



# Mathematik

## Fachhochschulreife an Berufskollegs

Baden-Württemberg

mit Kurzbeschreibung von GeoGebra

Autoren:

Josef Dillinger

Bernhard Grimm

Dr. Frank-Michael Gumpert

Gerhard Mack

Katharina Schuster

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 70018

## Autoren des Buches „Mathematik Fachhochschulreife an Berufskollegs Baden-Württemberg“

Josef Dillinger	Hausen
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Dr. Frank-Michael Gumpert	Stuttgart
Gerhard Mack	Esslingen
Katharina Schuster	Sindelfingen, Böblingen

## Lektorat:

Bernhard Grimm

## Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2021

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-7585-7001-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2021 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Layout und Satz: Daniela Schreuer, 78256 Steißlingen  
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald  
Umschlagfoto: © CenturionStudio.it – stock.adobe.com  
Druck: RCOM Print GmbH, 97222 Würzburg-Rimpar

## Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch erfüllt die Vorgaben der Bildungspläne zum Erwerb der Fachhochschulreife, die mit Beginn des Schuljahres 2017/2018 in Baden-Württemberg in Kraft getreten sind.

Das Buch richtet sich an Schüler\*innen, die an allen beruflichen Schulen in Baden-Württemberg den Fachhochschulreife-Abschluss anstreben. Dies betrifft alle 1-jährigen, 2-jährigen und 3-jährigen Berufskollegs an gewerblich-technischen, kaufmännisch-wirtschaftlichen und haus- und landwirtschaftlichen beruflichen Schulen.

Das Buch enthält alle erforderlichen Inhalte, die zum Erwerb der Fachhochschulreife notwendig sind, und stützt sich dabei auf den Lehrplan für das 1BKFH. Der Seitenumfang ist so gewählt, dass das Buch in der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit vollständig durchgearbeitet werden kann.

Um die Mathematik mit der Alltagserfahrung in Verbindung zu bringen, werden die mathematischen Inhalte in der Regel schülergerecht an praktischen Beispielen anwendungsbezogen eingeführt und behandelt. Dabei kommt jedoch das theoretische, innermathematische Arbeiten mit Symbolen, Schaubildern, Formeln und der Sprache der Mathematik nicht zu kurz.

Durch gezielte Übungsaufgaben werden die Schüler\*innen darin gefördert, Ergebnisse darzustellen, zu präsentieren und zu interpretieren, reale Vorgänge mathematisch zu modellieren und Problemlösefähigkeiten zu entwickeln. Dadurch sollen die Schüler\*innen zur Studierfähigkeit geführt werden. Die Lösungen der Aufgaben sind stets auf derselben Buchseite angegeben, wodurch eine Selbstorganisation des Lernprozesses auch in kooperativen Lerngruppen ermöglicht wird. Darüber hinaus kann eine bedarfsorientierte Binnendifferenzierung durchgeführt werden, indem Schüler\*innen ohne Unterstützungsbedarf eigenständig und selbstkontrolliert arbeiten können, während der Lehrer gezielt die anderen Schüler\*innen betreut.

Die schriftliche Abschlussprüfung im Fach Mathematik zur Fachhochschulreife enthält zwei Prüfungsteile. Ein Teil ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten, der andere mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner, der jedoch nicht programmierbar und nicht grafikfähig ist. Deshalb enthält dieses Buch ein Kapitel Prüfungsvorbereitung, in welchem die Schüler\*innen gezielt auf die beiden unterschiedlichen Prüfungsteile vorbereitet werden.

Zur Stärkung der digitalen Medienkompetenz enthält das Buch ein Kapitel, in welchem erste Schritte mit dem digitalen Mathematikwerkzeug Geogebra trainiert werden können, sowie die Beschreibungen mehrerer Apps für den Tablet-Einsatz, um z. B. mathematische Inhalte zu einem Thema als Mindmap zu strukturieren.

Schüler\*innen, deren Realschulzeit schon länger zurückliegt, haben die Möglichkeit, im Kapitel G die zum Gesamtverständnis erforderlichen Grundlagen wieder in Erinnerung zu bringen. Das Kapitel P enthält lehrplangemäß Projektvorschläge zur fachlichen Vertiefung.

Ergänzend zu diesem Buch stehen ein didaktisch aufbereiteter Löser mit Lösungsschritten sowie eine Formelsammlung zur Verfügung.

- „Formelsammlung Mathematik für die Fachhochschulreife“ ISBN 978-3-8085-8514-6 Europa-Nr.: 85129
- „Lösungen Mathematik Fachhochschulreife an Berufskollegs“ ISBN 978-3-8085-7227-2 Europa-Nr.: 72272

Wir wollen dieses Buch für den Mathematikunterricht bestmöglich weiterentwickeln. Deshalb freuen wir uns über Anregungen und Verbesserungsvorschläge unter: [info@europa-lehrmittel.de](mailto:info@europa-lehrmittel.de)

## Inhaltsverzeichnis

Mathematische Fachbegriffe .....	6
Aufbau des Buches .....	8

### G Grundlagen

G1 Zahlenmengen und ihre Elemente .....	9
G2 Koordinatensystem und Intervalle .....	10
G3 Algebraische Grundlagen .....	11
G4 Flächenberechnungen .....	19
G5 Volumenberechnung .....	22

### 1 Funktionen, deren Schaubilder und Gleichungen

1.1 Funktionsbegriff .....	26
1.2 Lineare Funktionen .....	28
1.2.1 Proportionale Funktionen .....	28
1.2.2 Allgemeine lineare Funktionen .....	30
1.2.3 Steigungswinkel $\alpha$ und Schnittwinkel $\varphi$ .....	32
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	35
1.3 Quadratische Funktionen .....	36
1.3.1 Parabeln mit dem Scheitel im Ursprung .....	36
1.3.2 Verschieben von Parabeln .....	37
1.3.3 Scheitelform und Normalform .....	38
1.3.4 Nullstellenberechnung .....	40
1.3.5 Bestimmen von Funktionsgleichungen .....	43
1.3.6 Schnittpunkte von Schaubildern .....	44
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	47
1.4 Ganzrationale Funktionen höheren Grades .....	48
1.4.1 Potenzfunktionen .....	48
1.4.2 Schaubilder und Gleichungen .....	49
1.4.3 Nullstellenberechnungen .....	55
1.4.4 Gemeinsame Punkte von Schaubildern .....	62
1.4.5 Strecken und Verschieben von Schaubildern .....	63
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	67
1.5 Exponentialfunktionen .....	68
1.5.1 Wachstums- und Zerfallsprozesse .....	68
1.5.2 Natürliche Exponentialfunktionen .....	69
1.5.3 Logarithmen und Exponentialgleichungen .....	72
1.5.4 Schnittpunktberechnungen .....	74
1.5.5 Modellierung exponentieller Prozesse .....	76
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	79
1.6 Trigonometrische Funktionen .....	80
1.6.1 Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck .....	80
1.6.2 Sinus und Kosinus am Einheitskreis .....	82
1.6.3 Sinusfunktion und Kosinusfunktion .....	85
1.6.4 Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion .....	86
1.6.5 Trigonometrische Gleichungen .....	89
Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	93

