}$ im Intervall I streng monoton steigend.

Die Funktion ist streng monoton fallend, wenn gilt:

Ist $\mathbf{f(x)' < 0}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$, so ist $\mathbf{f(x)}$ im Intervall I streng monoton fallend.

Beispiel 8.)

Das Monotonieverhalten der Funktion $\mathbf{f(x)}$ ermitteln.

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x}$$

Die Funktion auf streng monoton steigend mit der 1. Ableitung untersuchen.

$$\mathbf{f(x)' = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 3)}$$

Die quadratische Ungleichung lösen.

$$\mathbf{x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow f(x)' = \frac{3}{2}\big((x-1)(x-3)\big)}$$

$$\mathbf{f(x)' > 0 \Rightarrow (x-1) > 0 \text{ und } (x-3) > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ und } x > 3 \Rightarrow x > 3}$$

$$\mathbf{f(x)' > 0 \Rightarrow (x-1) < 0 \text{ und } (x-3) < 0 \Rightarrow x < 1 \text{ und } x < 3 \Rightarrow x < 1}$$

Im Intervall $\mathbf{]-\infty; 1[}$ und $\mathbf{]3; \infty[}$ ist die Funktion $\mathbf{f}$ streng monoton steigend.

Die Funktion auf streng monoton fallend mit der 1. Ableitung untersuchen.

$$\mathbf{f(x)' = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} < 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 3)}$$

Die quadratische Ungleichung lösen.

$$\mathbf{x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow f(x)' = \frac{3}{2}\big((x-1)(x-3)\big)}$$

$$\mathbf{f(x)' < 0 \Rightarrow (x-1) > 0 \text{ und } (x-3) < 0 \Rightarrow x > 1 \text{ und } x < 3}$$

Im Intervall $\mathbf{]1; 3[}$ ist die Funktion $\mathbf{f}$ streng monoton fallend.