

---

**Thomas Westermann**

# **Signal- und Systemanalyse**

**Modellierung, Simulation, Visualisierung**

**Simulationen mit Maple**

Prof. Dr. Thomas Westermann  
Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft  
Fakultät EIT  
Moltkestr. 30  
D 76133 Karlsruhe

<http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/>

**e-mail:** iMathVerlag@gmail.com

**Zusätzliche Materialien:** Alle Maple-Worksheets, die in diesem Buch verwendet und beschrieben werden, sind kostenfrei erhältlich unter der web-Adresse  
<http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/downloadMaple.zip>  
<http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/aufgaben.pdf>

ISBN 978-3-9820650-2-1

ISBN 978-3-9820650-3-8 (eBook)

## 1. Auflage 2019

iMathVerlag 2019

© Thomas Westermann. Das Copyright sämtlicher Materialien liegt beim Autor. Materialien dürfen zum privaten Gebrauch oder zu Studienzwecken heruntergeladen werden. Eine Vervielfältigung, Verbreitung oder Bereitstellung für Dritte bedarf der ausdrücklichen Genehmigung des Autors.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Vervielfältigung auf elektronischen oder anderen Wegen und der elektronischen Speicherung, bleiben dem Autor vorbehalten. Eine Vervielfältigung des Werkes oder von Teilen des Werkes ist nicht zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig.

*Cover-Bild:* Übertragungsverhalten eines Tiefpasses

*Umschlagsgestaltung:* Thomas Westermann

## Vorwort

Der Anlass, dieses Material über die Signal- und Systemanalyse zusammenzustellen und im Rahmen eines Buchs zu veröffentlichen, war die Veranstaltung "Modellbildung, Simulation und Visualisierung" mit Praktikum, die bei einer Summerschool 2019 in Chengdu durchgeführt wurde. Die Grundlage bildet ein Computerpraktikum im Studiengang Elektrotechnik-Sensorik, das seit mehreren Semestern an der Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft stattfindet. In dieser Veranstaltung werden Themen aus Mathematik, Physik und Elektronik kombiniert, um so übergreifende Aspekte aufzuzeigen, die in allen der genannten Bereiche eine wichtige Rolle spielen. Übergreifend verbindet die Signal- und Systemanalyse die unterschiedlichen Themen wie z.B. die Beschreibung von Schwingungen und Wellen, die Fourier-Analyse oder auch die Beschreibung von Wechselstromschaltungen.

Die Inhalte bilden somit ein Bindeglied zwischen der Mathematik, in der die mathematischen Grundlagen der komplexen Zahlen, dem Lösen von Differenzialgleichungen und der Fourier-Analyse gelegt werden, der Physik, die die physikalische Effekte in Form von Gesetzen beschreibt und der Elektronik, in der die schaltungstechnischen Grundlagen gelegt werden und der Informatik, welche die Grundstrukturen des Programmierens bereitstellt.

In diesem Lehrbuch starten wir immer von einer konkreten Aufgabe der Signal- und Systemanalyse und stellen zuerst die mathematischen Zusammenhänge vor bzw. zeigen die mathematischen Methoden auf, um theoretisch die Aufgabe zu bearbeiten. Anschließend werden Algorithmen zur Simulation der Problems erstellt, die dann in Maple programmiert und die Ergebnisse visualisiert werden.

Maple zeichnet sich gegenüber anderen Simulations- und Rechenprogrammen dadurch aus, dass wir auch die komplexen Algorithmen umsetzen können und die Ergebnisse in Form von Schaubildern, 3D- Darstellungen, Animationen einfach darstellen können. Gerade diese graphischen Möglichkeiten von Maple sind außergewöhnlich. Durch die Kenntnis von nur ein paar Befehlen wie z.B. **plot**, **plot3d**, **animate**, **animate3d** oder **Explore** sind wir in der Lage die Simulationsergebnisse einfach zu visualisieren. Darüber hinaus stehen die beeindruckenden Animationen zur Verfügung.

Bedanken möchte ich mich ganz besonders bei Herrn Zeh-Marschke für seine zahlreichen Verbesserungsvorschlägen sowie den Studierenden des Studiengangs Elektrotechnik-Sensorik, die vor allem die Maple-Worksheets ständig evaluiert und getestet haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen</b>	<b>3</b>
1.1	Berechnung der Übertragungsfunktion $H(\omega)$	7
1.2	Dimensionierung von Hoch- und Tiefpässen	13
1.3	Ortskurven	18
1.4	Bode-Diagramm	19
<b>2</b>	<b>Simulation des Zeitverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen</b>	<b>23</b>
2.1	Physikalische Gesetzmäßigkeiten der Bauelemente	24
2.2	Aufstellen der DG einer Schaltung	24
2.3	Lösen der DG mit dem Euler-Verfahren	25
2.4	Einfache Beispiele mit $L, C, R$	27
2.5	Modellierung und Simulation elektrischer Filterschaltungen	30
2.6	Simulation des Tiefpasses TP2PiCLC	32
<b>3</b>	<b>Simulation mechanischer Systeme mit Massenpunkten</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>Simulation geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>Analyse periodischer Signale: Fourier-Reihen</b>	<b>51</b>
5.1	Analyse $2\pi$ -periodischer Signale	52
5.2	Fourier-Reihen für $p$ -periodische Signale	57
5.3	Komplexwertige Fourier-Reihen	62
5.4	Simulationen zur Analyse periodischer Signale	64
<b>6</b>	<b>Analyse nicht-periodischer Signale: Fourier-Transformation</b>	<b>69</b>
6.1	Fourier-Transformation und Interpretation	69
6.2	Eigenschaften der Fourier-Transformation	75
6.3	Fourier-Transformation der Deltafunktion	82
<b>7</b>	<b>Analyse diskreter Signale: DFT</b>	<b>89</b>
7.1	Grundlegende Formeln	89
7.2	Eigenschaften der DFT	92
7.3	Inverse diskrete Fouriertransformation	93
7.4	Berechnung der DFT	96

<b>8</b>	<b>Simulationen zur Analyse diskreter Signale: FFT</b>	103
8.1	Abhängigkeit des Spektrums von der Anzahl der Abtastpunkte	103
8.2	Hanning-Fenster	105
8.3	Die Prozedur plot_fft mit der Option Hanning	106
8.4	Maximal erfassbare Frequenz	108
8.5	Frequenzauflösung	110
8.6	Analyse von Messdaten	111
<b>9</b>	<b>Analyse linearer Systeme</b>	115
9.1	LZK-Systeme	115
9.2	Impulsantwort	118
9.3	Die Systemfunktion (Übertragungsfunktion)	121
9.4	Zusammenhang zwischen der Sprung- und Deltafunktion	125
9.5	Simulation des Frequenzverhaltens der Systeme	128
<b>10</b>	<b>Simulation linearer Systeme</b>	135
10.1	Beispiel: Frequenzanalyse eines Tiefpasses	136
10.2	Frequenzanalyse des Doppelpendelsystems	139

## Anhang

<b>A</b>	<b>Einführung in die Benutzeroberfläche</b>	145
A.1	Grundlegendes zur Benutzeroberfläche von Maple	145
A.2	Weitere Eingabehilfen	148
A.3	Maple-Strukturen	151
A.4	Maple-Hilfe	152
<b>B</b>	<b>Maple Beispiele</b>	155
<b>C</b>	<b>Aufgaben</b>	163
C.1	Vorbereitende Aufgaben zu Maple	164
C.2	Visualisierung und Simulation physikalischer Formeln	166
C.3	Aufgaben zur Übertragungsfunktion elektrischer Filterschaltungen	173
C.4	Aufgaben zur Modellierung und Simulation von Systemen über Differenzialgleichungen	176
C.5	Aufgaben zur Signal- und Systemanalyse	181
	<b>Literaturverzeichnis</b>	185
	<b>Index</b>	187

# Kapitel 1

## Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen



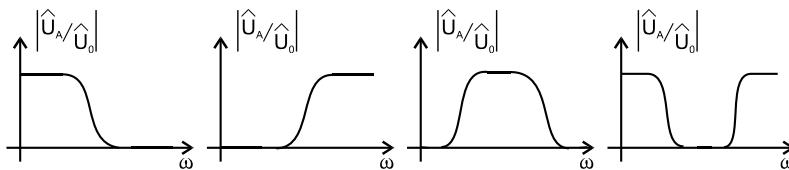
# Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen

**Überblick:** In diesem Kapitel werden wir am Beispiel von elektrischen RCL-Filterschaltungen das Übertragungsverhalten der Systeme beschreiben, wenn die Eingangsspannung sinus- oder kosinusförmig ist. Dann ist die Übertragungsfunktion bestimmt durch das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung:  $\frac{\hat{U}_A(t)}{\hat{U}_0(t)}$ , wenn die Eingangsspannung  $\hat{U}_0(t) = e^{i\omega t}$  ist. Denn bei einer komplexen Wechselspannung als Eingangsspannung kann bei den einzelnen Bauelementen jeweils ein Ohmsches Gesetz mit komplexen Widerständen angenommen werden. Dies liefert einen einfachen Einstieg in die Beschreibung von linearen Systemen im Frequenzbereich.

**Keywords:** Filterschaltungen, Übertragungsfunktion, Amplitudenverhältnis, Ortskurve, Bode-Diagramm.

Wir entwickeln eine Systematik um die komplexe Übertragungsfunktion für beliebig lange Ketten sukzessive zu berechnen, wenn die Schaltung aus Ohmschen Widerständen  $R$ , mit Kapazitäten  $C$  oder Induktivitäten  $L$  aufgebaut ist. Im Anschluss daran werden einige Spezialfälle für Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperren diskutiert. Das Ziel ist es anschließend, nicht nur zu gegebener Schaltung die Übertragungsfunktion zu bestimmen, sondern zu gegebener Grenzfrequenz für einen Hoch- oder Tiefpass eine Dimensionierung der einzelnen Elemente der Kette vorzunehmen. Dabei soll die Übertragungsfunktion  $\frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_0}$  einen möglichst glatten Verlauf im Arbeitsbereich besitzen.

Qualitativ werden für die Filter folgende Verläufe von  $|\frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_0}|$  gefordert:



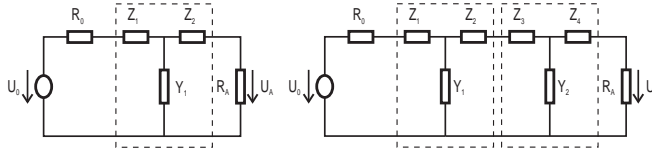
**Abbildung 1.1.** Übertragungsverhalten von Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperre

Ein Tiefpass besitzt die Eigenschaft, dass tiefe Frequenzen die Schaltung mehr oder weniger ungestört passieren können, während hohe Frequenzen gesperrt werden. Dies ist im linken Bild in Abb. 1.1 zu sehen. Charakterisierend ist dann die Frequenz, bei welcher der Übergang vom Durchlassbereich in den Sperrbereich stattfindet. Entgegengesetzt ist das Frequenzverhalten eines Hochpasses: Hohe Frequenzen passieren, tiefe Frequenzen werden durch die Schaltung gesperrt. Auf analoge Weise sind Bandpass und Bandsperre definiert.

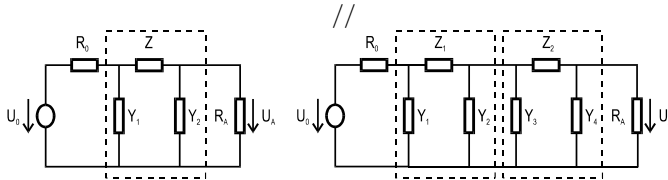


4 1 Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen

Zur Realisierung werden wir nur Ketten betrachten, die sich aus identischen  $\Pi$ - oder  $T$ -Gliedern zusammensetzen. Nur dann lassen sich die qualitativ geforderten Übertragungsverläufe realisieren, wobei  $Z_i$  und  $Y_i$  je nach Schaltung Induktivitäten oder Kapazitäten oder Kombinationen von Induktivitäten und Kapazitäten sind.



**Abbildung 1.2.** Schaltungen, die auf T-Gliedern basieren



**Abbildung 1.3.** Schaltungen, die auf  $\Pi$ -Gliedern basieren

Die **Übertragungsfunktion**  $H(\omega)$  ist definiert als das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung, wenn die Eingangsspannung als komplexe Wechselspannung  $\hat{U}_0(t) = U_0 e^{i\omega t}$  angenommen wird:

$$H(\omega) = \frac{\hat{U}_A(t)}{\hat{U}_0(t)}$$

Diese komplexe Übertragungsfunktion lässt sich dann graphisch über den Betrag  $|H(\omega)|$  und die Phase  $\varphi(\omega)$  darstellen:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

mit  $|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega) \cdot H^*(\omega)}$  und  $\tan(\varphi(\omega)) = \frac{\text{Im}(H(\omega))}{\text{Re}(H(\omega))}$ , wenn  $H^*(\omega)$  die zu  $H(\omega)$  komplex konjugierte Größe darstellt.

Man beachte, dass für den folgenden Algorithmus die einzelnen Elemente bzw. Kettenglieder noch nicht spezifiziert werden; d.h. die Formeln gelten sowohl für  $\Pi$ - als auch für  $T$ -Glieder gleichermaßen. Für die Impedanzen (Quer- und Längsimpedanzen) muss dann konkret für die jeweilige Schaltung noch

$R_\Omega$  (Ohmscher Widerstand)

$\hat{R}_L = i\omega L$  (Impedanz der Spule mit Induktivität  $L$ )

$\hat{R}_C = \frac{1}{i\omega C}$  (Impedanz des Kondensators mit Kapazität  $C$ )

gesetzt werden.

Mit den Kirchhoffschen Regeln ergibt sich im Falle einer komplexen Eingangsspannung  $\hat{U}_0 e^{i\omega t}$  für die Ersatzschaltung zweier komplexer Widerstände  $\hat{R}_1$  und  $\hat{R}_2$  durch einen **komplexen Gesamtwiderstand (= Ersatzwiderstand)  $\hat{R}$** :

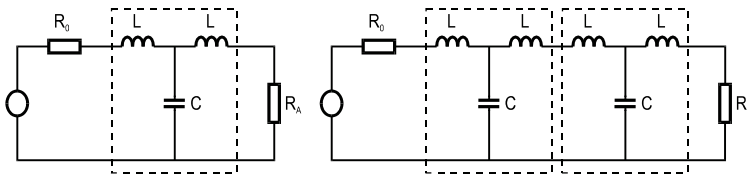
(a) Reihenschaltung  $\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2$

(b) Parallelschaltung  $\frac{1}{\hat{R}} = \frac{1}{\hat{R}_1} + \frac{1}{\hat{R}_2}$  bzw.  $\hat{R} = \frac{\hat{R}_1 \hat{R}_2}{\hat{R}_1 + \hat{R}_2}$

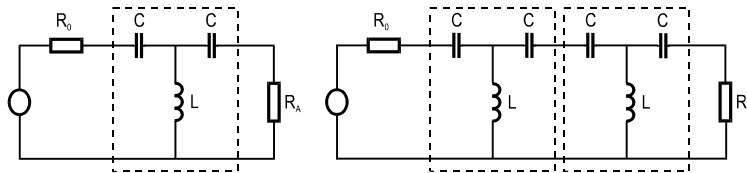
Im Wechselstromkreis dürfen also die bekannten Regeln für die Ersatzschaltung von Widerständen wie im Gleichstromkreis verwendet werden, wenn bei Kapazität und Induktivität zu komplexen Widerständen übergegangen wird. In der folgenden Übersicht sind einige typische Schaltungen angegeben, die wir im Weiteren wahlweise diskutieren werden.