<b>2</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme LGS</b>	
2.1	Aufstellen von LGS .....	94
2.2	Lösungsverfahren .....	95
2.3	Lösungsvielfalt .....	100
	Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	105
<b>3</b>	<b>Differenzialrechnung</b>	
3.1	Änderungsraten und Ableitungen .....	106
3.1.1	Änderungsraten .....	106
3.1.2	Erste Ableitung $f'$ .....	108
3.1.3	Höhere Ableitungen .....	113
3.2	Kurvendiskussion .....	116
3.2.1	Extrempunkte und Wendepunkte .....	116
3.2.2	Monotonie und Krümmungsverhalten .....	120
3.2.3	Tangenten und Sekanten .....	123
3.2.4	Untersuchen von Kurven .....	126
	Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	131
3.3	Ermittlung von Funktionstermen .....	132
	Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	139
3.4	Extremwertrechnung .....	140
3.4.1	Lokale Extremwerte .....	140
3.4.2	Absolute und lokale Extremwerte .....	144
	Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	151
<b>4</b>	<b>Integralrechnung</b>	
4.1	Flächeninhaltsfunktionen .....	152
4.2	Das unbestimmte Integral .....	154
4.3	Das bestimmte Integral .....	157
4.4	Flächenberechnungen .....	159
	Erwerben Sie Prüfungskompetenz! .....	171
<b>5</b>	<b>Prüfungsvorbereitung</b>	
5.1	Prüfungsteil ohne Hilfsmittel .....	172
5.2	Prüfungsteil mit Hilfsmittel .....	176
	Musterprüfung .....	180
<b>6</b>	<b>Digitale Medienwerkzeuge</b>	
6.1	GeoGebra .....	182
6.2	Tablet-Unterricht .....	186
<b>P</b>	<b>Projektthemen</b>	
P1	Grundlagen der Vektorrechnung .....	190
P2	Grundlagen der Kostenrechnung .....	198
P3	Grundlagen der Stochastik .....	206
	Mathematische Zeichen und Formelzeichen .....	214
	Sachwortverzeichnis .....	216

## Mathematische Fachbegriffe

### Ableitungsfunktion

Ist die Funktion  $f'(x)$ , deren Werte die Steigungen des Schaubildes  $K_f$  der Funktion  $f$  angeben.

### AchSENSCHNITTPUNKTE

Schnittpunkte von Schaubildern mit den Koordinatenachsen, z. B. der  $x$ -Achse,  $y$ -Achse oder  $z$ -Achse.

### Äquivalenzumformung

Umformung von Gleichungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

### ARKUS-FUNKTIONEN

Die Arkus-Funktionen, z. B.  $\arcsin(x)$ ,  $\arctan(x)$  und  $\arccos(x)$ , sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen  $\sin(x)$ ,  $\tan(x)$  und  $\cos(x)$ .

### Asymptote

Eine Gerade, der sich ein ins Unendliche verlaufendes Schaubild beliebig nähert.

### Biquadratische Gleichung

Eine Gleichung vierten Grades mit nur geradzahligen Exponenten:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ .

### Definitionsmenge

Menge der  $x$ -Werte, die in den Funktionsterm eingesetzt werden dürfen, auch Definitionsbereich genannt.

### Differenzenquotient

Die Steigung einer Sekanten, die das Schaubild einer Funktion in zwei Punkten schneidet.

### Differenzialquotient

Grenzwert des Differenzenquotienten. Entspricht der Steigung der Tangente an ein Schaubild.

### Differenzierbarkeit von Funktionen

Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle der Definitionsmenge  $D$  eine eindeutig bestimmte Tangente mit einer endlichen Steigung hat.

### e-Funktion

Exponentialfunktion mit der Basis  $e$ , auch natürliche Exponentialfunktion genannt, z. B.  $f(x) = e^x$ .

### Einheitskreis

Ein Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

### Exponentialfunktion

Eine Funktion, bei der die Variable  $x$  im Exponenten steht, z. B.  $f(x) = 2^x$ . Mit Exponentialfunktionen werden Wachstums- und Zerfallsprozesse beschrieben.

### Extremstelle

Die Stelle  $x$ , an der eine Funktion in einer lokalen Umgebung ihren größten oder kleinsten  $y$ -Wert annimmt, auch Hochpunkt oder Tiefpunkt genannt.

### Funktion

Eindeutige Zuordnung von Elementen.

### GANZEN ZAHLEN $\mathbb{Z}$

Sie können positiv, negativ oder null sein.

### Ganzrationale Funktionen

Bestehen aus der Addition verschiedener Potenzfunktionen.

### Gerade

Das Schaubild für die Darstellung der linearen Funktion heißt Gerade.

### Gleichung

Eine Gleichung entsteht durch Verbindung zweier Terme durch ein Gleichheitszeichen.

### Integrieren

Eine abgeleitete Funktion wieder in die ursprüngliche Form zurückführen.

### Irrationale Zahlen

Dezimalzahlen mit unendlich vielen, nichtperiodischen Nachkommastellen, z. B.  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{2}$ .

### Kartesische Koordinaten

Mit Koordinaten lässt sich die Lage von Punkten in einer Ebene, z. B.  $(1|2)$ , oder im Raum, z. B.  $(1|2|3)$ , eindeutig festlegen und darstellen.

### Konstante Funktion

Funktionswert bleibt für alle Werte  $x$  konstant, z. B.  $f(x) = 2$ .

### Koordinatensystem

Achsen stehen senkrecht aufeinander und haben die Einheit 1 LE.

### Krümmungsverhalten einer Funktion

Die Krümmung gibt den Verlauf des Schaubildes einer Funktion an, z. B. linksgekrümmt und/oder rechtsgekrümmt.

### Lineare Funktion

Ganzrationale Funktion ersten Grades.

### Lineares Gleichungssystem LGS

System von Lineargleichungen, deren Variablen die Hochzahl 1 enthalten.

## Logarithmische Funktion

Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion, z. B.  
 $f(x) = \ln(x)$ .

## Logarithmus

Durch Logarithmieren berechnet man die Hochzahl einer Potenz, z. B.  $\lg(100) = 2$ .

## Monotonie

Gibt den Verlauf eines Schaubildes bezüglich ihrer Steigung an, z.B. monoton steigend/fallend.

## Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Positive, ganze Zahlen einschließlich der Zahl Null.  
 $\mathbb{N}^*$  ist die Menge  $\mathbb{N}$  ohne der Zahl Null:  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

## Nummerische Integration

Näherungsweise Berechnung des Flächeninhaltes, z. B. durch Auszählen von elementaren Teilflächen, wie Rechtecken oder Trapezen. Sie wird angewendet, wenn keine Stammfunktion bekannt ist.

## Nullstellen

Die  $x$ -Werte der Schnittpunkte eines Schaubildes mit der  $x$ -Achse.

## Orthogonal

Rechtwinklig. Orthogonale (rechtwinklige) Geraden haben einen Winkel von  $90^\circ$  zueinander.

## Parabel

Schaubild einer quadratischen Funktion.

## Parameter

Platzhalter für Zahlen aus einer Zahlenmenge, auch Variable genannt.

## Polynom

Eine andere Bezeichnung für eine ganzrationale Funktion.

## Potenz

Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren.

## Potenzfunktion

Funktion von der Form  $f(x) = x^n$ .

## Quadranten

Zeichenebenen im Koordinatensystem.

## Quadratische Gleichung

Eine Gleichung zweiten Grades:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

## Quadratwurzel

Beim Wurzelziehen (Radizieren) wird der Wert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Das Ergebnis einer Quadratwurzel ist immer größer gleich null.

## Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind.

## Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Zahlen, die rational oder irrational sind.

## Relation

Eindeutige oder mehrdeutige Zuordnung von Elementen.

## Sattelpunkt, Terrassenpunkt

Punkt im Schaubild einer Funktion mit waagerechter Tangente, an dem sich die Krümmung ändert, z. B. von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve.

## Satz vom Nullprodukt

Lösungsverfahren von Gleichungen in Produktform. Ein Produkt wird null, wenn einer der Faktoren null wird.

## Skalar

Größe, die durch einen bestimmten reellen Zahlenwert festgelegt ist.

## Steigung

Verhältnis des  $\Delta y$ -Wertes zum  $\Delta x$ -Wert eines Steigungsdreiecks.

## Term

Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen kann.

## Trigonometrische Funktion

Winkelfunktionen, z. B.  $f(x) = \sin(x)$ .

## Umkehrfunktion

Funktion, bei der die Zuordnung der Variablen, z. B.  $x$  und  $y$ , vertauscht wird.

## Variable

Buchstaben, z. B.  $x$ ,  $y$  oder  $z$ , an deren Stelle Zahlen aus der Grundmenge gesetzt werden.

## Vektor

Physikalische oder mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird und durch Richtung und Betrag festgelegt ist.

## Wendepunkt

Punkt im Schaubild einer Funktion, an dem sich die Krümmung ändert, z. B. von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve.

## Wertemenge

Alle  $y$ -Werte, die sich ergeben, wenn  $x$ -Werte aus der Definitionsmenge in einen Funktionsterm eingesetzt werden.

## Aufbau des Buches

Die für die schriftliche Prüfung maßgebenden Kapitel sind gleich benannt wie die Kapitel im Bildungsplan:

- 1 Funktionen, deren Schaubilder und Gleichungen**
- 2 Lineare Gleichungssysteme LGS**
- 3 Differentialrechnung**
- 4 Integralrechnung**

Sofern keine Zahlenmenge angegeben ist, wird bei allen Rechnungen die Zahlenmenge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen verwendet.

Jedes Unterkapitel, wie z.B. „**1.3 Quadratische Funktionen**“, enthält:

- grün markierte Beispielrechnungen,
- orange unterlegte zentrale Merksätze und
- grau unterlegte Formeln.

### Beispiel: Parabeln mit $f(x) = ax^2$ und $a < 0$

Darzustellen sind die Parabeln der Funktionen  $m$  und  $n$  mit  $m(x) = -x^2$  und  $n(x) = -0,25x^2$ .

### Lösung: Bild 3

$$f(x) = ax^2$$

$a$  Streckfaktor

Eine Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = ax^2 + bx + c$  und  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  heißt ...

In jedem Unterkapitel folgt nach meistens 2 bis 4 Seiten eine ganze Übungsseite mit dem Titel:

### „Festigen Sie Ihr Wissen!“

Alle Übungsaufgaben im Buch sind durchgängig

- blau unterlegt.

Zu allen Aufgaben sind die **Lösungen** für die Selbstkontrolle angegeben.

### Festigen Sie Ihr Wissen!

1. Das Schaubild  $K_f$  einer quadratischen Funktion hat den Scheitelpunkt im Koordinatenursprung  $O(0|0)$ . Bestimmen Sie den Steckfaktor  $a$ , wenn das Schaubild außerdem folgenden Punkt  $P$  besitzt.

- |                   |                    |                  |
|-------------------|--------------------|------------------|
| a) $P(1 0,4)$     | b) $P(1 -2,3)$     | c) $P(1 2,8)$    |
| d) $P(-0,5 0,25)$ | e) $P(-1,5 -2,25)$ | f) $P(-2 16)$    |
| g) $P(-3 4,5)$    | h) $P(-1,5 13,5)$  | i) $P(2,5 1,35)$ |

**Lösungen:** 1. a) 0,4 b) -2,3 c) 2,8 d) 1 e) -1 f) 4 g) -3 h) 6 i) 0,

Jedes Unterkapitel besitzt einen tabellarischen Rückblick mit der Überschrift:

### Das soll ich für die Prüfung können:

In einer Tabelle werden **Prüfungskompetenzen** aufgelistet, die für ein erfolgreiches Abschneiden in der Prüfung notwendig sind.

### Das soll ich für die Prüfung können:

#### I. Den Einfluss des Streckfaktors ... erklären!

Geg.:  $f(x) = a(x^2 - 2x)$

Ges.: Einfluss von  $a = -2$

1. Polarität  $-2 < 0$ :  
nach unten offen

#### II. Die Gleichung einer quadrati ... erstellen!

Am Ende jedes Unterkapitels folgt auf jede Seite „**Das soll ich für die Prüfung können**“ eine Seite:

### Erwerben Sie Prüfungskompetenz!

Diese Seite enthält Aufgaben, in welchen gelernnte Prüfungskompetenzen erprobt werden. Zu jeder Aufgabe werden die **Prüfungskompetenzen** angegeben, die zur Lösung der Aufgabe erforderlich sind.

### Erwerben Sie Prüfungskompetenz!

#### 1. zu I und II

Ordnen Sie den in Bild 1 dargestellten Schaubildern A bis E folgende Funktionen mit Begründung zu.

- Funktion  $f$  mit  $f(x) = -0,375 \cdot (x + 3)^2 - 1$ .
- Funktion  $g$  mit  $g(x) = 0,5 \cdot (x + 3)^2 - 1$ .

**Lösungen:** 1. a) E, S( $-3|-1$ ),  $a < 0$  und  $|a| < 1$  b) D, S( $-3|-1$ ),  $a$

# G Grundlagen

## G1 Zahlenmengen und ihre Elemente

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Mengen werden in beschreibender oder aufzählender Form oder grafisch mit Mengendiagrammen (Venn-Diagrammen) angegeben (Bild 1 und Tabelle 1).

### Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die Menge  $\mathbb{N}$  beinhaltet alle Zahlen, die zum Abzählen benötigt werden, einschließlich der Zahl Null.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

### Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Menge  $\mathbb{Z}$  enthält die natürlichen Zahlen und alle negativen ganzen Zahlen. Damit ist die Rechenoperation Subtraktion uneingeschränkt möglich.  $\mathbb{N}$  ist Teilmenge von  $\mathbb{Z}$ , das schreibt man:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

### Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Erweiterung der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen machen die Rechenoperation Division (ausgenommen mit der Zahl Null) möglich. Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \right\} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

### Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Zahlen, die nicht durch einen Bruch darstellbar sind, haben unendlich viele, nicht periodische Nachkommastellen. Diese Zahlen bezeichnet man als irrationale Zahlen  $\mathbb{I}$ , z. B.  $\pi$ ;  $e$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $\ln(2)$ . Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \quad (\text{Vereinigungsmenge von } \mathbb{Q} \text{ und } \mathbb{I})$$

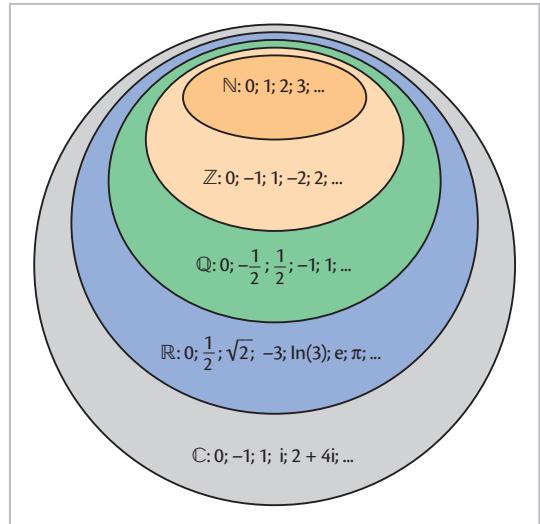


Bild 1: Zahlenmengen

### Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Die Gleichung der Form  $x^2 + 1 = 0$  hat in  $\mathbb{R}$  keine Lösung. Aus diesem Grund hat man die imaginäre Einheit eingeführt und die Zahlenmenge  $\mathbb{R}$  um die imaginäre Zahlenmenge erweitert. Beispiele für imaginäre Zahlen sind z. B.  $-i$  oder  $2i$  (zweimal die imaginäre Zahl  $i$ ). Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi\} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Komplexe Zahlen  $z$  bestehen aus einem Realteil  $a = \operatorname{Re}(z)$  und einem Imaginärteil  $b = \operatorname{Im}(z)$ . Die komplexen Zahlen können wegen der imaginären Anteile nicht mehr am Zahlenstrahl dargestellt werden. Ihre Darstellung erfolgt in der komplexen Zahleebene (Gauß'sche<sup>1</sup> Ebene). Diese besitzt eine reelle Achse  $\operatorname{Re}(z)$  und eine imaginäre Achse  $i \cdot \operatorname{Im}(z)$ . Komplexe Zahlen werden oft mit Polarkoordinaten beschrieben.

Tabelle 1: Zusammenfassung der Zahlenmengen

Zahlenmenge	Symbol	Zahlenart	Beispiele
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	Positive ganze Zahlen	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	Negative und positive ganze Zahlen	...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	Ganze Zahlen und Bruchzahlen	...; $-\frac{7}{8}$ ; -0,5; 0,2; $\frac{3}{7}$ ; $\frac{10}{11}$ ; 13; ...
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	Rationale und irrationale Zahlen	...; $-\sqrt{3}$ ; -0,5; 0,7; $\frac{3}{7}$ ; $\sqrt{2}$ ; $\pi$ ; 7; ...
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	Reelle und imaginäre Zahlen	...; $-2i$ ; $\sqrt{-1}$ ; $-1 + 2i$ ; $3 + i$ ; $5 + 2i$ ; ...