### Tabelle: Übersicht über Filterschaltungen

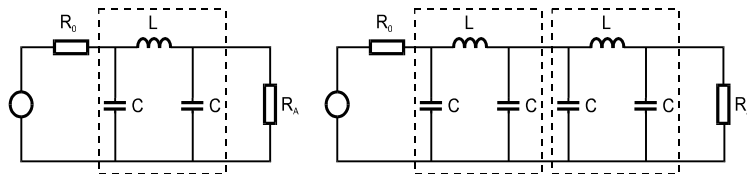
Tiefpässe aus  $T$ -Glieder bestehend:



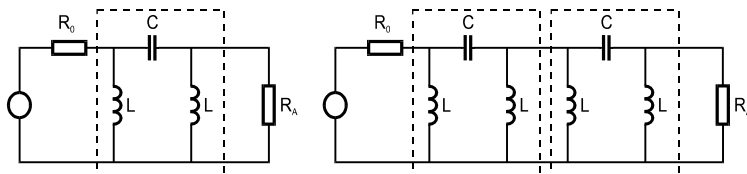
Hochpässe aus  $T$ -Glieder bestehend:



Tiefpässe aus  $\Pi$ -Glieder bestehend:

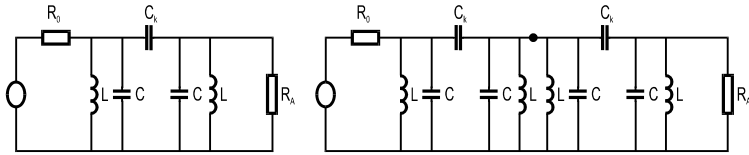


Hochpässe aus  $\Pi$ -Glieder bestehend:

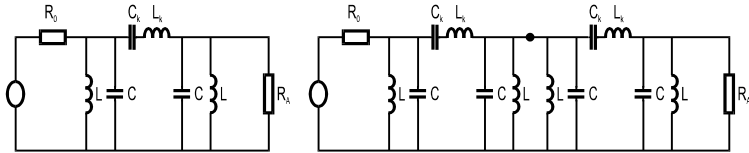


6 1 Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen

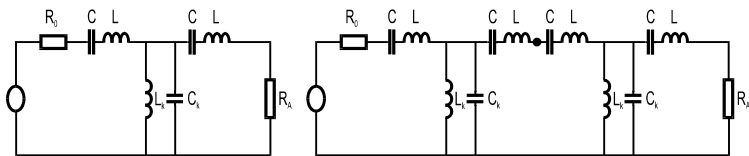
Bandpässe aus  $II$ -Glieder bestehend:



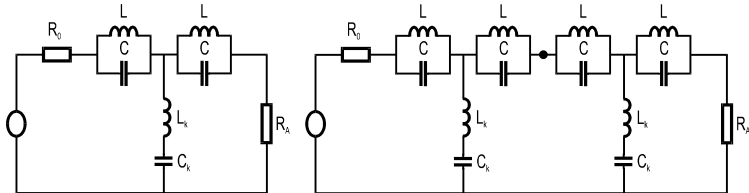
Bandpässe aus  $II$ -Glieder bestehend:



Bandpässe aus  $T$ -Glieder bestehend:



Bandsperren aus  $T$ -Glieder bestehend:



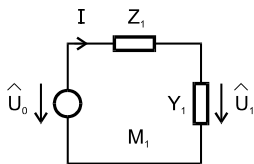
Zur Namensgebung der Schaltungen verwenden wir die folgende Notation: TP, HP, BP, BS stehen für den Typ der Schaltung: Tiefpass, Hochpass, Bandpass bzw. Bandsperre; 1Pi, 2Pi, 3Pi bzw. 1T, 2T, 3T für die Anzahl der verwendeten  $II$ - oder  $T$ -Glieder; CLC gibt die Anordnung der Energiespeicher in den verwendeten  $II$ - oder  $T$ -Gliedern an. Die Schaltung wird dann noch durch einen Innenwiderstand und einen Lastwiderstand vervollständigt. Beispielsweise lautet die Bezeichnung für die zweite Schaltung in der dritten Zeile: TP2PiCLC.

## 1.1 Berechnung der Übertragungsfunktion $H(\omega)$

Ausgehend von der Modellierung einer Schaltung mit einer Masche, werden wir zu Schaltungen mit mehreren Maschen übergehen. Bei der Berechnung des Übertragungsverhaltens reduzieren wir jedoch die Anzahl der Maschen durch Ersatzimpedanzen so lange, bis wir die Schaltung nur noch durch eine Masche repräsentieren können. Durch anschließende Spannungsteilerregel berechnen wir sukzessive die weiteren Spannungswerte bis wir zum Schluss den Spannungswert am Ausgangswiderstand erhalten.

### 1.1.1 Spannungsteiler = Kette mit einem Glied

Wir beginnen mit der Diskussion einer Schaltung, die sich aus einer Masche zusammensetzt:



$Z_1$  = Längsimpedanz  
 $Y_1$  = Querimpedanz

Wenden wir den Maschensatz auf die Masche  $M_1$  an, so teilt sich die Eingangsspannung  $\hat{U}_0$  auf in einen Spannungsabfall bei  $Z_1$  plus einem Spannungsabfall bei  $Y_1$ :

$$\hat{U}_0 = Z_1 I + Y_1 I$$

Für die Ausgangsspannung gilt

$$\hat{U}_1 = Y_1 I$$

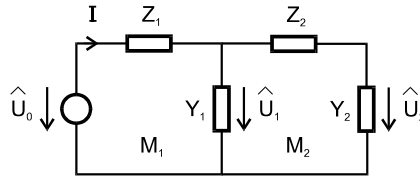
so dass wir für das Verhältnis der beiden Spannungswerte erhalten:

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_0} = \frac{Y_1 I}{Z_1 I + Y_1 I} = \frac{Y_1}{Z_1 + Y_1}$$

### 1.1.2 Kette mit zwei Gliedern

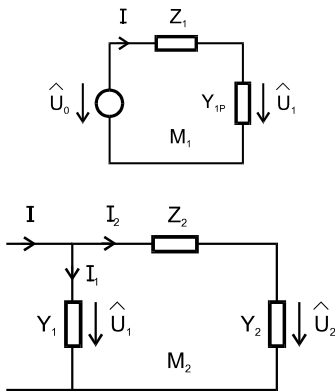
Kommen wir nun zu einer Schaltung, die sich aus zwei Maschen zusammensetzt. Wir betrachten zunächst die zweite Masche und ersetzen diese durch einen Ersatzwiderstand

$$Y_{1p} = \frac{1}{\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Z_2 + Y_2}} = \frac{Y_1(Z_2 + Y_2)}{Y_1 + Z_2 + Y_2}$$



Für die verbleibende Masche können wir die Spannungsteilerregel anwenden:

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_0} = \frac{Y_{1p}}{Y_{1p} + Z_1}$$



Damit kennen wir die Spannung, die bei  $Y_{1p}$  abfällt und können nun nochmals die Spannungsteilerregel auf die zweite Masche anwenden:

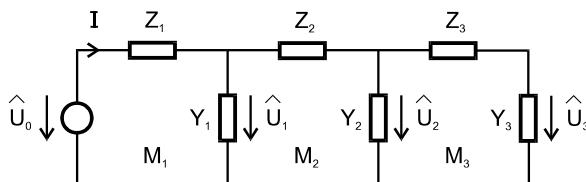
$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{Y_2}{Y_2 + Z_2}$$

### Algorithmus:

$Z_1, Z_2$	Längsimpedanzen
$Y_1, Y_2$	Querimpedanzen
$Y_{1p} = Y_1 \cdot (Y_2 + Z_2) / (Y_1 + Y_2 + Z_2)$	
$U_1 = u_0 \cdot Y_{1p} / (Z_1 + Y_{1p})$	
$U_2 = u_1 \cdot Y_2 / (Z_2 + Y_2)$	

### 1.1.3 Kette mit drei Glieder

Kommen wir nun zu einer Schaltung mit drei Gliedern. Wir ersetzen die Maschen der Schaltung sukzessive von rechts nach links durch Ersatzwiderstände.

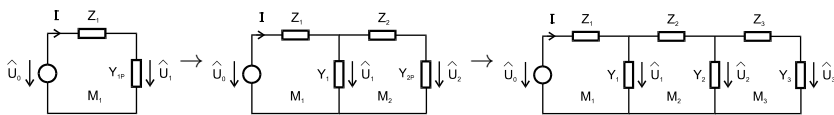
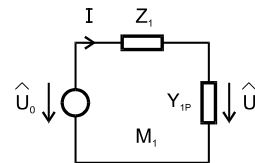
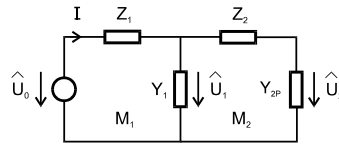


Zum Schluss bleibt nur noch eine Masche mit einem Parallelwiderstand übrig.

$$Y_{2p} = \frac{Y_2(Y_3 + Z_3)}{Y_2 + Y_3 + Z_3}$$

$$Y_{1p} = \frac{Y_1(Y_{2p} + Z_2)}{Y_2 + Y_{2p} + Z_2}$$

Anschließend wenden wir von links nach rechts die Spannungsteilerregel an



$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_0} = \frac{Y_{1p}}{Y_{1p} + Z_1} \rightarrow \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{Y_{2p}}{Y_{2p} + Z_2} \rightarrow \frac{\hat{U}_3}{\hat{U}_2} = \frac{Y_3}{Y_3 + Z_3}$$

Um den folgenden Algorithmus konkret auf eine spezielle Schaltung anzuwenden, müssen nur die Längs- und Querimpedanzen spezifiziert werden.

#### Algorithmus:

$Z_1, Z_2, Z_3$	Längsimpedanzen
$Y_1, Y_2, Y_3$	Querimpedanzen
$Y_{2p} = Y_2 \cdot (Y_3 + Z_3) / (Y_2 + Y_3 + Z_3)$	
$Y_{1p} = Y_1 \cdot (Y_{2p} + Z_2) / (Y_1 + Y_{2p} + Z_2)$	
$U_1 = U_0 \cdot Y_{1p} / (Y_{1p} + Z_1)$	
$U_2 = U_1 \cdot Y_{2p} / (Y_{2p} + Z_2)$	
$U_3 = U_2 \cdot Y_3 / (Y_3 + Z_3)$	

#### 1.1.4 Simulationen

Wir berechnen die komplexe Übertragungsfunktion für (1) einen Hochpass, (2) einen Tiefpass, (3) einen Bandpass und (4) eine Bandsperre mit Maple. Die zugehörigen Maple-Worksheets stehen auf der Homepage zur Verfügung.

- (1) HP2TCLC: Hochpass, der aus zwei  $T$ -Gliedern besteht.
- (2) TP2PiCLC: Tiefpass, der aus zwei  $II$ -Gliedern besteht.
- (3) BP2PiLCp: Bandpass, der aus zwei  $II$ -Gliedern besteht.
- (4) BS2TLCp: Bandsperre, die aus zwei  $T$ -Gliedern besteht.

### 1.1.5 Algorithmische Vereinfachung: Die Prozedur Kette

Gegeben sei eine allgemeine Kette, bestehend aus  $n$  Gliedern

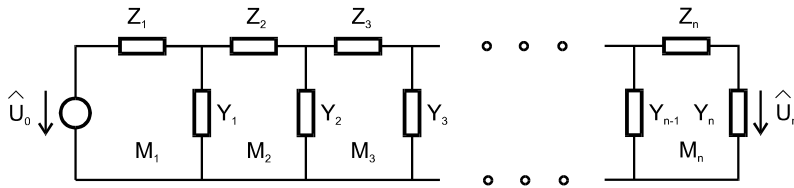


Abbildung 1.4. Allgemeine Schaltung der Länge  $n$ .

In Verallgemeinerung der Fälle 1.1.1 bis 1.1.3 lautet der **Algorithmus** zur Berechnung der Übertragungsfunktion:

#### Algorithmus:

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ : Längsimpedanzen  
 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ : Querimpedanzen  
 $Y_{p,n-1} = Y_{n-1} \cdot (Y_n + Z_n) / (Y_{n-1} + Y_n + Z_n)$   
 $Y_{p,i} = Y_i \cdot (Y_{p,i+1} + Z_{i+1}) / (Y_i + Y_{p,i+1} + Z_{i+1})$   
 $i = n-2, \dots, 1$   
 $U_0$  Eingangsspannung  
 $U_i = U_{i-1} \cdot Y_{p,i} / (Y_{p,i} + Z_i) \quad i = 1, \dots, n-1$   
 $U_n = U_{n-1} \cdot Y_n / (Y_n + Z_n)$

Mit der Maple-Prozedur **kette** wird mit obigem Algorithmus auf einfache Weise die Übertragungsfunktion einer  $n$ -gliedrigen linearen Kette berechnet. Letztendlich besteht die Prozedur Kette aus einer for-Schleife, welche sukzessive die Parallelwiderstände berechnet ( $i = n-2, \dots, 1$ ), und zwar startend von der äußersten Masche bis zur innersten Masche ( $i = 1$ ). Die zweite for-Schleife startet bei der innersten Masche und wendet sukzessive die Spannungsteilerregel an ( $i = 1, \dots, n-1$ ).

Wichtig bei der Verwendung der Prozedur ist, dass die Längsimpedanzen nun mit  $Z[1]$ ,  $Z[2]$ ,  $Z[3]$  usw. bezeichnet werden müssen. Analog gilt für die Querimpedanzen  $Y[1]$ ,  $Y[2]$ ,  $Y[3]$ , ... Die globale Größe, die mit der Prozedur Kette bestimmt wird, ist die Übertragungsfunktion mit dem Namen **H**.

```

> kette := proc(U0,Z,Y,n)
>   # Berechnet die Übertragungsfunktion einer linearen Kette, wenn
>   # U0: die angelegte Spannung
>   # Z[i]: die Längsimpedanzen
>   # Y[i]: die Querimpedanzen
>   # n: die Anzahl der Kettenglieder
> local i,Yp,U;

```

```

> global H;
>
> # Ersetzen der Maschen durch Ersatzwiderstände
> Yp[n] := Y[n];
> for i from n-1 by -1 to 1
> do Yp[i] := Y[i] * (Yp[i+1] + Z[i+1]) / (Y[i] + Yp[i+1] + Z[i+1]) end do;
>
> # Rückwärtsauflösen der Spannungen
> U[0] := U0;
> for i from 1 to n
> do U[i] := U[i-1] * Yp[i] / (Yp[i] + Z[i]) end do;
> H:=simplify((U[n]/U0));
> end:

```

Bei diesem Formalismus sind die einzelnen Elemente bzw. Kettenglieder **nicht** spezifiziert. Der Algorithmus ist also gleichermaßen für  $II$ - als auch für  $T$ -Glieder gültig. Für die Impedanzen setzen wir noch

$$\begin{array}{ll}
 R_{\Omega} & \text{(Ohmscher Widerstand)} \\
 i\omega L & \text{(Impedanz einer Spule mit Induktivität } L) \\
 \frac{1}{i\omega C} & \text{(Impedanz eines Kondensators mit Kapazität } C).
 \end{array}$$

Der Aufruf erfolgt dann mit **kette**( $U_0$ ,  $Z$ ,  $Y$ ,  $n$ ), wenn  $U_0$  die Amplitude der Eingangsspannung,  $Z[i]$  die Längs- und  $Y[i]$  die Querimpedanzen sind.  $n$  gibt die Anzahl der Kettenglieder an. Das Ergebnis der Prozedur ist die komplexe Übertragungsfunktion  $H$ , deren Betrag und Phase anschließend graphisch dargestellt werden.