<sup>1</sup> Carl Friedrich Gauß, dt. Mathematiker 1777 bis 1855

## G2 Koordinatensystem und Intervalle

### Rechtwinkliges Koordinatensystem

Zur Festlegung eines Punktes in einer Ebene wird das rechtwinklige Koordinatensystem verwendet. Die waagrechte Achse heißt Abszisse, die senkrechte Achse heißt Ordinate. Auf der Abszisse werden die Zahlen der Variablen  $x$  abgetragen, deshalb nennt man sie auch  $x$ -Achse. Auf der Ordinate trägt man die Zahlen der Variablen  $y$  ab, deshalb nennt man sie auch  $y$ -Achse. Der Schnittpunkt beider Achsen heißt Nullpunkt oder Ursprung  $O(0|0)$  (Bild 1).

Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in vier Quadranten ein. Sie werden gegen den Uhrzeigersinn mit den römischen Ziffern I bis IV bezeichnet.

### Beispiel: Quadranten und Wertepaare im Schaubild

In ein rechtwinkliges Koordinatensystem sind

- die Bezeichnung der Quadranten einzutragen,
- folgende Wertepaare der Wertetabelle einzuziehen,

$x$	3	-2	-3	2
$y$	2	3	-2	-3

- die Vorzeichen der Koordinaten in den vier Quadranten anzugeben.

### Lösung: Bild 2

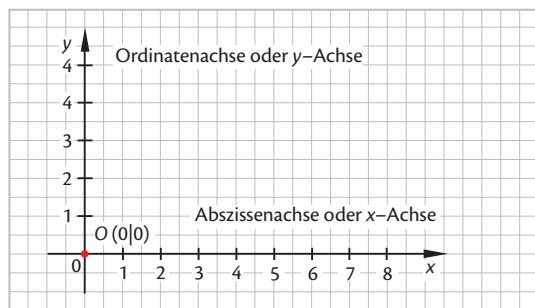


Bild 1: Rechtwinkliges Koordinatensystem

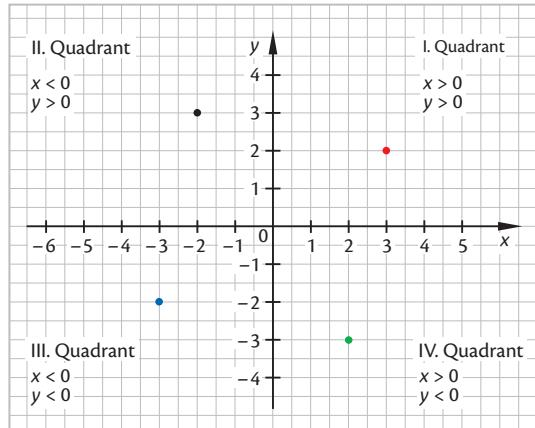


Bild 2: Wertepaare im Koordinatensystem

Das Koordinatensystem besteht aus zwei zueinander senkrechten Achsen, die als  $x$ -Achse und  $y$ -Achse bezeichnet werden. Der Schnittpunkt der beiden Achsen wird als Ursprung  $O$  bezeichnet.

Durch die Angabe der Koordinaten wird die Lage eines Punktes, z. B.  $P(x_p|y_p)$ , festgelegt.

### Intervalle

Zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}$  werden häufig als Intervalle angegeben (Tabelle 1).

### Beispiel: Intervallbestimmung

Aus dem Schaubild in Bild 3 sind im Bereich von 0 bis  $5\pi$  die Intervalle zu bestimmen, in denen die Funktionswerte positiv sind.

Lösung: Intervalle  $[0; \pi]$  und  $[2\pi; 3\pi]$  und  $[4\pi; 5\pi]$

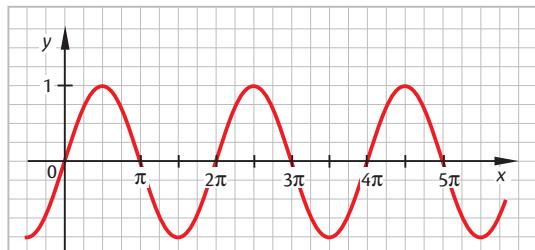


Bild 3: Schwingung

Bei **abgeschlossenen** Intervallen gehören die beiden Randwerte  $a$  und  $b$  zur Wertemenge dazu. Gehört nur ein Randwert zur Menge dazu, nennt man es **halboffen**, gehört keiner der Randwerte dazu, nennt man es **offen**.

Tabelle 1: Intervalle und Intervallschreibweise

Intervall	Sprechweise und Art des Intervalls	Intervall als Ungleichung
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall von $a$ bis $b$	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}$
$]a, b]$	Linksseitig offenes, rechtsseitig abgeschlossenes Intervall von $a$ bis $b$	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}   a < x \leq b\}$
$[a, b[$	Linksseitig abgeschlossenes, rechtsseitig offenes Intervall von $a$ bis $b$	$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x < b\}$
$]a, b[$	Offenes Intervall von $a$ bis $b$	$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}   a < x < b\}$

## G3 Algebraische Grundlagen

### Gleichungen

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm  $T_l$  und aus einem Rechtsterm  $T_r$ . Terme enthalten Zahlen, Variablen oder beides.

Werden Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung  $T_l = T_r$ .

#### Beispiel: Gleichung

Der Linksterm  $T_l: x + 2$  und der Rechtsterm  $T_r: -4$  ist als Gleichung darzustellen.

*Lösung:*  $x + 2 = -4$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden (Tabelle 1). Diese Operation nennt man **Äquivalenzumformung**. Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage sein, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

#### Beispiel: Lösung einer Gleichung

Die Gleichung  $x + 2 = -4$  ist durch Äquivalenzumformung zu lösen.

*Lösung:* 
$$\begin{array}{ll} x + 2 = -4 & | -2 \\ x + 2 - 2 = -4 - 2 & \\ x = -6 & \end{array}$$

Ein Wert  $x$  einer Zahl heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von  $x$  in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

### Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus einer Grundmenge ausschließen (Tabelle 2). Die Bezeichnung ist D.

#### Beispiel: Definitionsmenge

Die Definitionsmenge folgender Terme ist zu bestimmen: a)  $T(x) = \frac{x+2}{x}$  b)  $T(x) = \sqrt{5-x}$

*Lösung:*

- a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b)  $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5; D = \{x | x \leq 5\}$

Unter der Definitionsmenge versteht man die Menge von Zahlen oder Elementen, die man in einen Term einsetzen darf, ohne ein Rechengesetz zu verletzen.

### Aufgaben:

1. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme für  $x \in \mathbb{R}$  an: a)  $T(x) = \frac{x}{x-2}$  b)  $T(x) = 2x + 2$  c)  $T(x) = \sqrt{2x-4}$
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen für  $x \in \mathbb{R}$ : a)  $6x - 4 = 6 + x$  b)  $4 - x \geq x + 6$

*Lösungen:* 1. a)  $D = \mathbb{R} \neq 2$  b)  $D = \mathbb{R}$  c)  $D = \{x | x \geq 2\}$  2. a)  $L = \{2\}$  b)  $L = \{x | x \leq -1\}$

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen

Rechenoperation	Beispiel
Addition	$\begin{array}{l} x - 5 = 0 \\ x - 5 + 5 = 0 + 5 \\ x = 5 \end{array} \quad   + 5$
Subtraktion	$\begin{array}{l} x + 7 = 0 \\ x + 7 - 7 = 0 - 7 \\ x = -7 \end{array} \quad   - 7$
Multiplikation	$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot x = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2 \\ x = 2 \end{array} \quad   \cdot 2$
Division	$\begin{array}{l} 2 \cdot x = 4 \\ \frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2} \\ x = 2 \end{array} \quad   : 2$

Tabelle 2: Einschränkung der Definitionsmenge in IR

Term	Einschränkung	Definitionsmenge
Bruchterm $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x+1}{x-1}$	$N(x) \neq 0$	$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ $D = \{x   x \neq 1\}$
Wurzelterm $T(x) = \sqrt{x-1}$	Radikant $\geq 0$	$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ $D = \{x   x \geq 1\}$

### Lösungsmenge

Alle Zahlen, die eine Aussageform in eine wahre Aussage übergehen lassen, bilden die Lösungsmenge L.

#### Beispiel: Lösungsmenge

Die Lösungsmenge folgender Gleichungen für  $x \in \mathbb{R}$  ist zu bestimmen: a)  $2x + 4 = 13 - x$  b)  $5 - x \geq 0$

*Lösung:*

- a)  $2x + 4 = 13 - x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3; L = \{3\}$
- b)  $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5; L = \{x | x \leq 5\}$

Unter der Lösungsmenge versteht man die Menge von Zahlen oder Elementen, die zu einer wahren Aussage führen.

**Binomische Formeln**

Bild 1 veranschaulicht die erste Binomische Formel. Das gesamte Quadrat mit den Seitenlängen  $(a+b)$  setzt sich aus dem roten Quadrat mit der Fläche  $a^2$ , dem gelben Quadrat mit der Fläche  $b^2$  und den beiden grünen Rechtecken mit den Flächen  $2ab$  zusammen. Damit ist:  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Beispiel: Erste Binomische Formel**

Zu berechnen ist a)  $(x+2)^2$  und b)  $(3x+5y)^2$ .

Lösungen:

a)  $(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

b)  $(3x+5y)^2 = 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + 25y^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

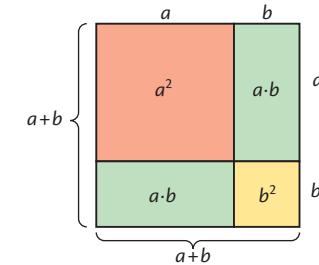


Bild 1: Erste Binomische Formel

**Erste Binomische Formel**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ergibt die Summe von ihren Quadraten mit ihrem doppelten Produkt.

Bild 2 veranschaulicht die zweite Binomische Formel. Das gesamte Quadrat hat die Seitenlänge  $a$  und die Fläche  $a^2$ . zieht man von dieser die beiden grünen Rechtecke mit der Fläche  $2 \cdot (a-b) \cdot b$  und das gelbe Quadrat mit Fläche  $b^2$  ab, verbleibt das rote Quadrat mit der Fläche  $(a-b)^2$ . Damit ist:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot (a-b) \cdot b - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Beispiel: Zweite Binomische Formel**

Zu berechnen ist a)  $(3a-4)^2$  b)  $(0,5+5u)^2$ .

Lösungen:

a)  $(3a-4)^2 = 9a^2 - 24a + 16$

b)  $(0,5+5u)^2 = 0,25 - 5u + 25u^2$

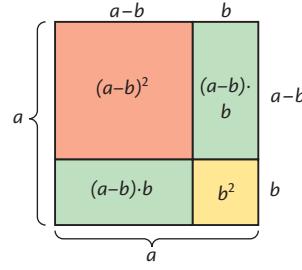


Bild 2: Zweite Binomische Formel

**Zweite Binomische Formel**

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Bild 3 veranschaulicht die dritte Binomische Formel. Die blaue Differenzfläche der Quadrate mit  $a^2$  und  $b^2$  im linken Teil der Grafik besteht aus zwei gleichgroßen Trapezflächen. Im rechten Teil der Grafik sind diese zu einem Rechteck mit den beiden Seitenlängen  $a+b$  und  $a-b$  zusammengesetzt. Damit ist:

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

**Beispiel: Dritte Binomische Formel**

Zu berechnen ist a)  $(x+2) \cdot (x-2)$  und b)  $(a^2-3) \cdot (a^2+3)$ .

Lösungen:

a)  $(x+2) \cdot (x-2) = x^2 - 4$

b)  $(a^2-3) \cdot (a^2+3) = a^4 - 9$

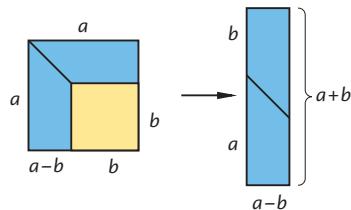


Bild 3: Dritte Binomische Formel

**Dritte Binomische Formel**

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Ob die Summe  $4x^2 + 22x + 121$  ein Binom ist, kann mithilfe der ersten Binomischen Formel geprüft werden:

$$4x^2 + 22x + 121 = (2x)^2 + 2 \cdot 11 \cdot x + (11)^2$$

Da die Terme nicht das doppelte Produkt von  $2x$  und  $11$  enthalten, liegt kein Binom vor. Es müsste lauten:

$$4x^2 + 44x + 121 = (2x + 11)^2$$

**Beispiel: Binom bestimmen**

Gesucht ist die Zahl  $c$  des Binoms  $4x^2 + 12x + c$ .

Lösung:

$$4x^2 + 12x + c = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + c \Rightarrow c = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

## Bruchrechnen

Der Wert eines echten Bruches ist immer kleiner als eins. Welcher der beiden Brüche  $\frac{4}{13}$  oder  $\frac{5}{17}$  der größere ist erkennt man, wenn die Brüche so erweitert werden, dass sie denselben Nenner besitzen (Bild 1). Beim Vergleichen der Nenner erkennt man, dass der Bruch  $\frac{4}{13}$  um den Wert  $\frac{3}{221}$  größer ist als der Bruch  $\frac{5}{17}$ .

Der Wert eines unechten Bruches ist größer gleich eins, d. h. der Nenner ist nicht kleiner als der Zähler, z. B.  $\frac{57}{38}$ . Da sowohl Zähler als auch Nenner ein Vielfaches von 19 sind, kann mit 19 gekürzt werden (Bild 2). Die Schreibweise  $1\frac{1}{2}$  bedeutet eins und ein halb, d. h. die Werte müssen addiert werden  $1 + \frac{1}{2}$ .

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen müssen die Brüche auf denselben Nenner (Hauptnenner) gebracht werden. Er ist im Idealfall das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, d. h. die kleinste Zahl, in der beide Nenner enthalten sind, z. B. die Zahl 36 bei den Nennern 12 und 18.

### Beispiel: Addition von Brüchen

Zu berechnen ist  $\frac{5}{12} + \frac{7}{18}$ .

Lösung:

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{36} = \frac{15 + 14}{36} = \frac{29}{36}$$

### Beispiel: Multiplikation von Brüchen

Zu berechnen ist  $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}$ .

$$\text{Lösung: } \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 3} = \frac{24}{12} = 2$$

Brüche werden multipliziert, indem man ihre Zähler multipliziert und ihre Nenner multipliziert.

Wird der Bruch  $\frac{3}{4}$  durch den Bruch  $\frac{6}{8}$  dividiert, wird der Operator durch einen Hauptbruchstrich ersetzt und mit  $\frac{8}{6}$  erweitert.

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 6} = \frac{48}{24} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6}$$

Aus der Division mit  $\frac{6}{8}$  wird eine Multiplikation mit  $\frac{8}{6}$ .

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{2}{2} = 1$$

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Erweitern mit 17

$$\frac{4}{13} = \frac{4 \cdot 17}{13 \cdot 17} = \frac{68}{221}$$

Erweitern mit 13

$$\frac{5}{17} = \frac{5 \cdot 13}{17 \cdot 13} = \frac{65}{221}$$

Bild 1: Erweitern echter Brüche

Kürzen mit 19

$$\frac{57}{38} = \frac{57 : 19}{38 : 19} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Bild 2: Kürzen eines unechten Bruches

Addition und Subtraktion

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \quad b, d \neq 0$$

### Beispiel: Subtraktion von Brüchen

Zu berechnen ist  $\frac{7}{12} - \frac{11}{18}$ .