### Beispiel 1.1 : Simulation des Hochpasses HP2TCLC.

Gegeben ist ein Hochpass, der aus zwei  $T$ -Gliedern zusammengesetzt ist. Dabei wird der mittlere Kondensator mit  $\frac{1}{2}C$  spezifiziert, da an dieser Stelle zwei Kondensatoren in Reihe sind.

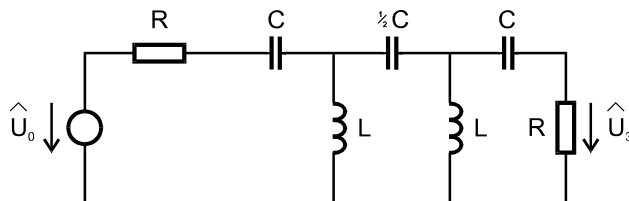


Abbildung 1.5. Hochpass mit zwei  $T$ -Glieder.

Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion definieren wir die Längsimpedanzen

```

> Z[1] := R+1/(I*w*C); Z[2] := 1/(I*w*C/2); Z[3] := 1/(I*w*C);

```

und die Querimpedanzen

```

> Y[1] := I*w*L; Y[2] := I*w*L; Y[3] := R;

```



## 12 1 Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen

Als Eingangsspannung wählen wir

>  $U_0 := 1$ ;

Da der Hochpass aus 3 Gliedern besteht, ist  $n=3$  und der Aufruf der Prozedur **kette** lautet

> **kette**( $U_0$ ,  $Z$ ,  $Y$ , 3);

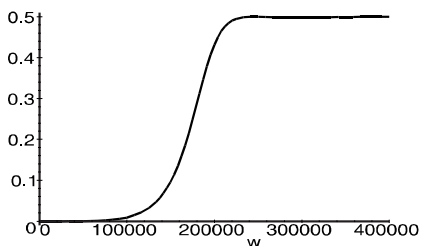
$$\frac{1}{2} w^5 L^2 C^3 R I / (w^5 L^2 C^3 R I + 2 w^4 L^2 C^2 - 4 I w^3 L C^2 R - 3 w^2 L C + R^2 w^4 C^3 L - R^2 w^2 C^2 + 2 I R w C + 1)$$

Die Übertragungsfunktion ist eine komplexe gebrochenrationale Funktion in  $\omega$  mit dem höchsten auftretenden Exponent 5: Die Kette enthält 5 unabhängige Energiespeicher. Diese Übertragungsfunktion ist unter dem Namen  $H$  abgespeichert und kann anschließend zur graphischen Darstellung verwendet werden. Da  $H$  eine komplexwertige Funktion in der Variablen  $w$  ist, betrachten wir zur Darstellung von  $H$  den Betrag  $abs(H)$  und die Phase  $argument(H)$  für die Parameter

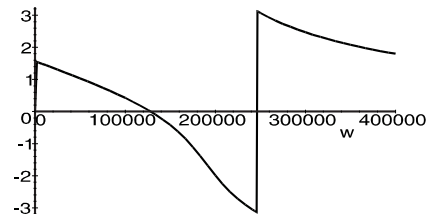
>  $R:=1000$ ;  $C:=5.28e-9$ ;  $L:=3.128e-3$ ;

> **plot**( $abs(H)$ ,  $w=0..400000$ ,  $thickness=2$ );

> **plot**( $argument(H)$ ,  $w=0..400000$ ,  $thickness=2$ );



Amplitudenverhältnis



Phasendiagramm

**Diskussion:** Man erkennt, dass tiefe Frequenzen gesperrt werden ( $H \approx 0$ ) und hohe Frequenzen passieren können ( $H \approx \frac{1}{2}$ ). Die Grenzfrequenz bei halber Maximalamplitude liegt bei  $\omega_g = 175000 \frac{1}{s}$ . Den Maximalwert im Übertragungsverhalten erhalten wir mit  $\frac{1}{2}$ . Dies liegt daran, dass wir den Innenwiderstand  $R$  gleich dem Lastwiderstand wählen. Somit bekommen wir nur maximal die Hälfte der Eingangsspannung am Lastwiderstand.

Über das Amplitudenverhältnis lässt sich genau bestimmen, wie die Amplitude des Ausgangssignal ist, wenn das Eingangssignal z.B.  $u_e(t) = 10 \sin(300000t)$ : Denn bei der Frequenz  $\omega = 300000$  liest man den Wert  $\frac{1}{2}$  im Amplitudenverhältnis ab. D.h. die Hälfte des Eingangssignals ist noch am Ausgang vorhanden, also  $u_a = 150000$ . Während man bei einem Eingangssignal von  $u_e(t) = 10 \sin(50000t)$  nahezu kein Ausgangssignal mehr erhält. Aus dem Phasendiagramm liest man die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung ab.  $\square$

## 1.2 Dimensionierung von Hoch- und Tiefpässen

Bisher haben wir diskutiert, wie man zu einer gegebenen Kette die Übertragungsfunktion berechnet und dabei die Grenzfrequenz  $\omega_g$  bestimmt. Jetzt werden wir den anspruchsvolleren Weg: Wir geben die Grenzfrequenz  $\omega_g$  und den Widerstand  $R$  vor. Gesucht sind dann die passenden Werte für  $L$  und  $C$ . Wenn man die folgenden Voraussetzungen macht, kann man durch gezieltes Simulieren mit Maple sehr gute Resultate gewinnen.

### Voraussetzungen:

- (1) Der Aufbau der Kette erfolgt entweder durch identische  $II$ – oder  $T$ –Glieder.
- (2) Alle  $Y$ - und  $Z$ - Impedanzen bestehen aus reinen Blindwerten (also nur  $L$  und  $C$ ; kein  $R$ ). Dies ist zwar nicht realisierbar, aber es kann zunächst von verlustlosen Spulen ausgegangen werden. Nachdem angepasste Betriebsparameter gefunden sind, kann der Einfluss von Spulenwiderständen berücksichtigt werden.
- (3) Der Innenwiderstand  $R_i$  ist gleich dem Lastwiderstand  $R_A$  (Leistungsanpassung der Schaltung bzw. Spannungsteilerregel).

### Grundlegende Formeln

- (1) **Skalierung der Grenzfrequenz:** Die Grenzfrequenz  $\omega_g$  bei Hoch- oder Tiefpass ist definiert als die Frequenz bei der  $|H(\omega)|$  auf  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  des Durchlasswertes abnimmt. Es gilt der Zusammenhang

$$\omega_g = \frac{k_f}{\sqrt{LC}} \quad (1.1)$$

wenn  $k_f$  eine schaltungsspezifische Konstante darstellt.

- (2) **Skalierung des Widerstandes:** Der Zusammenhang zwischen Widerstand und  $L, C$  lautet

$$R = k_R \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.2)$$

wenn  $k_R$  eine schaltungsspezifische Konstante darstellt.

Um die schaltungsspezifischen Konstanten  $k_f$  und  $k_R$  zu bestimmen, wählen wir für eine erste Simulation  $L = C = 1$ .

(1.) Denn dann entnimmt man bei gegebener Schaltung den angepassten Widerstand  $R$  bei dem die Übertragungsfunktion einen **möglichst glatten** Verlauf besitzt. Damit erhält man den Skalierungsfaktor  $k_R$ .

(2.) Aus dem Übertragungsverhalten liest man den Skalierungsfaktor  $k_f$  ab, der im Falle  $L = C = 1$  genau der **Grenzfrequenz** entspricht.

**Vorgehensweise zur Dimensionierung:**

- (1) **Simulation:** Man setze  $L = C = 1$  und variere  $R_1 = R_A$  solange bis ein möglichst glatter Frequenzgang gefunden wird  $\Rightarrow R_{an}$  (angepasster Widerstand). Gesucht sind dann zu gegebener Kreisfrequenz  $\omega_g$  und vorhandenem Widerstand  $R$  die zugehörigen Größen von  $L$  und  $C$ . Die Übertragungsfunktion wird nun so skaliert werden, dass das Übertragungsverhalten gleich bleibt:

- (2) **Skalierung von  $L$  und  $C$  bei gegebenem  $\omega_g$  und  $R$ :**

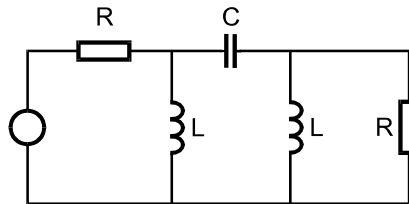
$$(1.1) \cdot (1.2) \rightsquigarrow \omega_g \cdot R = k_R \cdot k_f \cdot \frac{1}{C} \Rightarrow C = \frac{k_f \cdot k_R}{\omega_g \cdot R} \quad (1.3)$$

$$\frac{(1.2)}{(1.1)} \rightsquigarrow \frac{R}{\omega_g} = \frac{k_R}{k_f} \cdot L \Rightarrow L = \frac{k_f \cdot R}{\omega_g \cdot k_R} \quad (1.4)$$

- (3) Bestimmt man zu den berechneten Werten wiederum die Übertragungsfunktion, dann hat sie qualitativ den gleichen Verlauf wie für die Parameter  $L = C = 1$ , nur jetzt mit der Grenzfrequenz  $\omega_g$ .

**Beispiel 1.2 : HP1PiLCL.**

Gesucht ist ein Hochpass bestehend aus einem  $\Pi$ -Glieder, der bei einem Widerstand von  $R = 500\Omega$  eine Grenzfrequenz von  $\omega_g = 1000s^{-1}$  besitzt:



**Abbildung 1.6.** Hochpass mit einem  $\Pi$ -Glieder

Mit

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{1}{i\omega C}, \quad Y_1 = i\omega L, \quad Y_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}}$$

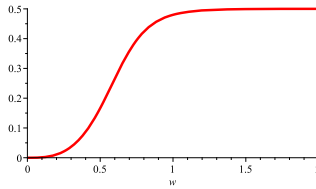
folgt

$$Y_{1p} = \frac{Y_1(Y_2 + Z_2)}{Y_1 + Y_2 + Z_2}$$

und

$$u_1 = \frac{Y_{1p}}{Y_{1p} + Z_1}, \quad u_2 = u_1 \cdot \frac{Y_2}{Y_2 + Z_2}$$

- (1) Um die schaltungsspezifischen Konstanten  $k_f$  und  $k_R$  zu bestimmen, setzen wir  $L = C = 1$ . Durch Variation von  $R$  im Bereich  $R = 0.5 \dots 1.5$  erhalten wir für  $R = 0.8$  einen glatten Verlauf der Übertragungsfunktion.



Aus dem Schaubild der Übertragungsfunktion lesen wir die Grenzfrequenz  $\omega_g = 0.57$  ab.

$$\Rightarrow k_R = 0.8 \quad \text{und} \quad k_f = 0.57$$

- (2) Damit ergeben sich die Dimensionierungen für  $L$  und  $C$ :

$$(I) : C = \frac{0.57 \cdot 0.8}{1000 \cdot 500} = 0.912 \cdot 10^{-6} F$$

$$(II) : L = \frac{0.57 \cdot 500}{0.8 \cdot 1000} = 0.355 H$$

### Beispiel 1.3: Simulation des Tiefpasses TP2PiCLC.

Gegeben ist ein Tiefpass, der aus zwei  $II$ -Glieder zusammengesetzt ist. Gesucht sind  $L$  und  $C$  so, dass bei einem Innenwiderstand von  $1000 \Omega$  die Schaltung eine Grenzfrequenz von  $\omega_{gr} = 20000 \text{ s}^{-1}$  besitzt.

Wir bestimmen zunächst für  $L = 1$  und  $C = 1$  das Übertragungsverhalten und variieren  $R$  so lange, bis wir einen glatten Verlauf in der Übertragungsfunktion haben. So sind wir in der Lage  $\kappa_r$  gleich dem optimalen Widerstand zu setzen und aus dem Übertragungsdiagramm die Grenzfrequenz  $\kappa_f$  abzulesen. Dies sind die beiden schaltungsspezifischen Konstanten, die dann in die Berechnung von  $L$  und  $C$  einfließen.

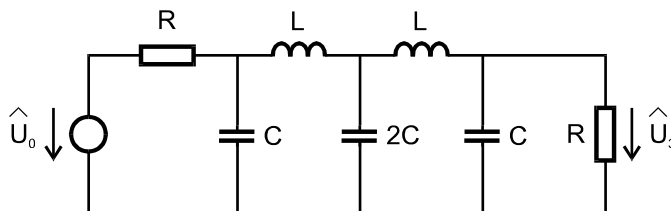


Abbildung 1.7. Tiefpass

Um die Übertragungsfunktion des Tiefpasses zu berechnen, verwenden wir die Prozedur **kette**. Hierzu setzen wir für die Längsimpedanzen

## 16 1 Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen

```
> Z[1] := R: Z[2] := I*w*L: Z[3] := I*w*L:
```

und für die Querimpedanzen

```
> Y[1] := 1/(I*w*C): Y[2] := 1/(I*w^2*C): Y[3] := 1/(I*w*C + 1/R):
```

Als Eingangsspannung wählen wir

```
> U0 := 1:
```

Da der Tiefpass aus drei Gliedern besteht, ist  $n=3$  und der Aufruf lautet

```
> kette(U0,Z,Y,3);
```

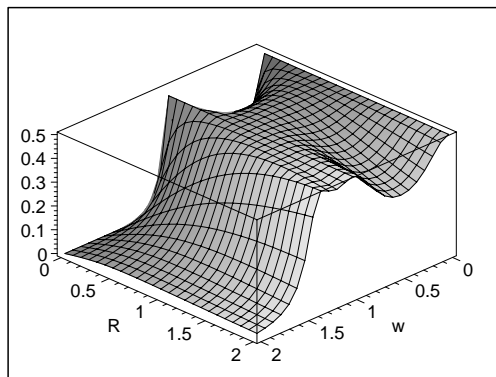
$$\frac{-1}{2} I R / (-I R + 4 I w^2 L R C + w L - 2 I R w^4 L^2 C^2 - w^3 L^2 C + 2 R^2 w C - 3 w^3 L C^2 R^2 + w^5 L^2 C^3 R^2)$$

Die Übertragungsfunktion ist eine komplexe gebrochenrationale Funktion in  $w$  mit dem höchsten auftretenden Exponent 5: Die Kette enthält 5 unabhängige Energiespeicher. Zur Dimensionierung der L- und C-Teile setzen wir zunächst

```
> C:=1: L:=1:
```

und zeichnen die Übertragungsfunktion 3-dimensional

```
> plot3d(abs(H), w=0..2, R=0..2, axes=boxed);
```



Die Übertragungsfunktion hat bei  $R \approx 0.9$  einen glatten Verlauf. Wir zeichnen daher  $H(w)$  für  $0.5 \leq R \leq 1.5$  detaillierter, indem wir über den Explore-Befehl Einzelwerte ansteuern können:

```
> Explore(plot(abs(H),w=0..2),
>          parameters=[R=0.5 .. 1.5], initialvalues=[R=1.]);
```

Bei dem optimalen Widerstand

```
> k_r := 0.8 :
```

entnimmt man aus dem Schaubild die Grenzfrequenz

>  $k_f := 1.4 :$

Bestimmung von L und C für  $R = 1000$  und  $\omega_g = 20000$ :

>  $R := 1000 : w_g := 20000 :$

>  $C := k_f * k_r / (w_g * R);$

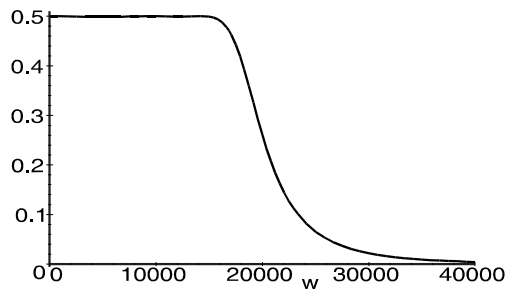
>  $L := k_f / k_r * R / w_g;$

$C := .5600000000 \cdot 10^{-7}$

$L := .08750000000$

Die Übertragungsfunktion für diese angepassten Dimensionierungen ist:

>  $\text{plot}(\text{abs}(H), w=0..40000, \text{thickness}=2);$



Man erkennt sehr gut, dass nun die Grenzfrequenz bei ca.  $\omega_g = 20000 \text{ s}^{-1}$  liegt und der Übertragungsverlauf qualitativ erhalten bleibt.  $\square$

#### Beispiel 1.4 : Maple Simulationen.

In den beiden folgenden Worksheets werden einen Hochpass und ein Tiefpass skaliert. Die zugehörigen Maple-Worksheets sind auf der Homepage und können nach dem Downloaden durch Anklicken gestartet und anschließend ausgeführt werden.