Lösung:

$$\frac{7}{12} - \frac{11}{18} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 3 - 11 \cdot 2}{36} = \frac{21 - 22}{36} = -\frac{1}{36}$$

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad b, d \neq 0$$

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad b, d \neq 0$$

### Beispiel: Multiplikation von Brüchen

Zu berechnen ist  $\frac{13}{17} : \frac{26}{51}$ .

$$\text{Lösung: } \frac{13}{17} : \frac{26}{51} = \frac{13 \cdot 51}{17 \cdot 26} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

## Festigen Sie Ihr Wissen!

1. Zu welcher kleinstmöglichen Menge gehören folgende Zahlen?

- a) 4      b)  $-3$       c)  $1,5$       d)  $\sqrt{7}$   
 e)  $\pi$       f)  $14,3$       g)  $2 + 3i$

2. Welche Zahlen sind den Zahlenmengen in Bild 1 falsch zugeordnet?

3. Welche Aussagen sind falsch?

- a)  $\sqrt{13} \in \mathbb{R}$     b)  $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$     c)  $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$     d)  $0,3 \in \mathbb{N}$

4. In Bild 2 sind die Punkte A, B, C und D eingetragen.

- a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und D an.  
 b) In welchen Quadranten befinden sich die Punkte B und D?  
 c) Welcher Punkt wird im Koordinatensystem als Ursprung bezeichnet?  
 d) In welchen Quadranten wird der Punkt  $P(-2|-2)$  eingetragen?

5. Intervalle können in Klammenschreibweise oder als Ungleichung angegeben werden.

- a) Geben Sie das Intervall  $]3; 9]$  als Ungleichung an.  
 b) Gehören die Zahlen 3 und 9 zum Intervall  $]3; 9]$ ?  
 c) Ist die Zahl 4,5 Element des Intervalls  $]3; 9]$ , wenn die Zahlen Elemente von  $\mathbb{Q}$  sind?  
 d) Das Intervall  $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 5\}$  ist in der Klammenschreibweise anzugeben.

6. Für folgende Gleichungen ist die Lösung für  $x \in \mathbb{R}$  anzugeben.

- a)  $2x - 4 = 16 - 3x$       b)  $14 - 0,5x = -7,5x$   
 c)  $\frac{2}{5}x = 8$       d)  $-4 + 2x = 4 + 2x$

7. Die Definitionsmenge folgender Terme ist anzugeben.

- a)  $T(x) = 2x + 4$       b)  $T(x) = \frac{2}{2x+4}$   
 c)  $T(x) = \frac{5}{x^2+1}$       d)  $T(x) = \sqrt{10 - 2x}$

8. Die Lösungsmenge folgender Gleichungen ist anzugeben.

- a)  $2x + 4 = 16$       b)  $0,5x + 4 = 12 - 1,5x$   
 c)  $12 - x \geq 0$       d)  $12 - x \geq 6 + 2x$

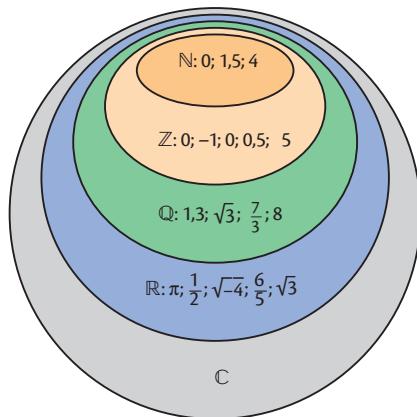


Bild 1: Zahlenmengen

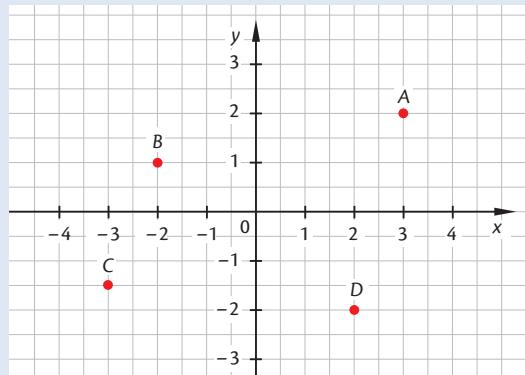


Bild 2: Punkte im Koordinatensystem

9. Folgende Terme sind mithilfe der Binomischen Formeln zu ersetzen.

- a)  $(2x - 4) \cdot (2x + 4)$       b)  $(3 - a) \cdot (3 - a)$   
 c)  $(x + 4) \cdot (-x + y)$       d)  $(\sqrt{2a} + x)^2$

10. Folgende Terme sind als Produkte anzugeben.

- a)  $1 - a^2$       b)  $25a^2 - 49$   
 c)  $4x^2 + 12x + 9$       d)  $a^2 - 4ab + 4b^2$

11. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

- a)  $\frac{5}{6} + \frac{7}{9} + \frac{7}{12}$       b)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{6} - \frac{2}{3}$   
 c)  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$       d)  $4ab : \frac{1}{2}a$   
 e)  $\frac{2x}{5a-3} - \frac{2}{5a+3} + \frac{10a-6}{25a^2-9}$   
 f)  $\frac{2}{a-1} + \frac{4}{a-2} + \frac{4a}{2a^2-6a+4}$

**Lösungen:** 1. a)  $\mathbb{N}$     b)  $\mathbb{Z}$     c)  $\mathbb{Q}$     d)  $\mathbb{R}$     e)  $\mathbb{R}$     f)  $\mathbb{Q}$     g)  $\mathbb{C}$  2.  $\mathbb{N}: 1,5; \mathbb{Z}: 0,5; \mathbb{Q}: \sqrt{3}; \mathbb{R}: \sqrt{-4}$  3. b) und d) 4. a)  $A(3|2)$ ,  $B(-2|1)$ ,  $C(-3|-1,5)$ ,  $D(2|-2)$   
 b) B: II. Quadrant, D: IV. Quadrant c)  $O(0|0)$  d) III. Quadrant 5. a)  $]3; 9] = \{x | 3 < x \leq 9\}$  b) 3 nicht c) ja d)  $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 5\} = [0; 5[$  6. a)  $x = 4$   
 b)  $x = -2$  c)  $x = 20$  d) keine Lösung 7. a)  $D = \mathbb{R}$  b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  c)  $D = \mathbb{R}$  d)  $D = \{x | x \leq 5\}$  8. a)  $L = \{6\}$  b)  $L = \{4\}$  c)  $L = \{x | x \leq 12\}$  d)  $L = \{x | x \leq 2\}$   
 9. a)  $4x^2 - 16$  b)  $a^2 - 6a + 9$  c)  $-x^2 + xy - 4x + 4y$  d)  $x^2 + 2x\sqrt{a} + 2a$  10. a)  $(1+a) \cdot (1-a)$  b)  $(5a+7) \cdot (5a-7)$  c)  $(2x+3) \cdot (2x+3)$   
 d)  $(a-2b) \cdot (a-2b)$  11. a)  $\frac{79}{36}$  b)  $\frac{8}{15}$  c)  $\frac{R_1+R_2}{R_1 \cdot R_2}$  d)  $8b$  e)  $\frac{10ax+6x}{25a^2-9}$  f)  $\frac{16a-16}{2a^2-6a+4}$

## Potenzerrechnen

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis  $a$  (Grundzahl) und dem Exponenten  $n$  (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist der Potenzwert  $b$ .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = a^n$$

$a$  Basis,  $a > 0$        $n$  Exponent       $b$  Potenzwert

$$a^n = b$$

$$a^0 = 1$$

Tabelle 1: Potenzgesetze

Regel, Definition	Potenzerterm
<b>Addition und Subtraktion</b> Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n = (r \pm s) \cdot a^n$
<b>Multiplikation bei gleicher Basis</b> Potenzen werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
<b>Multiplikation bei gleichem Exponenten</b> Potenzen werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
<b>Division bei gleicher Basis</b> Potenzen werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
<b>Division bei gleichem Exponenten</b> Potenzen werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
<b>Potenziieren</b> Potenzen werden potenziert, indem man ihre Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

## Beispiel: Potenzschreibweise

Gegeben ist das Produkt  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ . Es ist

- a) als Potenz zu schreiben und
- b) dessen Potenzwert anzugeben.

Lösung:

a)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$       b)  $2^5 = 32$

## Addition und Subtraktion von Potenzen

Gleiche Potenzen oder ihr Vielfaches lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen (Tabelle 1).

## Beispiel: Addition und Subtraktion

Die Potenzterme  $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$  sind zusammenzufassen.

Lösung:  $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3 = 6x^3 + 2y^2$

## Multiplikation von Potenzen

Potenzen gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Produkte ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

## Beispiel: Multiplikation

Das Produkt  $2^3 \cdot 2^2$  ist zu berechnen und der Potenzwert anzugeben.