- (1.) Tiefpass: Gegeben sei ein Tiefpass, der aus zwei  $II$ -Glieder zusammengesetzt ist. Gesucht sind L und C, so dass er bei  $R = 1000\Omega$  eine Grenzfrequenz von  $\omega = 20000 \frac{1}{s}$  besitzt.
- (2.) Hochpass: Gegeben ist ein Hochpass, der aus einem  $II$ -Glieder zusammengesetzt ist. Gesucht sind L und C, so dass er bei  $R = 500\Omega$  eine Grenzfrequenz von  $\omega = 1000 \frac{1}{s}$  besitzt.  $\square$

### 1.3 Ortskurven

Eine zu Betrag und Phase alternative graphische Darstellung der Übertragungsfunktion ist die sog. **Ortskurve**. Bei dieser Darstellung von  $H(\omega)$  werden der Betrag  $|H(\omega)|$  und der Phasenwinkel  $\varphi(\omega)$  gleichzeitig in ein Schaubild im Polar-Koordinatensystem gezeichnet. Der Betrag entspricht dem Radius und der Phasenwinkel dem Winkel. Dabei variieren  $|H(\omega)|$  und  $\varphi(\omega)$  gleichzeitig als Funktion von  $\omega$ .

#### Beispiel 1.5 : Simulation der Ortskurve.

In Maple wird die Ortskurve dargestellt entweder durch den Befehl

```
> plot([Re(H(ω)), Im(H(ω)), ω = 0...2]);
```

wobei  $Re(H(\omega))$  bzw.  $Im(H(\omega))$  für den Realteil bzw. Imaginärteil der komplexen Funktion  $H(\omega)$  steht oder

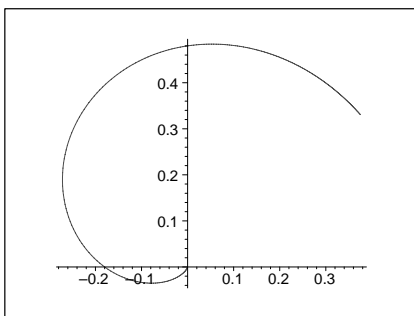
```
> with(plots):
```

```
> polarplot([abs(H(ω)), argument(H(ω)), ω = 0..2]);
```

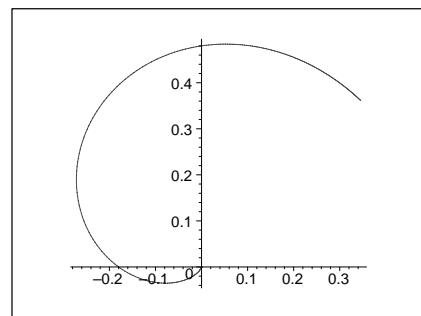
wenn  $abs(H(\omega))$  der Betrag und  $argument(H(\omega))$  die Phase von  $H(\omega)$  bedeutet.  $\square$

#### Beispiel 1.6 : Visualisierung der Ortskurve von HP1PiLCL.

Für Beispiel 1.2 des Hochpasses mit einem  $II$ -Glieder ist die Ortskurve visualisiert. In Abbildung 1.8 (a) wird die Ortskurve für  $L = C = 1$  dargestellt, indem die Frequenz  $\omega$  variiert von  $0 \dots 2$  variiert. In Abbildung 1.8 (b) ist sie für  $L = 0.4H$  und  $C = 0.9 \cdot 10^{-6}F$  dargestellt.  $\omega$  variiert nun von  $0 \dots 3000$ .



(a)  $L = C = 1$ .  $\omega$  variiert von  $0 \dots 2$ .



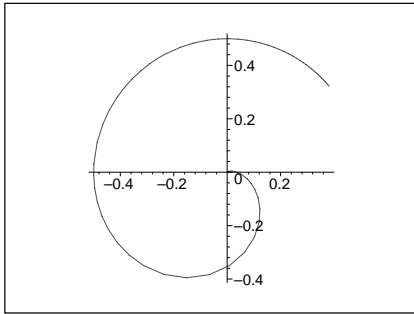
(b)  $L = 0.4H$ ,  $C = 0.9 \cdot 10^{-6}F$ .  $\omega$  variiert von  $0 \dots 3000$ .

**Abbildung 1.8.** Ortskurven

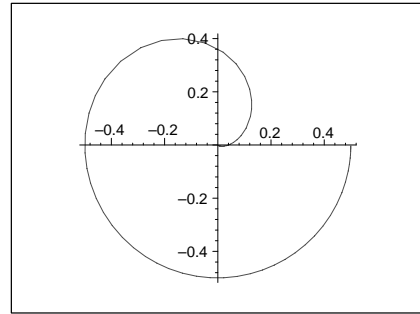
Die beiden Ortskurven sind für die entsprechenden  $\omega$ -Parameterbereiche identisch.  $\square$

**Beispiel 1.7 : Ortskurven.**

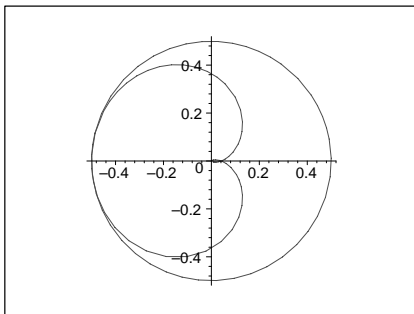
Für die in 1.1.4 angegebenen Beispiele des (1) Hoch-, (2) Tief-, (3) Bandpasses bzw. (4) der Bandsperre ergeben sich die folgenden Ortskurven:



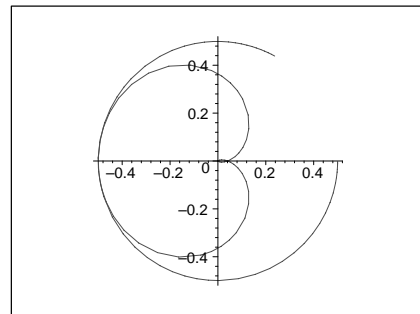
(a) Hochpass HP2TCLC



(b) Tiefpass TP2PiCLC



(c) Bandpass BP2PiCLCp



(d) Bandsperre BS2TLCp

**Abbildung 1.9.** Ortskurven

**Beobachtung des Phasenwinkels:** Beim Variieren der Frequenz von 0 bis  $\infty$  wandert der Phasenwinkel über  $N \cdot 90^\circ$ . Dabei ist  $N$  die Anzahl der Energiespeicher.  $\square$

**1.4 Bode-Diagramm**

Wie wir bereits gesehen haben, besteht eine Möglichkeit das Übertragungsverhalten  $H(\omega)$  graphisch darzustellen darin, separat den Betrag der Übertragungsfunktion,  $|H(\omega)|$ , oder die Phase,  $\arg(H(\omega))$ , als Funktion von  $\omega$  zu zeichnen.

Zu dieser Darstellung hat sich in den Anwendungen eine alternative Möglichkeit durchgesetzt, nämlich der 10-er Logarithmen des Betrags bei logarithmischer Skalierung der  $\omega$ -Achse zu zeichnen, dem sog. **Bode-Diagramm**. Genau gesagt wird

$$20 \text{ dB } \log_{10}(|H(\omega)|)$$



## 20 1 Simulation des Frequenzverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen

bei logarithmischer Skalierung der  $\omega$ -Achse aufgetragen. In Maple wird das Bode-Diagramm realisiert durch den Befehl

```
> with(plots);  
> semilogplot(20*log[10](abs(H( $\omega$ ))),  $\omega = 0.1.. \omega_{max}$ );
```

Man beachte dabei, dass  $\omega$  nicht bei 0 beginnen darf, da eine logarithmische Skalierung der  $\omega$ -Achse vorgenommen wird und  $\log(0)$  nicht definiert ist!

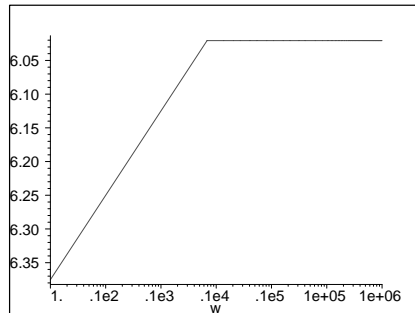


Abbildung 1.10. Bode-Diagramm

---

**Zusammenfassung des Kapitels:** In diesem Kapitel haben wir elektrische Schaltungen in ihrem Frequenzverhalten beschrieben. Hierzu wurde die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  eingeführt als das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung, wenn die Eingangsspannung gegeben ist durch  $\hat{U}_0(t) = e^{i\omega t}$ .

Damit kann das Ausgangssignal für beliebige Frequenzen berechnet werden. So schön und einfach diese Beschreibung ist, Voraussetzung ist aber dass das Eingangssignal kosinus- oder sinusförmig ist. Sobald an der Schaltung ein Rechtecksignal, Dreieckssignal oder ähnliches als Eingangssignal angelegt wird, kann die Übertragungsfunktion nicht verwendet werden, um Aussagen über das Ausgangssignal zu treffen. Hierzu müssen wir die Beschreibung allgemeiner formulieren. Dies führt uns auf das nächste Kapitel: Die Modellierung der Schaltungen bzw. allgemeiner der Systeme im Zeitbereich.

---

# Kapitel 2

## Simulation des Zeitverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen



# Simulation des Zeitverhaltens elektrischer RCL-Schaltungen

## 2

---

**Überblick:** Im vorhergehenden Kapitel wurde am Beispiel von elektrischen RCL-Filterschaltungen das Frequenzverhalten der Schaltungen beschreiben. Dazu haben wir als Eingangsspannung  $\hat{U}_0(t) = e^{i\omega t}$  gewählt.

Ist das Eingangssignal eine Rechteckspannung, eine Sprungspannung oder ein anderer Spannungsverlauf, so kann diese Übertragungsfunktion **nicht** verwendet werden, um Aussagen über das Ausgangssignal zu treffen. Für die Simulation dieser Signale müssen die Modellgleichungen allgemein formuliert werden. Dies führt auf gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung, welche dann das Zeitverhalten beschreiben.

**Keywords:** Elektrische Schaltungen, Euler-Verfahren, Differenzialgleichungen, Impulsantwort, Sprungantwort.

---

In diesem Kapitel werden für elektrische Schaltungen, die sich aus RCL-Gliedern zusammensetzen die zugehörigen Differenzialgleichungen aufgestellt, die dann mit Hilfe des Euler-Verfahrens numerisch gelöst werden. Das Ziel ist für **beliebige** Eingangssignale die zugehörigen Ausgangssignale zu berechnen.

Zuerst stellen wir für die betrachteten Bauelemente einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung her. Da wir nicht mehr von Wechselspannungen ausgehen, werden nicht wie in Kapitel 1 Ohmsche Gesetze herauskommen. Anschließend modellieren wir die Schaltungen, indem wir systematisch Maschen- und Knotenregel anwenden. Dies führt auf so viele gekoppelte, lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung wie Energiespeicher im System enthalten sind.

Ab drei gekoppelten Differenzialgleichungen können in der Regel keine analytischen, exakten Lösungen des Problems mehr angegeben werden. Wir sind damit auf Näherungsverfahren angewiesen. Um die auftretenden Modellgleichungen (=Differenzialgleichungen) numerisch zu lösen, führen wir das Euler-Verfahren ein.

Mit dem Euler-Verfahren angewendet auf jede einzelne Differenzialgleichung werden wir die Modellgleichungen für beliebige Eingangssignale lösen. Von Bedeutung hierbei sind besonders drei Eingangssignale: Wechselspannungen, Impulsfunktion und Sprungfunktion, die dann die Sinusantwort, die Impulsantwort bzw. die Sprungantwort liefern.

## 2.1 Physikalische Gesetzmäßigkeiten der Bauelemente

**Widerstand:**



$$U(t) = R \cdot I(t)$$

Der Strom durch einen Ohmschen Widerstand  $R$  ist proportional zur Spannung  $U(t) = R I(t)$ , wenn  $U(t)$  der Spannungsabfall am Widerstand  $R$  ist.

**Spule mit Induktivität  $L$ :**



$$U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

Fließt durch eine Spule  $L$  ein Strom  $I$ , so ist der Spannungsabfall an der Spule  $U$  proportional zur Stromänderung  $\frac{dI}{dt}$ . Die Proportionalitätskonstante bezeichnet man mit Induktivität  $L$ :  $U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$ .

**Kondensator mit Kapazität  $C$ :**



$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

Liegt am Kondensator die Spannung  $U(t)$ , so ist die auf dem Kondensator liegende Ladung  $Q(t) = C \cdot U(t)$ , wenn  $C$  die Kapazität des Kondensators ist. Wegen  $I = \frac{dQ}{dt}$  folgt für den Strom durch den Kondensator  $I(t) = C \cdot \frac{dU(t)}{dt}$ . Natürlich fließt der Strom nicht durch den Kondensator, sondern auf der einen Seite fließt Ladung zu, auf der anderen Seite fließt Ladung ab.

## 2.2 Aufstellen der DG einer Schaltung

- (1) Gemäß den physikalischen Gesetzen wird jedem Energiespeicher eine Zustandsvariable zugeordnet:  
**Jedem Kondensator  $C_i$  wird seine Spannung  $U_i$ , jeder Spule  $L_i$  wird ihr Strom  $I_i$  als Zustandsvariable zugeordnet.** Den Widerständen wird keine Zustandsvariable zugeordnet, da Widerstände keine Energiespeicher, sondern nur Energieverbraucher darstellen.
- (2) Der Maschensatz und der Knotensatz werden auf die Schaltung angewendet. Das Ziel ist für jede Zustandsvariable eine DG 1. Ordnung zu erhalten. **Sind Spule und Kondensator in Reihe geschaltet, wird formal ein weiterer Knoten eingeführt.**
- (3) In der Regel führt die Vorgehensweise zu je einer DG für jede Zustandsvariable, die außer den Ableitungen der Zustandsvariablen keine weiteren Ableitungen enthalten.

**⚠ Achtung:** Manchmal sind aber mehrere Ableitungen 1. Ordnung in einer DG vorhanden. Dann muss zuerst ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, damit man die gewünschte Struktur erhält.

## 2.3 Lösen der DG mit dem Euler-Verfahren

Gegeben ist die Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung (AWP)

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.1)$$

$$y(0) = y_0 \quad (2.2)$$

Wir werden diese Differenzialgleichung für Zeiten  $t_0 = 0 \leq t \leq T$  numerisch lösen. Dazu zerlegen wir das Intervall  $[t_0, T]$  in  $N$  Teilintervalle der Länge

$$h = dt = \frac{T - t_0}{N}$$

Die Größen  $h$  und  $dt$  werden als **Schrittweite** bzw. **Zeitschritt** bezeichnet. Wir erhalten als Zwischenzeiten

$$t_j = t_0 + j \cdot dt \quad j = 0, \dots, N$$

und werden die Lösung nur zu diesen diskreten Zeiten  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$  berechnen: Ausgehend vom Startwert  $y_0$  bestimmen wir der Reihe nach Näherungen  $y_1, y_2, \dots, y_N$  für die Funktionswerte  $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)$  der Lösung von (2.1). Man nennt dieses Vorgehen die **Diskretisierung** des Problems.

Für den Startwert  $(t_0, y_0)$  kennen wir nach Gl. (2.1) die exakte Steigung der Lösungsfunktion

$$y'(t_0) = f(t_0, y_0)$$

Für einen kleinen Zeitschritt  $h$  wird die Funktion  $y$  im Intervall  $[t_0, t_0 + h]$  durch ihre Tangente angenähert (siehe Abb. 2.1a). Für den Funktionswert  $y(t_1)$  gilt dann näherungsweise

$$y(t_1) = y(t_0 + h) \approx y(t_0) + y'(t_0) \cdot h$$

Wir setzen

$$y_1 := y_0 + f(t_0, y_0) h$$

Damit hat man den Funktionswert  $y(t_1)$  zum Zeitpunkt  $t_1$  durch  $y_1$  angenähert. Ausgehend von diesem fehlerhaften Wert  $y_1$  berechnet man mit Gl. (2.1) die fehlerhafte Steigung  $y'_1 = f(t_1, y_1)$ . Nun verwendet man  $y_1$  und  $y'_1$  für die Berechnung eines Näherungswertes für den nächsten Zeitpunkt  $t_2 = t_1 + h$ :

$$y(t_2) = y(t_1 + h) \approx y(t_1) + y'(t_1) h$$

Auch hier setzen wir

$$y_2 := y_1 + f(t_1, y_1) h$$

$y_2$  ist eine Näherung für den exakten Wert der Lösung  $y(t_2)$  zum Zeitpunkt  $t_2$ .

Das beschriebene Verfahren wiederholt man für den neuen Punkt  $P_2 = (t_2, y_2)$ . Allgemein kann man das Näherungsverfahren schematisch beschreiben durch:

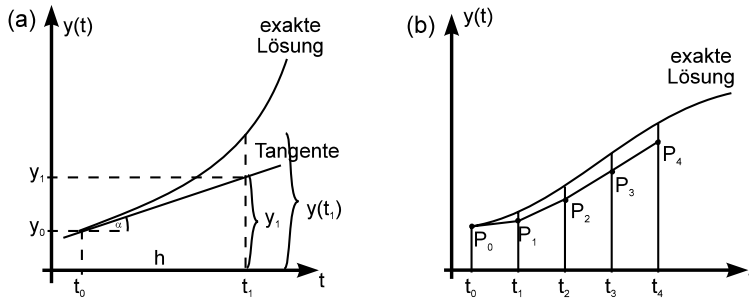


Abbildung 2.1. Euler-Verfahren

neuer Wert = alter Wert + Änderung der Lösung

bzw.

$$y_{\text{neu}} = y_{\text{alt}} + f(t_{\text{alt}}, y_{\text{alt}}) \cdot h$$

Man berechnet also ausgehend vom Punkt  $P_0 = (t_0, y_0)$  sukzessiv die Werte

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Die Lösungskurve setzt sich aus geradlinigen Strecken zusammen, so dass die Näherung in Form eines Streckenzugs vorliegt (siehe Abb. 2.1b). Dieses Verfahren heißt gemäß seiner geometrischen Bedeutung, das **Polygonzugverfahren** bzw. nach seinem Erfinder auch das **Euler-Verfahren**. Dieses einfache Verfahren liefert für genügend kleine Schrittweiten  $h$  ausreichend genaue Näherungswerte  $y_1, y_2, \dots, y_N$  für die gesuchten Funktionswerte  $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)$ .

Das Euler-Verfahren startet mit der Anfangsbedingung  $y(0) = y_0$  und läuft über den folgenden Algorithmus ab:

```

y = y0
for t from tmin by dt to tmax do
  y = y + f(t,y) * dt
end do

```

Um anschließend die numerische Lösung zeichnen zu können, speichern wir zu jedem Zeitpunkt sowohl den Zeitpunkt  $t$  als auch den Funktionswert  $y$  in einer Liste *data* ab. Der so erweiterte Algorithmus lautet dann

```

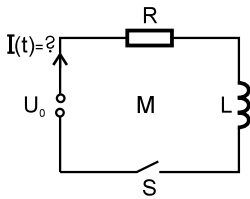
y=y0
data[0] = [tmin, y]
i=1
for t from tmin by dt to tmax do
  y = y + f(t,y) * dt
  data[i] = [t+dt, y]
  i = i + 1
end do

```

## 2.4 Einfache Beispiele mit $L, C, R$

### Beispiel 2.1 : Reihenschaltung von Spule $L$ und Widerstand $R$ .

Die Schaltung in diesem Beispiel besteht nur aus einem Energiespeicher: der Induktivität  $L$ . Dieser Induktivität ordnen wir seine Zustandsvariable zu: den Strom durch die Spule  $I(t)$ . Durch Anwenden des Maschensatzes erhalten wir eine Differenzialgleichung erster Ordnung für den Strom  $I(t)$ . Da wir zum Zeitpunkt  $t = 0$  den Schalter  $S$  schließen ist die zusätzliche Anfangsbedingung  $I(t = 0) = 0$ .



Energiespeicher:  $L$   
Zustandsvariable:  $I$

Maschensatz:  $U_0 = U_R + U_L = R \cdot I + L \frac{dI}{dt}$   
 $\Rightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} = (U_0 - RI)/L} \quad \rightarrow \text{DG für } I$

**Algorithmus:**

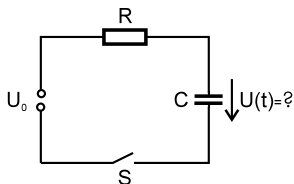
```

 $U_0 = A \cdot \sin(2\pi ft)$ 
 $i = 1$ 
 $I = 0$ 
 $data[0] = [t_{min}, I]$ 
for  $t$  from  $t_{min}$  by  $dt$  to  $t_{max}$ 
do
     $I = I + (U_0 - RI)/L \cdot dt$ 
     $data[i] = [t + dt, I]$ 
     $i = i + 1$ 
end do

```

### Beispiel 2.2 : Reihenschaltung von Kapazität $C$ und Widerstand $R$ .

Auch diese Reihenschaltung besteht nur aus einem Energiespeicher: einer Kapazität  $C$ . Dieser Kapazität ordnen wir seine Zustandsvariable zu: den Spannungsabfall über dem Kondensator  $U(t)$ . Durch Anwenden des Maschensatzes erhalten wir eine Differenzialgleichung erster Ordnung für die Spannung  $U(t)$ . Da wir zum Zeitpunkt  $t = 0$  den Schalter  $S$  schließen ist die zusätzliche Anfangsbedingung  $U(t = 0) = 0$ .



Energiespeicher:  $C$   
Zustandsvariable:  $U$

Maschensatz:  $U_0 = U_R + U = R \cdot I + U = RC \cdot \frac{dU}{dt} + U$   
 $\Rightarrow \boxed{\frac{dU}{dt} = (U_0 - U)/(R \cdot C)} \quad \rightarrow \text{DG für } U$



**Algorithmus:**

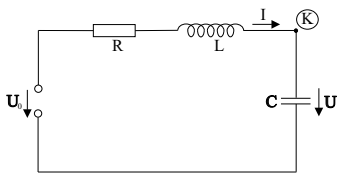
```

 $U_0 = A \cdot \sin(2\pi ft)$ 
 $i = 1$ 
 $U = 0$ 
 $data[0] = [t_{min}, I]$ 
for  $t$  from  $t_{min}$  by  $dt$  to  $t_{max}$ 
do
     $U = U + (U_0 - U)/(RC) \cdot dt$ 
     $data[i] = [t + dt, U]$ 
     $i = i + 1$ 
end do

```

### Beispiel 2.3: Reihenschaltung von $R$ , $C$ und $L$ .

Diese Reihenschaltung besteht aus **zwei** Energiespeichern: einer Induktivität  $L$  und einer Kapazität  $C$ . Der Induktivität ordnen wir seine Zustandsvariable  $I(t)$  und der Kapazität  $U(t)$  zu. Durch Anwenden des Maschensatzes erhalten wir aber nur *eine* Differenzialgleichung erster Ordnung für den Strom  $I(t)$ . Gemäß dem in 2.2.1 beschriebenen Zusatz: **Sind Spule und Kondensator in Reihe geschaltet, wird formal ein weiterer Knoten eingeführt.** Wir erhalten somit zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung für  $I(t)$  und  $U(t)$ .



Zwei Energiespeicher:  $L, C$   
Zwei Zustandsvariable:  $I, U$

Maschensatz:  $U_0 = U_R + U_L + U = R \cdot I + L \frac{dI}{dt} + U$

Knotensatz für K:  $I = C \cdot \frac{dU}{dt}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dI}{dt} = (U_0 - U - RI)/L & \rightarrow \text{DG für } I \\ \frac{dU}{dt} = I/C & \rightarrow \text{DG für } U \end{cases}$$

Da wir zum Zeitpunkt  $t = 0$  den Schalter  $S$  schließen, sind die zusätzlichen Anfangsbedingungen, dass Strom und Spannung zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich Null sind.

**Algorithmus:**

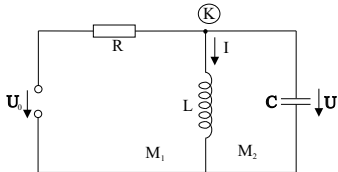
```

 $U_0 = A \cdot \sin(2\pi ft)$ 
 $U = 0$  und  $I = 0$ 
...
for  $t$  from  $t_{min}$  by  $dt$  to  $t_{max}$ 
do
     $I = I + (U_0 - U - RI)/L \cdot dt$ 
     $U = U + I/C \cdot dt$ 
    ...
end do

```

**Beispiel 2.4 : Parallelschwingkreis.**

Diese Parallelschaltung besteht aus **zwei** Energiespeichern: einer Induktivität  $L$  und einer Kapazität  $C$ . Der Induktivität ordnen wir seine Zustandsvariable  $I(t)$  und der Kapazität  $U(t)$  zu. Durch Anwenden der Maschensätze und des Knotensatzes erhalten wir zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung für den Strom  $I(t)$  und die Spannung  $U(t)$ .



Zwei Energiespeicher:  $L, C$   
Zwei Zustandsvariable:  $I, U$

Maschensatz für  $M_1$ :  $U_0 = U_R + U = R \cdot I_0 + U$

Knotensatz für K:  $I_0 = I + C \frac{dU}{dt}$

Maschensatz für  $M_2$ :  $L \frac{dI}{dt} = U$

**⚠ Achtung:** Man beachte, dass in den Gleichungen die Größe  $I_0$  auftritt, die keinem Energiespeicher zugeordnet ist. Daher muss sie aus den Gleichungen eliminiert werden, indem wir sie durch die Gleichung des Knotensatzes ersetzen. Schließlich erhalten wir zwei DG für die beiden Energiespeicher:

$$U_0 = R(I + C \frac{dU}{dt}) + U \quad \text{und} \quad L \frac{dI}{dt} = U$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= ((U_0 - U)/R - I)/C \\ \frac{dI}{dt} &= U/L \end{aligned}$$

**Algorithmus:**

```

 $U_0 = A \cdot \sin(2\pi ft)$ 
 $I = 0$  and  $U = 0$ 

for  $t$  from  $t_{min}$  by  $dt$  to  $t_{max}$ 
do
     $U = U + ((U_0 - U)/R - I)/C \cdot dt$ 
     $I = I + U/L \cdot dt$ 
    ...
end do

```

**Diskussion:** Bezüglich der Spannung  $U$  wirkt die Schaltung als Bandpass: Hohe Frequenzen werden wegen der Wirkung von  $C$ , tiefe Frequenzen werden wegen der Wirkung von  $L$  **nicht** durchgelassen. Nur ein Frequenzband um die mittlere Frequenz  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  kommt durch.