Lösung:

$2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$  oder  $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

## Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder in dem man den Nennerexponent vom Zählerexponent subtrahiert.

## Beispiel: Division

Der Potenzterm  $\frac{2^5}{2^3}$  ist zu berechnen.

Lösung:  $\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

oder  $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

## Potenziieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

## Beispiel: Potenziieren von Potenzen

Der Potenzterm  $(2^2)^3$  ist zu berechnen.

Lösung:  $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 64$

oder  $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

## Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a Basis,  $a > 0$       n Exponent

## Beispiel: Exponentenschreibweise

Die Potenzterme a)  $2^{-3}$  und b)  $10^{-3}$  sind mit positivem Exponenten zu schreiben und der Potenzwert ist anzugeben.

Lösung:

$$\text{a)} 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125 \quad \text{b)} 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

## Beispiel: Physikalische Benennungen

Folgende physikalischen Benennungen sind mit umgekehrtem Exponenten zu schreiben.

$$\text{a)} m \cdot s^{-2} \quad \text{b)} U \cdot min^{-1} \quad \text{c)} \frac{m}{s}$$

Lösung:

$$\text{a)} m \cdot s^{-2} = \frac{m}{s^2} \quad \text{b)} U \cdot min^{-1} = \frac{U}{min} \quad \text{c)} \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$$

## Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder große Zahlen verwendet. Werte größer als 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner als 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (Bild 1 und Tabelle 1).

## Beispiel: Zehnerpotenzen

Folgende Benennungen sind als Zehnerpotenzen zu schreiben.

$$\text{a)} 20 \mu H \quad \text{b)} 10 \text{ ml} \quad \text{c)} 3 \text{ kHz}$$

Lösung:

$$\text{a)} 20 \cdot 10^{-6} \text{ H} \quad \text{b)} 10 \cdot 10^{-3} \text{ l} \quad \text{c)} 3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

## Potenzgesetze in Anwendung

### Beispiel: Flächen und Volumenberechnung

- Die Fläche des Quadrates mit  $a = 2 \text{ m}$  (Bild 2) und
- das Volumen des Würfels für  $a = 2 \text{ m}$  ist zu berechnen.

Lösung:

$$\text{a)} A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$$

$$A = 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} = 2^2 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} \text{b)} V &= a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = a^3 \\ &= 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} \\ &= 2^3 \text{ m}^3 = 8 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Merke:  $(-2)^2 = 4$       aber       $-2^2 = -4$

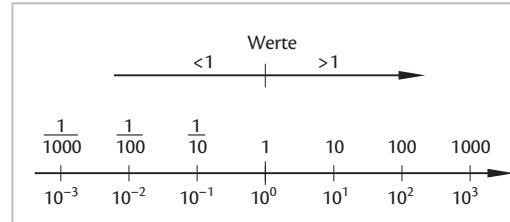


Bild 1: Zehnerpotenzen

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten
1 000 000 000	$10^9$	G (Giga)
1 000 000	$10^6$	M (Mega)
1 000	$10^3$	k (Kilo)
100	$10^2$	h (Hekto)
10	$10^1$	da (Deka)
1	$10^0$	–
0,1	$10^{-1}$	d (Dezi)
0,01	$10^{-2}$	c (Centi)
0,001	$10^{-3}$	m (Milli)
0,000 001	$10^{-6}$	$\mu$ (Mikro)
0,000 000 001	$10^{-9}$	n (Nano)

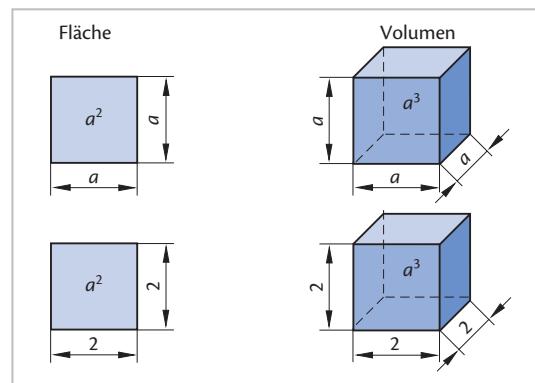


Bild 2: Fläche und Volumen

## Wurzelrechnen

### Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (lat. Radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden und dem Wurzelexponent. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden:  $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ . Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden, z. B.  $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$ . Deshalb gelten bei Wurzeln auch die Potenzgesetze.

### Beispiel: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Gegeben ist  $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ . Gesucht sind a) die Potenzschreibweise der Wurzel und b) der Wurzelwert.

Lösung:

$$\text{a)} \sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{b)} \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2, \text{ denn } 2 \cdot 2 = 4.$$

### Addition und Subtraktion bei Wurzeln

Wurzeln, die im Wurzelexponent und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert werden (Tabelle 1).

### Beispiel: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Der Term  $3\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{7} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{7}$  ist zusammenzufassen.

Lösung:

$$\begin{aligned} &3\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{7} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{7} \\ &= (3+2)\cdot\sqrt{3} + (4-2)\cdot\sqrt[3]{7} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt[3]{7} \end{aligned}$$

### Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel aus dem Zähler und dem Nenner gezogen werden (Tabelle 1).

### Beispiel: Multiplikation und Division von Wurzeln

Aus den Wurzeln a)  $\sqrt{9 \cdot a^2}$  und b)  $\sqrt{\frac{a^2}{16}}$  sind die Wurzelwerte zu berechnen.

Lösungen:

$$\text{a)} \sqrt{9 \cdot a^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} = 3 \cdot a \quad \text{b)} \sqrt{\frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{16}} = \frac{a}{4}$$

$b = \sqrt{a}$	$\sqrt{a} =  a $	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
a Basis, $a > 0$	b Wurzelwert	n Wurzelexponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze

Regel, Definition	Termausdruck
<b>Addition und Subtraktion</b> Wurzeln können addiert werden, wenn sie denselben Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a} = (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
<b>Multiplikation</b> Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
<b>Division</b> Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
<b>Potenziieren</b> Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

### Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms  $\sqrt[n]{a^n}$  sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall gerader Exponent:  $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

2. Fall ungerader Exponent:  $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

Das Ergebnis der Quadratwurzel ist immer positiv!

### Beispiel: Zwei Lösungen

Zu zeigen ist, wie beim Wurzelterm  $\sqrt[3]{a^2}$  zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

Fall 1: Für  $a = 2$  gilt:  $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} = 2$

Fall 2: Für  $a = -2$  gilt:  $\sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4} = 2$



## G4 Flächenberechnungen

### Quadrat und Rechteck

Der Flächeninhalt  $A$  beim Quadrat und Rechteck, errechnet sich aus dem Produkt von Länge  $l$  und Breite  $b$  (Bild 1 und Tabelle 1).

### Parallelogramm

Ein Parallelogramm ergibt durch Scherung in ein flächengleiches Rechteck (Bild 2). Die Fläche ergibt sich als Produkt von Grundlinie  $g$  und Höhe  $h$ .

### Dreieck

Verschiebt man im Parallelogramm aus Bild 2 den Punkt  $C$  auf den Punkt  $D$ , ergibt es ein Dreieck. Der Flächeninhalt ist halb so groß wie die Fläche des Parallelogramms und somit gleich dem halben Produkt aus Grundlinie  $g$  und Höhe  $h$ .

### Trapez

Werden am Trapez flächengleiche Umformungen vorgenommen, so entsteht ein Rechteck mit der Länge  $m$ , die als Mittelparallele bezeichnet wird (Bild 3). Um  $m$  zu berechnen, wird die Summe der beiden Grundseiten halbiert. Die Fläche des Trapezes ist das Produkt aus Mittelparallele  $m$  und Höhe  $h$ .

#### Beispiel: Trapez

Ein Trapez hat eine Fläche  $A = 100 \text{ cm}^2$ , eine Höhe  $h = 50 \text{ mm}$  und eine Seitenlänge  $a = 80 \text{ mm}$ .

Welche Länge hat die Seite  $c$ ?

*Lösung:*

$$A = m \cdot h = 100 \text{ cm}^2; m = \frac{A}{h} = \frac{100 \text{ cm}^2}{50 \text{ mm}} = 20 \text{ cm}$$

$$m = \frac{1}{2} \cdot (a + c) = 20 \text{ cm} \Rightarrow c = 40 \text{ cm} - 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$$

#### Beispiel: Bleche

Der Flächeninhalt  $A$  der Bleche 1 und 2 sind zu berechnen (Bild 4).