## 2.5 Modellierung und Simulation elektrischer Filterschaltungen

### 2.5.1 Aufstellen der DG für einen Tiefpass (TP2PiCLC)

Gegeben ist der Tiefpass, der sich aus zwei  $II$ -Gliedern zusammensetzt, TP2PiCLC:

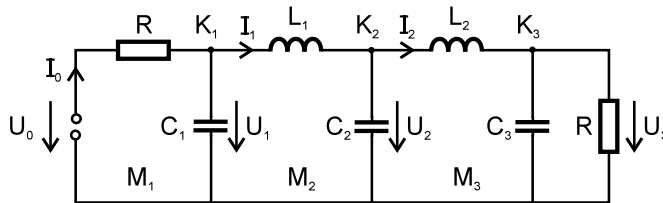


Abbildung 2.2. Tiefpass

Der Tiefpass besteht aus 5 Energiespeichern  $C_1, C_2, C_3, L_1, L_2$ ; diesen Energiespeichern werden 5 Zustandsvariablen  $U_1, U_2, U_3, I_1, I_2$  zugeordnet. Systematisches Anwenden der Maschen- und Knotenregel liefern die folgenden Gleichungen, wenn die physikalischen Gesetzmäßigkeiten  $U_\Omega = R \cdot I$  (Ohmsches Gesetz),  $I_C = C \cdot \dot{U}$  (Strom am Kondensator) und  $U_L = L \cdot \dot{I}$  (Spannungsabfall an der Spule) berücksichtigt werden:

$$M1: U_0 = RI_0 + U_1$$

$$K1: I_0 = C_1 \dot{U}_1 + I_1$$

$$M2: U_1 = L_1 \dot{I}_1 + U_2$$

$$K2: I_1 = C_2 \dot{U}_2 + I_2$$

$$M3: U_2 = L_2 \dot{I}_2 + U_3$$

$$K3: I_2 = C_3 \dot{U}_3 + U_3/R$$

**⚠ Achtung:**  $I_0$  muss ersetzt werden, da es **keinem** Energiespeicher zugeordnet ist!

Dies sind zunächst 6 Gleichungen, wobei Gleichung  $M_1$  **keine** Differenzialgleichung darstellt. In dem zu lösenden System dürfen als Variablen nur die 5 Zustandsvariablen  $U_1, U_2, U_3; I_1, I_2$  vorkommen, sonst keine. Also muss aus den Gleichungen  $M_1$  und  $K_1$  die Variable  $I_0$  eliminiert werden, da sie keinem Energiespeicher zugeordnet ist. Daher setzen wir Gleichung  $K_1$  in Gleichung  $M_1$  ein. Somit erhalten wir fünf Differenzialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = ((U_0 - U_1)/R - I_1)/C_1 \\ \dot{I}_1 = (U_1 - U_2)/L_1 \\ \dot{U}_2 = (I_1 - I_2)/C_2 \\ \dot{I}_2 = (U_2 - U_3)/L_2 \\ \dot{U}_3 = (I_2 - U_3/R)/C_3 \end{cases}$$

Man beachte, dass pro Differenzialgleichung nur eine Ableitung auftritt und wir somit durch das Euler-Verfahren den folgenden Algorithmus zur Lösung des Systems erhalten:

**Algorithmus:**

```

 $U_0 = \dots$  vorgegeben (siehe unten)
 $U_1 = 0, I_1 = 0, \dots$  (initialisieren)

for  $t$  from  $t_{min}$  by  $dt$  to  $t_{max}$ 
do
     $U_1 = U_1 + ((U_0 - U_1)/R - I_1)/C_1 \cdot dt$ 
     $I_1 = I_1 + (U_1 - U_2)/L_1 \cdot dt$ 
     $U_2 = U_2 + (I_1 - I_2)/C_2 \cdot dt$ 
     $I_2 = I_2 + (U_2 - U_3)/L_2 \cdot dt$ 
     $U_3 = U_3 + (I_2 - U_3/R)/C_3 \cdot dt$ 
    ...
end do

```

**Bemerkungen:**

- (1) Man beachte, dass die DG in der Reihenfolge ihres Auftretens bei der physikalischen Modellierung iteriert werden sollten, also von der Eingangsspannung zur Ausgangsspannung.
- (2) Indem die Variablen im Algorithmus nicht mit  $U_1^{neu}$  und  $U_1^{alt}$  bezeichnet werden, erspart man sich die Umbenennung dieser Variablen und in die folgenden Iterationen werden immer die aktuellen (also neu berechneten) Daten berücksichtigt.

Wir wählen  $L_1 = L_2 = 1$ ;  $C_1 = C_3 = 1$ ;  $C_2 = 2$ ;  $R = 0.8$  ( $k_f = 1.314$ ) (siehe Kapitel 1 über die Übertragungsfunktion). Für die Simulationen, die wir im nächsten Abschnitt ausführlich beschreiben werden, wählen wir als Zeitschritt  $dt = 0.005$  und als maximale Simulationszeit  $t_{max} = 90$ .

**1. Sinusantwort:** Für die Eingangsspannung setzen wir

$$U_0(t) = 1 \cdot \sin(\omega t) \text{ mit } \omega = 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$$

und erhalten für die Amplitude der Ausgangsspannung

$\omega$	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
$U_A$	0.5	0.5	0.5	0.42	0.17	0.065	0.029

Man erkennt, dass die Ausgangsamplitude bei Frequenzen zwischen 1.25 und 1.5 drastisch abfällt.

**2. Sprungantwort:** Um einen Einschaltvorgang zu simulieren, setzen wir als Eingangsspannung  $U_0(t) = S(t)$ . Dabei ist  $S(t)$  die Sprungfunktion. Für negative Zeiten hat die Funktion den Wert 0 und springt bei  $t = 0$  auf den Wert 1. In Maple wird diese Funktion mit **Heaviside(t)** bezeichnet. Der Wert an der Stelle  $t = 0$  muss explizit angegeben werden. Das zur Sprungfunktion gehörende Antwortsignal ist in Abschnitt 2.6 als Ergebnis der Simulation abgebildet. Da dieses die Reaktion des Systems auf die Sprungfunktion ist, nennt man das Antwortsignal die *Sprungantwort*.

**3. Impulsantwort:** Wählen wir als weiteres Eingangssignal (Eingangsspannung) einen Impulsstoß mit Breite  $T$  und Höhe  $1/T$ . Damit regen wir das System impulsartig an. Der Impulsstoß lässt sich in Maple mit  $\frac{1}{T}(S(t) - S(t - T))$  bzw.  
 $> U_0(t) := 1/T * (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - T));$   
 $> \text{Heaviside}(0) := 0;$

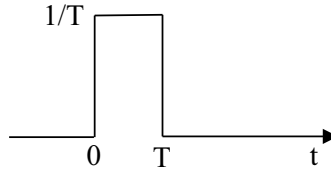


Abbildung 2.3. Impulsstoß

realisieren. Die Ausgangsspannung nennt man zugehörig die *Impulsantwort*.

### 2.5.2 Simulationen mit Maple

Wir stellen die Differenzialgleichungen für (1) einen Hochpass, (2) einen Tiefpass, (3) einen Bandpass und (4) eine Bandsperre auf und lösen diese mit Maple.

- (1.) HP2TLCL Hochpass, der aus zwei  $T$ -Gliedern besteht.
- (2.) TP2PiCLC Tiefpass, der aus zwei  $II$ -Gliedern besteht.
- (3.) BP2PiLCp Bandpass, der aus zwei  $II$ -Gliedern besteht.
- (4.) BS2TLCp Bandsperre, die aus zwei  $T$ -Gliedern besteht.

## 2.6 Simulation des Tiefpasses TP2PiCLC

Gegeben ist der Tiefpass TP2PiCLC aus Abschnitt 2.5.1. Wir beschreiben in diesem Abschnitt die Simulation im Detail, so wie sie in Maple auch ausgeführt werden müssen.

1. Aufstellen der Differenzialgleichungen: Wir übertragen die Differenzialgleichungen aus dem vorigen Abschnitt direkt auf Maple. Für  $\frac{U_1}{dt}$ ,  $\frac{U_2}{dt}$ ,  $\frac{U_3}{dt}$ ,  $\frac{I_1}{dt}$  und  $\frac{I_2}{dt}$  setzen wir in Maple kurz.  $dU1$ ,  $dU2$ ,  $dU3$ ,  $dI1$ ,  $dI2$ :

```
> eq1:= R*(C1*dU1 + I1) = Ue-U1;
> eq2:= U1 = L1*dI1 + U2;
> eq3:= I1 = C2*dU2 + I2;
> eq4:= U2 = L2* dI2 + U3;
> eq5:= I2 = C3* dU3 +U3/R;
```

$$eq1 := R(C1 dU1 + I1) = Ue - U1$$

$$eq2 := U1 = L1 dI1 + U2$$

$$eq3 := I1 = C2 dU2 + I2$$

$$eq4 := U2 = L2 dI2 + U3$$

$$eq5 := I2 = C3 dU3 + \frac{U3}{R}$$

2. Damit wir das Euler-Verfahren auf jede der Differenzialgleichungen anwenden können, müssen wir alle Gleichungen nach der Ableitung der gesuchten Funktion auflösen. Dies bewerkstelligen wir mit dem **solve**-Befehl. Damit wir anschließend das Ergebnis

des solve-Befehls auch verwenden können wird durch **assign** den Variablen **dU1**, **dU2**, **dU3**, **dI1**, **dI2** der Ausdruck auf der rechten Seite zugewiesen.

```
> sol:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5}, {dU1,dU2,dU3,dI1,dI2});
> assign(sol);
```

$$\text{sol} := \left\{ dU2 = -\frac{-I1 + I2}{C2}, dI1 = -\frac{-U1 + U2}{L1}, dI2 = -\frac{-U2 + U3}{L2}, \right. \\ \left. dU3 = -\frac{-I2 R + U3}{C3 R}, dU1 = -\frac{R I1 - Ue + U1}{R C1} \right\}$$

Setzen der Parameter und aller Anfangsbedingungen

```
> R:=0.8: C1:=1: C2:=C1*2: C3:=C1: L1:=1:L2:=L1:
> U1:=0: U2:=0: U3:=0: I1:=0: I2:=0:
```

Bevor wir die Differenzialgleichungen simulieren, muss die Eingangsspannung definiert werden. Im Folgenden sind die drei folgenden Eingangsspannungen gewählt:

**Wechselspannung im Durchlassbereich:** Hierzu müssen wir lediglich

```
> Ue:=sin(w*t): w:=1.:
```

setzen und anschließend unterschiedliche Simulationen mit geändertem  $w$  durchführen.

**Einschalt- oder Sprungfunktion:** Die Sprung- oder Einschaltfunktion wird in Maple mit **Heaviside(t)** bezeichnet. Allerdings ist diese Funktion an der Stelle  $t = 0$  nicht explizit definiert. D.h. wir müssen sie dort definieren:

```
> Heaviside(0):= 0:
> Ue:=Heaviside(t):
```

Das Ergebnis der Simulation wird dann auch als **Sprungantwort** bezeichnet.

**Impulsfunktion:** Die Impulsfunktion mit Impulsbreite  $T$  wird als die Differenz zweier zueinander verschobener Sprungfunktionen definiert:

```
> T:=0.5: Ue:=Heaviside(t)-Heaviside(t-T):
```

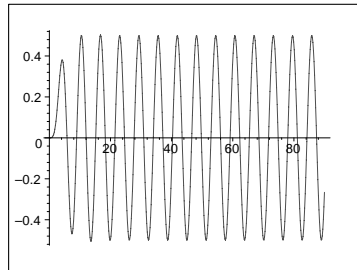
### 3. Lösen der DG mit dem Euler-Verfahren

```
> tmax:=90:
> dt:=tmax/500:
> i:=0:
> for t from 0 by dt to tmax
> do
>   i:=i+1:
>   U1:=U1 + dt*dU1:
>   I1 := I1 + dt* dI1:
>   U2:= U2 + dt * dU2:
>   I2:= I2 + dt * dI2:
>   U3:= U3 + dt * dU3:
>   data1[i]:=[t,U3]:
>   data2[i]:=[t,Ue]:
> end do:
```

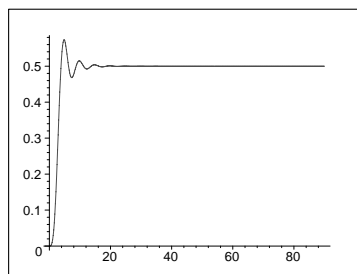
## 4. Darstellen der Lösung

```
> plot([seq(data1[n],n=1..i)], thickness=2);
```

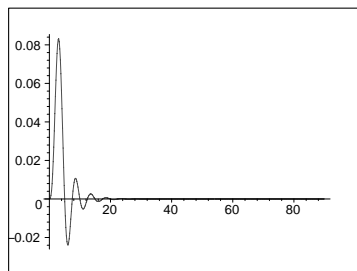
Die Ergebnisse der Simulationen sind in den folgenden drei Diagrammen angegeben. Zunächst die Systemreaktion für eine Wechselspannung als Eingangssignal bei  $\omega=1$ : Dies ist die Systemantwort im Durchlassbereich.



Systemreaktion für eine Sprungfunktion als Eingangssignal: Sprungantwort.



Systemreaktion für eine Impulsfunktion als Eingangssignal: Impulsantwort.




---

**Zusammenfassung des Kapitels:** Durch die Modellierung der Schaltungen über Differenzialgleichungen sind wir in der Lage, für jedes beliebige Eingangssignal das zugehörige Ausgangssignal zumindest näherungsweise durch das Euler-Verfahren zu berechnen. Um weitere Zusammenhänge bei der Beschreibung von Systemen zu erhalten, benötigen wir noch ein umfangreichere theoretische Kenntnisse, die im Kapitel 9 über von LZK-Systemen behandelt werden.

---

# Kapitel 9

## Analyse linearer Systeme



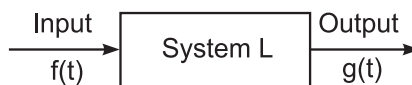


# Analyse linearer Systeme

**Überblick:** Systemanalyse: Für lineare Systeme gibt es eine das System beschreibende Funktion: Die Impulsantwort. Durch die Kenntnis der Impulsantwort ist man in der Lage für jedes Eingangssignal das zugehörige Ausgangssignal vorauszusagen. In diesem Kapitel wird auch der Zusammenhang der Impulsantwort mit der Übertragungsfunktion diskutiert.

**Keywords:** Impulsantwort, Übertragungs- bzw. Systemfunktion, LTK-Systeme, Sprungantwort, Fourier-Transformation.

Um das Übertragungsverhalten von Systemen zu bestimmen, untersucht man in der Systemanalyse den Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal  $f(t)$  und dem zugehörigen Ausgangssignal  $g(t)$ .



**Abbildung 9.1.** Schematische Darstellung eines Systems

Im Folgenden werden wir die *linearen* Systeme charakterisieren. Es zeigt sich, dass ein lineares System durch die *Impulsantwort* (Reaktion des Systems auf die Impulsanregung) vollständig beschrieben wird. In vielen Fällen lässt sich aber besser die Fourier-Transformierte der Impulsantwort (= *Systemfunktion*) bestimmen. Ziel dieses Kapitels ist, den Zusammenhang zwischen Systemfunktion und Impulsantwort und deren Bedeutung aufzuzeigen.

## 9.1 LTK-Systeme

Ein **Analogsystem**  $L$  ist eine Vorschrift, die jedem Eingangssignal  $f(t)$  ein Ausgangssignal  $g(t)$  zuweist. Ein Analogsystem ist also eine Transformation  $L$ , die jeder Eingangsfunktion  $f$  (*Input*) eine Ausgangsfunktion  $g$  (*Output*) zuordnet:

$$g(t) = L[f(t)]$$

Da wir in diesem Kapitel ausschließlich Analogsysteme betrachten, verwenden wir im Folgenden nur den Begriff System.

Ein System  $L$  heißt **linear**, wenn das Superpositionsprinzip gilt:

$$(L) \quad L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)]$$

für beliebige Eingangsfunktionen  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  und Konstanten  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Das Superpositionsprinzip besagt, dass die Antwort eines linearen Systems auf eine Überlagerung von Eingangsfunktionen die Überlagerung der Antwortfunktionen zur Folge hat. Wichtige Spezialfälle von linearen Systemen stellen solche Systeme dar, die sich durch lineare Differenzialgleichungen beschreiben lassen.

Ein System  $L$  heißt **zeitinvariant**, wenn die Reaktion des Systems unabhängig davon ist, wann das Eingangssignal eintrifft:

$$(Z) \quad g(t) = L[f(t)] \Rightarrow g(t - t_0) = L[f(t - t_0)]$$

Z.B. sind alle Netzwerke, die aus zeitlich konstanten Bauelementen (L, R, C) aufgebaut sind, zeitinvariante Systeme. Ein System heißt **kausal**, wenn die Reaktion des Systems  $g(t)$  erst dann einsetzt, wenn die Ursache  $f(t)$  wirksam ist:

$$(K) \quad f(t) = 0 \text{ für } t < t_0 \Rightarrow g(t) = L[f(t)] = 0 \text{ für } t < t_0$$

Bei nichtkausalen Systemen kann die Reaktion schon einsetzen, wenn die Ursache noch nicht vorliegt.

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Beschreibung von linearen, zeitinvarianten, kausalen Systemen (LZK-Systemen).

### Beispiel 9.1: Impulsantwort für ein lineares System.

Die Differenzialgleichung

$$g'(t) + \alpha g(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad g(0) = 0$$

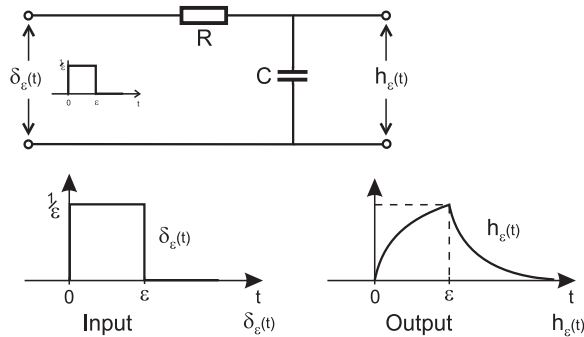
ist stellvertretend z.B. für die Beschreibung eines RC-Kreises ( $\alpha = \frac{1}{RC}$ ). Dieses System stellt ein LZK-System dar.  $f(t)$  ist die Ursache,  $g(t)$  ist die Systemreaktion auf  $f(t)$ . Für diesen RC-Kreis geben wir für das Eingangssignal  $\delta_\varepsilon(t)$  das zugehörige Ausgangssignal  $h_\varepsilon(t)$  an. Dabei ist das Eingangssignal ein Rechteck der Breite  $\varepsilon$  und Höhe  $1/\varepsilon$  (siehe Abb. 9.2) Im Bereich  $0 \leq t \leq \varepsilon$  wächst die Spannung am Kondensator gemäß

$$\frac{1}{\alpha \varepsilon} (1 - e^{-\alpha t})$$

an (*Einschaltvorgang*) und im Bereich  $t > \varepsilon$  klingt die Spannung wie

$$\frac{1}{\alpha \varepsilon} (e^{\alpha \varepsilon} - 1) e^{-\alpha t}$$

ab (*Ausschaltvorgang*), was man durch Einsetzen in die Differenzialgleichung bestätigt.



**Abbildung 9.2.** Eingangs- und Ausgangssignal eines RC-Kreises

Damit ist die Systemantwort auf  $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} (S(t) - S(t - \varepsilon))$  gegeben durch

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha \varepsilon} (1 - e^{-\alpha t}) & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \frac{1}{\alpha \varepsilon} (e^{\alpha \varepsilon} - 1) e^{-\alpha t} & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

Wir betrachten nun den Fall  $\varepsilon \rightarrow 0$ , d.h. die Anregung des Systems erfolgt durch den  $\delta$ -Impuls  $\left(\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)\right)$ . Da wir an dem Zeitverhalten der Funktion für  $t > 0$  interessiert sind, nehmen wir die Funktionsvorschrift von  $h_\varepsilon(t)$  für  $t \geq \varepsilon$  und bestimmen hiervon den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Für  $t > 0$  gilt mit der Regel von l'Hospital

$$h(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \varepsilon} - 1}{\alpha \varepsilon} e^{-\alpha t} \stackrel{0/0}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha e^{\alpha \varepsilon}}{\alpha} e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-\alpha t} S(t)$$

$h(t)$  heißt *Impulsantwort*; sie stellt die Reaktion des Systems auf die Impulsfunktion  $\delta(t)$  dar.  $\square$

## 9.2 Impulsantwort

Die Vorgehensweise, die wir im obigen Beispiel gewählt haben, führen wir für beliebige lineare Systeme durch: Sei  $L$  ein LZK-System und  $\delta_\varepsilon(t)$  die Familie von Rechteckfunktionen. Für jedes  $\delta_\varepsilon(t)$  berechnet man das Antwortsignal  $h_\varepsilon(t) = L[\delta_\varepsilon(t)]$ .

Da  $\delta_\varepsilon(t) \rightarrow \delta(t)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $L$  ein lineares System, folgt

$$h(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L[\delta_\varepsilon(t)] = L\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)\right] = L[\delta(t)]$$

$h(t)$  ist die Antwort des Systems auf die Impulsfunktion (= Deltafunktion)  $\delta(t)$  und heißt die **Impulsantwort**.

Die Bedeutung der Impulsantwort wird durch den folgenden Satz hervorgehoben, der besagt, dass man die Systemreaktion  $g(t)$  auf ein **beliebiges** Eingangssignal  $f(t)$  berechnen kann, wenn die Impulsantwort des Systems bekannt ist:

**Faltungssatz:** Sei  $L$  ein lineares, kausales, zeitinvariantes System.  $h(t)$  sei die Impulsantwort und  $f(t)$  ein beliebiges Eingangssignal. Dann ist die Antwort des Systems  $g(t) = L[f(t)]$  gegeben durch

$$g(t) = (f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

**Die Systemreaktion  $g(t) = L[f(t)]$  auf ein beliebiges Eingangssignal  $f$  berechnet sich durch das Faltungsintegral der Impulsantwort  $h$  mit dem Eingangssignal  $f$ .** Diesen zentralen Satz der Systemtheorie begründen wir im Folgenden:

Durch die Ausblendeigenschaft der  $\delta$ -Funktion,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t),$$

und der Definition der  $\delta$ -Funktion als Grenzwert der Funktionenfamilie  $\delta_\varepsilon(t)$ ,  $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$ , gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta_\varepsilon(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Nach der algebraischen Definition des Integrals ersetzen wir das Integral durch eine Summe über Rechtecke  $\Delta\tau_j \cdot f(\tau_j) \delta_\varepsilon(t - \tau_j)$ :

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N f(\tau_j) \delta_\varepsilon(t - \tau_j) \Delta\tau_j$$

Die Antwort des Systems auf das Eingangssignal  $f(t)$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} g(t) &= L[f(t)] = L \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N f(\tau_j) \delta_\varepsilon(t - \tau_j) \Delta\tau_j \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} L \left[ \sum_{j=0}^N f(\tau_j) \delta_\varepsilon(t - \tau_j) \Delta\tau_j \right] \end{aligned}$$

Da  $L$  ein lineares System ist, darf man das Superpositionsgesetz anwenden: Die Reaktion des Systems auf eine Summe von Eingangssignalen ist gegeben durch die Summe der Antwortfunktionen

$$g(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N f(\tau_j) L[\delta_\varepsilon(t - \tau_j)] \Delta\tau_j$$

Aufgrund der Zeitinvarianz,  $L[\delta_\varepsilon(t - \tau_j)] = h_\varepsilon(t - \tau_j)$ , gilt weiter

$$\begin{aligned} g(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N f(\tau_j) h_\varepsilon(t - \tau_j) \Delta\tau_j \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N f(\tau_j) h(t - \tau_j) \Delta\tau_j = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad \square \end{aligned}$$

### Beispiel 9.2: Modellierung der Impulsantwort.

Gesucht ist die Impulsantwort für das lineare System, welches durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben wird:

$$g'(t) + \alpha g(t) = f(t)$$

Die Impulsantwort  $h(t)$  ist die Reaktion des Systems auf das Eingangssignal  $f(t) = \delta(t)$ :

$$h'(t) + \alpha h(t) = \delta(t)$$

Wir wenden auf diese Differenzialgleichung die Fourier-Transformation an. Mit der Verwendung der Ableitungsregel ( $F_7$ ):  $\mathcal{F}(h'(t)) = i\omega \mathcal{F}(h(t))$  und  $\mathcal{F}(\delta) = 1$  folgt

$$\mathcal{F}(h'(t)) + \alpha \mathcal{F}(h(t)) = \mathcal{F}(\delta(t))$$

$$i\omega \mathcal{F}(h(t)) + \alpha \mathcal{F}(h(t)) = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(h(t))(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

Die zu  $\frac{1}{\alpha + i\omega}$  gehörende Zeitfunktion ist nach Beispiel 6.2

$$h(t) = e^{-\alpha t} S(t)$$

□

**Beispiel 9.3 : Simulation der Impulsantwort.**

Wir werden nun das Problem aus Beispiel 9.2 simulieren. Hierzu starten wir wieder mit der Bestimmungsgleichung der Impulsantwort

$$h'(t) + \alpha h(t) = \delta(t)$$

und wenden auf diese Differenzialgleichung die Fourier-Transformation an.

> with(inttrans):

> DG := diff(h(t),t)+alpha\*h(t)=Dirac(t);

$$DG := \frac{d}{dt}h(t) + \alpha h(t) = \text{Dirac}(t)$$

> eq:=fourier(DG, t, w);

$$eq := (w * I + \alpha) * \text{fourier}(h(t), t, w) = 1$$

Wir lösen diese Gleichung nach der Transformaten auf

> H(w):=solve(eq, fourier(h(t), t, w));

$$H(w) := \frac{1}{(w I + \alpha)}$$

und bestimmen für positives  $\alpha$  die Inverse der Transformaten

> assume(alpha, positive):

> h(t):=invfourier( H(w), w, t);

$$h(t) := e^{(-\alpha t)} \text{Heaviside}(t)$$

□

Durch die Kenntnis der Impulsantwort ist man also über den Faltungssatz in der Lage, die Reaktion eines LZK-Systems auf ein beliebiges Eingangssignal zu berechnen. Es stellt sich somit die wichtige Frage, wie man die Impulsantwort bestimmen kann. Dazu gibt es prinzipiell zwei unterschiedliche Vorgehensweisen:

- (1) Zum einen kann man in manchen Fällen zunächst die Fourier-Transformierte der Impulsantwort bestimmen, wenn -wie in unserem Beispiel- das lineare System durch eine Differenzialgleichung beschrieben wird. Durch die inverse Fourier-Transformation berechnet sich anschließend die Impulsantwort. Es zeigt sich für elektrische Netzwerke, dass die Fourier-Transformierte der Impulsantwort über die Anordnung der R-, C-, L-Bauelemente direkt bestimmbar ist. Dies führt auf den Begriff der **Übertragungs-** bzw. **Systemfunktion** (9.5.3 und 9.5.4).
- (2) Wenn die Anordnung des linearen Systems nicht im Detail bekannt ist, das System also nur als "black-box"-System zur Verfügung steht, so kann man die Impulsantwort experimentell bestimmen, indem man das System mit der Impulsfunktion anregt. Die zugehörige Systemreaktion ist dann die Impulsantwort. Einfacher als die Impulsfunktion ist die Sprungfunktion (= *Einschaltfunktion*) realisierbar. Über die *Sprungantwort* (= Reaktion des Systems auf die Sprungfunktion  $S(t)$ ) ist die Impulsantwort ebenfalls berechenbar. Den Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsantwort stellen wir in 9.5.5 dar.

## 9.3 Die Systemfunktion (Übertragungsfunktion)

Das Konzept der Systemfunktion liefert einen eleganten Weg, die Fourier-Transformierte der Impulsantwort zu bestimmen.

**Methode 1:** Wir wählen als spezielles Eingangssignal für ein LZK-System  $L$  die komplexe Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{i\omega t}$$

Ist  $h(t)$  die Impulsantwort des Systems, bestimmt sich die Systemantwort  $y(t)$  über das Faltungsintegral von  $x(t)$  mit  $h(t)$ :

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) d\tau$$

Die Antwort des Systems ist wieder eine Exponentialfunktion multipliziert mit der komplexen Amplitude

$$H(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) d\tau \quad (1)$$

$H(\omega)$  wird als **Systemfunktion** oder **Übertragungsfunktion** bezeichnet. **Die Systemfunktion ist die Fourier-Transformierte der Impulsantwort!** Die Reaktion des LZK-Systems auf das Eingangssignal  $x(t) = e^{i\omega t}$  ist eine Funktion mit dem Zeitverhalten  $e^{i\omega t}$  und komplexer Amplitude  $H(\omega)$ . Regt man ein LZK-System harmonisch mit der Frequenz  $\omega$  und Amplitude 1 an, so ist die Systemreaktion wieder eine harmonische Funktion mit **gleicher** Frequenz  $\omega$  aber mit in der Regel betragsmäßig kleinerer Amplitude  $H(\omega)$ . Da  $H(\omega)$  eine komplexe Amplitude darstellt, sind hierin sowohl die Information über den Betrag der Ausgangsamplitude  $|H(\omega)|$  als auch die Phasenbeziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal  $\tan \varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Im} H(\omega)}{\operatorname{Re} H(\omega)}$  enthalten.

**Methode 2:** Da  $y(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$  die Systemreaktion auf das Eingangssignal  $x(t) = e^{i\omega t}$  ist, gilt

$$y(t) = L[x(t)],$$

$$\Rightarrow H(\omega) e^{i\omega t} = L[e^{i\omega t}] \hookrightarrow H(\omega) = \frac{L[e^{i\omega t}]}{e^{i\omega t}}$$

Die Systemfunktion ist demnach gegeben durch

$$H(\omega) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{i\omega t}} \quad (2)$$

Man erhält die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  zu einer vorgegebenen Frequenz  $\omega$ , wenn man speziell für die Eingangsfunktion  $x(t) = e^{i\omega t}$  das Verhältnis von zugehöriger Ausgangs- zu Eingangsfunktion im Zeitbereich bildet.



**Beispiel 9.4 : Systemfunktion.**

In Beispiel 9.2 wurde die Fourier-Transformierte von  $h(t)$  bestimmt, indem als Eingangsfunktion  $\delta(t)$  gewählt wurde. Jetzt berechnen wir nochmals die Systemfunktion für das System

$$g'(t) + \alpha g(t) = f(t) \quad (*)$$

indem wir  $f(t) = e^{i\omega t}$  und zugehörig  $g(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$  setzen.  $f$  und  $g$  in die Differenzialgleichung  $(*)$  eingesetzt, liefert

$$i\omega H(\omega) e^{i\omega t} + \alpha H(\omega) e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

Dies ist dasselbe Ergebnis wie wir in Beispiel 9.2 als Fourier-Transformierte der Impulsantwort erhalten haben.  $\square$

**Erkenntnis: Impulsantwort und Systemfunktion sind äquivalente Kenngrößen für lineare Systeme, die sich mittels der Fourier-Transformation umrechnen lassen. Systeme mit gleicher Impulsantwort bzw. Systemfunktion reagieren auf gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen.**

**Methode 3:** Wir geben neben Gleichung (1) und (2) noch eine dritte Möglichkeit an, die Systemfunktion zu bestimmen. Dazu gehen wir von einem beliebigen Eingangssignal  $f(t)$  aus. Sei  $g(t)$  das zugehörige Antwortsignal, dann ist nach dem Faltungssatz

$$g(t) = (f * h)(t)$$

Wir wenden auf diese Gleichung die Fourier-Transformation an und benutzen das Faltungstheorem ( $F_9$ ):

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f * h) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(h) \quad (3)$$

Bezeichnet  $F(\omega)$  die Fourier-Transformierte des Eingangssignals  $f(t)$ ,  $G(\omega)$  die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals  $g(t)$  und  $H(\omega)$  die Fourier-Transformierte der Impulsantwort  $h(t)$ , so schreibt sich Gleichung (3):  $G(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega)$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)} \quad (4)$$

Gleichung (4) besagt, dass die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  bestimmt werden kann, indem für ein beliebiges Eingangssignal  $f(t)$  das Spektrum des zugehörigen Ausgangssignals  $G(\omega)$  durch das Spektrum des Eingangssignals  $F(\omega)$  dividiert wird. Diese dritte Alternative zur Berechnung der Übertragungsfunktion ist die allgemeinste und enthält die Alternativen (1) und (2) als Spezialfälle.