*Lösung:*

$$\text{Blech 1: } A = A_1 + A_2 = A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Trapez}}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 190 \text{ mm} \cdot 100 \text{ mm} = 9500 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = m \cdot h = \frac{(a + c)}{2} \cdot h = \frac{(100 + 70) \text{ mm}}{2} \cdot 80 \text{ mm}$$

$$= 6800 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 16300 \text{ mm}^2 = 163 \text{ cm}^2$$

$$\text{Blech 2: } A = A_1 + 2 \cdot A_2 = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\text{Trapez}}$$

$$A_1 = l \cdot b = 210 \text{ mm} \cdot 95 \text{ mm} = 19950 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = m \cdot h = \frac{(a + c)}{2} \cdot h = \frac{(210 + 130) \text{ mm}}{2} \cdot 255 \text{ mm}$$

$$= 43350 \text{ mm}^2$$

$$A = 19950 \text{ mm}^2 + 2 \cdot 43350 \text{ mm}^2 = 106650 \text{ mm}^2$$

Tabelle 1: Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen

Flächenform	Formel
Quadrat	$A = a \cdot a = a^2$
Rechteck	$A = l \cdot b$
Parallelogramm	$A = g \cdot h$
Dreieck	$A = \frac{g \cdot h}{2}$
Trapez	$A = \frac{(a + c)}{2} \cdot h = m \cdot h$
A Flächeninhalt b Breite c parallele Seiten zu $a$ am Trapez	$a$ Seite $g$ Grundlinie $m$ Mittelparallele
$l$ Länge $h$ Höhe	

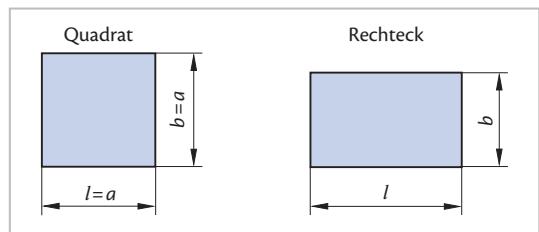


Bild 1: Quadrat und Rechteck

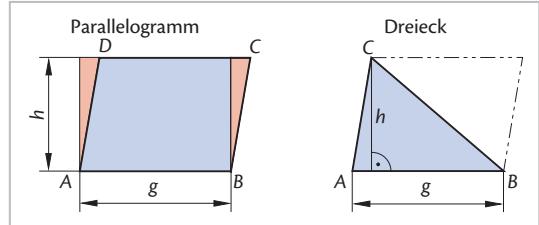


Bild 2: Quadrat und Rechteck

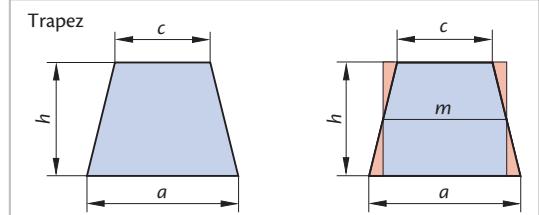


Bild 3: Trapez

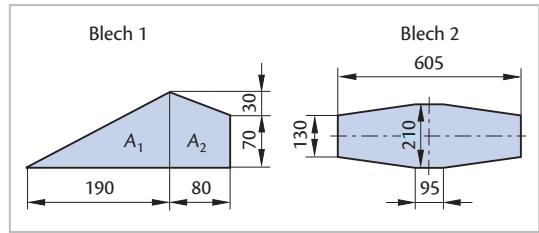


Bild 4: Bleche

## Kreis

Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt  $M$  der Ebene einen konstanten Abstand  $r$  haben (Bild 1). Die Kreisfläche  $A$  ist das Produkt aus der Zahl  $\pi$  und dem Quadrat des Radius  $r$ .

## Kreisring

Die zwei von konzentrischen Kreisen begrenzte Figur heißt Kreisring (Bild 1). Die Kreisringfläche  $A$  errechnet sich aus der Differenz zwischen äußerer Kreisfläche und innerer Kreisfläche.

### Beispiel: Kreisring

Die Kreisringfläche  $A$  mit Außenradius  $R = 60 \text{ mm}$  und Innenradius  $r = 40 \text{ mm}$  ist zu berechnen.

*Lösung:*

$$A_{\text{außen}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (60 \text{ mm})^2 = 11309,7 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{innen}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (40 \text{ mm})^2 = 5026,5 \text{ mm}^2$$

$$A = A_{\text{außen}} - A_{\text{innen}} = 6283,2 \text{ mm}^2$$

## Kreisausschnitt

Der Kreisausschnitt (Bild 2) wird auch als Kreissektor bezeichnet. Die Fläche  $A$  des Kreisausschnitts verhält sich zur Fläche  $A$  eines Kreises wie der Zentriwinkel  $\alpha$  zur Winkelsumme  $360^\circ$  im Kreis.

$$A_{\text{Ausschnitt}} : A_{\text{Kreis}} = \alpha : 360^\circ$$

## Kreisabschnitt

Der Kreisabschnitt (Bild 2) wird auch als Kreissegment bezeichnet. Die Fläche  $A$  eines Kreisabschnitts ergibt sich aus der Differenz des Kreisausschnittes und des durch die Sehne und dem Radius gebildetem Rechteck.

$$A_{\text{Abschnitt}} = A_{\text{Ausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}}$$

### Beispiel: Abdeckblech

Der Blechbedarf für die Abdeckung aus Bild 3 ist zu berechnen.

*Lösung:*

$$A = A_{\text{Ausschnitt}} - A_{\text{Dreieck}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 48,49^\circ \Rightarrow \alpha = 97,18^\circ$$

$$A = \pi \cdot (40 \text{ mm})^2 \cdot \frac{97,18^\circ}{360^\circ} - \frac{60 \text{ mm} \cdot (40 \text{ mm} - 15 \text{ mm})}{2}$$

$$A = 1356,9 \text{ mm}^2 - 750 \text{ mm}^2 = 606,9 \text{ mm}^2$$

Tabelle 1: Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen

Flächenform	Formel
Kreis	$A = \pi \cdot r^2; \quad A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$
Kreisring	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2); \quad A = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$
Kreisausschnitt	$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}; \quad A = \frac{b \cdot r}{2}$
Kreisabschnitt	$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$ $A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$
A Flächeninhalt R, r Radius D, d Durchmesser	b Bogenlänge s Sehnenlänge h Höhe α Winkel

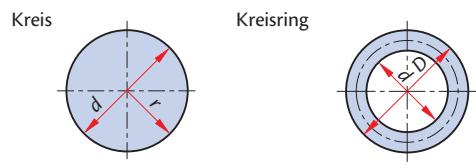


Bild 1: Kreis und Kreisring

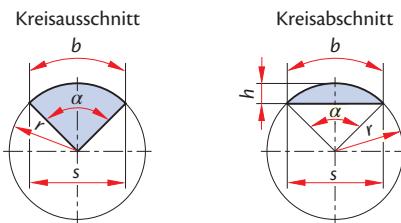


Bild 2: Kreisausschnitt und Kreisabschnitt

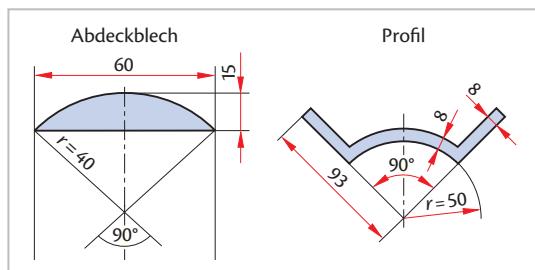


Bild 3: Abdeckblech und Profil

## Aufgaben:

1. Berechnen Sie die Fläche  $A$  eines Kreisausschnitts für  $\alpha = 60^\circ$  und  $r = 50 \text{ mm}$ .

2. Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Profils aus Bild 3.

**Lösungen:** 1.  $A = 1309 \text{ mm}^2$  2.  $A = 1238,58 \text{ mm}^2$