**Zusammenfassung: (Systemfunktion).** Es stehen drei äquivalente Methoden zur Berechnung der **Systemfunktion**  $H(\omega)$  eines LTK-Systems zur Verfügung:

- (1)  $H(\omega)$  ist die Fourier-Transformierte der Impulsantwort:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

- (2) Für die harmonische Eingangsfunktion  $x(t) = e^{i\omega t}$  ist  $H(\omega)$  die komplexe Amplitude der Antwortfunktion  $y(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$ :

$$H(\omega) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{i\omega t}}$$

- (3) Ist  $F(\omega)$  das Spektrum des Eingangs- und  $G(\omega)$  das Spektrum des zugehörigen Ausgangssignals, dann ist

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

#### Beispiel 9.5: Systemfunktion.

Gegeben ist ein System, das durch die Differenzialgleichung

$$y'''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

beschrieben wird. Wir bestimmen auf drei alternativen Wegen die Systemfunktion  $H(\omega)$ .

- (1)  $H(\omega)$  ist die Fourier-Transformierte der Impulsantwort  $h(t) = \mathcal{L}[\delta(t)]$ : Setzen wir also  $f(t) = \delta(t)$ , dann ist  $g(t) = h(t)$

$$h'''(t) + a_1 h'(t) + a_0 h(t) = \delta(t)$$

Durch Anwenden der Fourier-Transformation auf die Differenzialgleichung ist

$$\mathcal{F}(h''') + a_1 \mathcal{F}(h') + a_0 \mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(\delta)$$

Wegen  $H(\omega) = \mathcal{F}(h)$  (Übertragungsfunktion = Fourier-Transformierte der Impulsantwort) folgt mit der Ableitungsregel ( $F_8$ )

$$(i\omega)^3 H(\omega) + a_1 i\omega H(\omega) + a_0 H(\omega) = 1 \quad (*_1)$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^3 + a_1 i\omega + a_0} \quad (*_2)$$

- (2) Setzen wir als spezielles Eingangssignal  $x(t) = e^{i\omega t}$  ( $= f(t)$ ), ist die Systemantwort  $y(t) = e^{i\omega t} H(\omega)$ . In die Differenzialgleichung eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} (e^{i\omega t} H(\omega))''' + a_1 (e^{i\omega t} H(\omega))' + a_0 (e^{i\omega t} H(\omega)) &= e^{i\omega t} \\ (i\omega)^3 e^{i\omega t} H(\omega) + a_1 (i\omega) e^{i\omega t} H(\omega) + a_0 e^{i\omega t} H(\omega) &= e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Division dieser Gleichung durch  $e^{i\omega t}$  liefert  $(*)_1$  und damit als Übertragungsfunktion ebenfalls

$$H(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^3 + a_1 i\omega + a_0}$$

- (3) Ist  $f(t)$  das Eingangssignal und  $g(t)$  das zugehörige Ausgangssignal, ist die Beziehung zwischen  $f$  und  $g$  durch die Differenzialgleichung gegeben

$$g'''(t) + a_1 g'(t) + a_0 g(t) = f(t)$$

Anwenden der Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}(g''') + a_1 \mathcal{F}(g') + a_0 \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f)$$

mit Ableitungsregel ( $F_6$ ) ergibt

$$(i\omega)^3 \mathcal{F}(g) + a_1 (i\omega) \mathcal{F}(g) + a_0 \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f)$$

Mit  $F(\omega) = \mathcal{F}(f)$  und  $G(\omega) = \mathcal{F}(g)$  gilt

$$\begin{aligned} \left( (i\omega)^3 + a_1 (i\omega) + a_0 \right) G(\omega) &= F(\omega) \\ \Rightarrow H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)} &= \frac{1}{(i\omega)^3 + a_1 i\omega + a_0} \end{aligned}$$

Dies ist dasselbe Ergebnis für  $H(\omega)$  wie unter (1) und (2). □

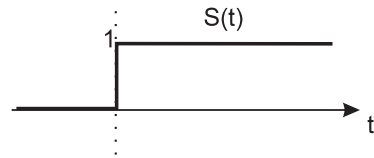
Die Systemfunktion kann in vielen Fällen einfacher bestimmt werden als die Impulsantwort. Ist sie bekannt, so bestimmt sich die Impulsantwort durch die *inverse Fourier-Transformation*. Welche der drei Alternativen zur Berechnung der Systemfunktion genommen wird, hängt von der konkreten Problemstellung ab.

Ein Vorteil der Systemfunktion (= Übertragungsfunktion) gegenüber der Impulsantwort liegt z.B. bei der Anwendung auf elektrische Netzwerke darin, dass die Systemfunktion direkt über die komplexen Widerstände bestimmt werden kann und man nicht erst die zugehörige Differenzialgleichung aufstellen und lösen muss, wie wir im nächsten Abschnitt exemplarisch zeigen werden.

## 9.4 Zusammenhang zwischen der Sprung- und Deltafunktion

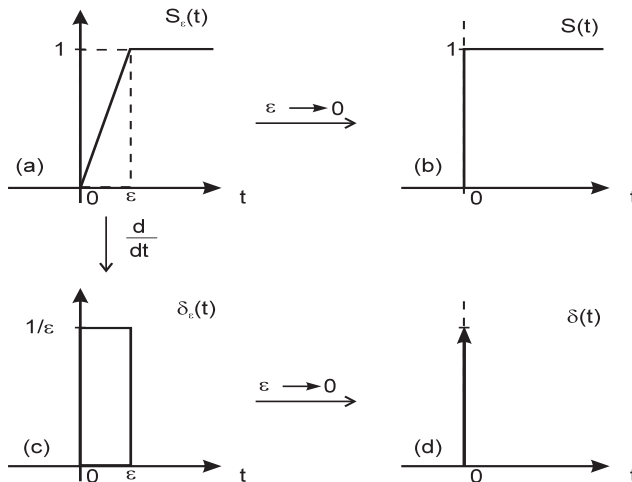
Als Sprungfunktion (Heavisidefunktion) bezeichnen wir die Funktion

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



Die **Sprungfunktion** nähert den Einschaltvorgang für Systeme an, die für  $t < 0$  ausgeschaltet und für  $t > 0$  eingeschaltet sind. Mit Hilfe von  $S(t)$  ist oft eine besonders einfache Bestimmung der Impulsantwort möglich. Da  $S(t)$  in  $t = 0$  nicht stetig ist, kann man diese Funktion im Punkte  $t = 0$  nicht ohne weiteres differenzieren. Es zeigt sich aber, dass die Ableitung von  $S(t)$  trotzdem gebildet werden kann, wenn man die Deltafunktion als Ergebnis zulässt! Zur Klärung betrachten wir die Bildfolge in Abb. 9.3 (a) - (d).

In Abb. 9.3 (a) ist eine Familie  $S_\varepsilon(t)$  abgebildet, die für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in die Sprungfunktion  $S(t)$  übergeht Abb. 9.3 (b):  $S(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon(t)$ .



**Abbildung 9.3.** Von der Sprungfunktion zur Deltafunktion

In Abb. 9.3 (c) bilden wir die Ableitung  $S'_\varepsilon(t) = \delta_\varepsilon(t)$ , die mit der Familie  $\delta_\varepsilon(t)$  identisch ist. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$ . Als Ergebnis gewinnen wir die Beziehung

$$\frac{d}{dt} S(t) = \delta(t)$$

Mit dieser Beziehung lassen sich auch andere Funktionen differenzieren, die eine Sprungstelle aufweisen.

**Zusammenhang zwischen Impuls- und Sprungantwort.** Wir definieren die **Sprungantwort**  $SA(t)$  als die Reaktion eines LTK-Systems auf die Sprungfunktion  $S(t)$ :

$$SA(t) = L[S(t)] \quad (\text{Sprungantwort}).$$

Aufgrund der Beziehung  $\delta(t) = \frac{d}{dt} S(t)$  gilt formal für die Ableitung der Sprungantwort

$$\frac{d}{dt} SA(t) = \frac{d}{dt} L[S(t)] = L\left[\frac{d}{dt} S(t)\right] = L[\delta(t)]$$

$L[\delta(t)]$  ist die Reaktion des Systems auf die Impulsfunktion, also die Impulsantwort  $h(t)$ .

$$\Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt} SA(t)$$

**Die Ableitung der Sprungantwort ist die Impulsantwort.**

---

#### Beispiel 9.6: Impulsantwort.

Gegeben ist die Sprungantwort  $SA(t)$  des RC-Kreis.

$$SA(t) = S(t) \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

Gesucht ist die Impulsantwort. Durch die Beziehung

$$h(t) = \frac{d}{dt} SA(t)$$

ist die Impulsantwort

$$h(t) = SA'(t) = \delta(t) \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) + S(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Wegen der Eigenschaft der  $\delta$ -Funktion  $\delta(t) f(t) = \delta(t) f(0)$  gilt

$$h(t) = \delta(t) \cdot 0 + S(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = S(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \square$$

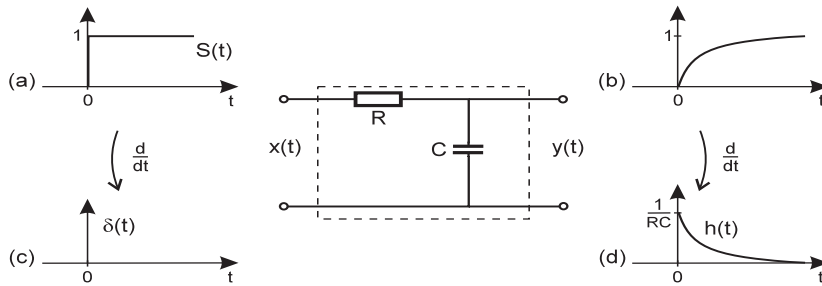


Abbildung 9.4. Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsantwort

**Zusammenfassung: (Impulsantwort).** Ein lineares, zeitinvariantes, kausales System  $L$  (LZK-System) wird durch die **Impulsantwort**  $h(t)$  vollständig charakterisiert; denn nach dem *Faltungssatz* kann für ein beliebiges Eingangssignal  $f(t)$  das Ausgangssignal  $g(t) = L[f(t)]$  berechnet werden durch

$$g(t) = (f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- (1) Die Impulsantwort ist die Reaktion des Systems auf das Eingangssignal  $\delta(t)$ :

$$h(t) = L[\delta(t)]$$

- (2) Die Impulsantwort ist die Ableitung der Sprungantwort  $SA(t) = L[S(t)]$ :

$$h(t) = \frac{d}{dt} SA(t)$$

- (3) Ist  $H(\omega)$  die Systemfunktion (Übertragungsfunktion), dann ist  $h(t)$  die inverse Fourier-Transformierte von  $H(\omega)$ :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

## 9.5 Simulation des Frequenzverhaltens der Systeme

### 9.5.1 Frequenzanalyse des Doppelpendelsystems

Zwei Fadenpendel der Länge  $l$ , an deren Ende jeweils eine Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  hängt, werden durch eine Feder mit Federkonstanten  $D$  gekoppelt (siehe Abb. 9.5). Die beiden Massen werden um den Winkel  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  ausgelenkt.

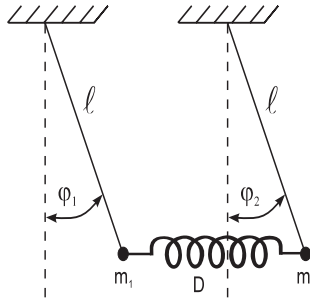


Abbildung 9.5. Gekoppelte Pendel

Berücksichtigt man, dass während der Bewegung auf die Massen eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit wirkt

$$F_R = -\gamma l \dot{\varphi}_i(t) \quad \text{mit Reibungskoeffizient } \gamma,$$

so lauten die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1(t) &= -\frac{g}{l} \varphi_1(t) - \frac{\gamma}{m_1} \dot{\varphi}_1(t) + \frac{D}{m_1} (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \\ \ddot{\varphi}_2(t) &= -\frac{g}{l} \varphi_2(t) - \frac{\gamma}{m_2} \dot{\varphi}_2(t) + \frac{D}{m_2} (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \end{aligned} \quad (*)$$

wenn  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  die Auslenkungen der Massen  $m_1$  und  $m_2$  zum Zeitpunkt  $t$  sind.

Wir wenden die Fourier-Analyse an, um die Eigenfrequenzen des Doppelpendelsystems zu bestimmen. Dazu lösen wir das Differenzialgleichungssystem für die Winkelauslenkungen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$ , wenn auf das Pendel (1) ein Impulsstoß  $\delta(t)$  wirkt. Damit lauten die Differenzialgleichungen für das Pendelsystem ohne Reibung ( $\gamma = 0$ ) und mit zwei gleichen Massen ( $m = m_1 = m_2$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1(t) &= -\frac{g}{l} \varphi_1(t) + \frac{d}{m} (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + \delta(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) &= -\frac{g}{l} \varphi_2(t) + \frac{d}{m} (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \end{aligned}$$

Diese Differenzialgleichungen werden direkt in Maple umgesetzt:

```
> deq1 := diff(phi1(t), t$2) = -g/l * phi1(t) + d/m * (phi2(t) - phi1(t)) + Dirac(t);
> deq2 := diff(phi2(t), t$2) = -g/l * phi2(t) + d/m * (phi1(t)-phi2(t));
```

$$deq1 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_1(t) = -\frac{g \phi_1(t)}{l} + \frac{d (\phi_2(t) - \phi_1(t))}{m} + Dirac(t)$$

$$deq2 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_2(t) = -\frac{g \phi_2(t)}{l} + \frac{d (\phi_1(t) - \phi_2(t))}{m}$$

Wir transformieren das Differenzialgleichungssystem in den Frequenzbereich, indem wir auf beide Differenzialgleichungen die Fourier-Transformation anwenden. Mit dem **fourier**-Befehl erhält man zwei algebraische Gleichungen für  $\Phi_1(\omega)$  und  $\Phi_2(\omega)$ , den Fourier-Transformierten der Winkelauslenkungen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$ :

$$\Phi_1(\omega) = \mathcal{F}(\varphi_1), \Phi_2(\omega) = \mathcal{F}(\varphi_2)$$

```
> with(inttrans):
> eq1 := fourier(deq1, t, w);
> eq2 := fourier(deq2, t, w);

eq1 := -w^2 fourier(phi1(t), t, w) =
- \frac{g \text{fourier}(\phi_1(t), t, w)}{l} + \frac{d (\text{fourier}(\phi_2(t), t, w) - \text{fourier}(\phi_1(t), t, w))}{m} + 1

eq2 := -w^2 fourier(phi2(t), t, w) =
- \frac{g \text{fourier}(\phi_2(t), t, w)}{l} + \frac{d (\text{fourier}(\phi_1(t), t, w) - \text{fourier}(\phi_2(t), t, w))}{m}
```

Zur übersichtlicheren Darstellung kürzen wir die Ausdrücke der Form  $\text{fourier}(\phi(t), t, w)$  durch  $\Phi(w)$  mit dem **alias**-Befehl ab.

```
> alias(Phi1(w) = fourier(phi1(t), t, w):
> alias(Phi2(w) = fourier(phi2(t), t, w):
```

Die beiden linearen Gleichungen für  $\Phi_1(\omega)$  und  $\Phi_2(\omega)$  lauten damit

```
> eq1; eq2;
```

$$-w^2 \Phi_1(w) = -\frac{g \Phi_1(w)}{l} + \frac{d (\Phi_2(w) - \Phi_1(w))}{m} + 1$$

$$-w^2 \Phi_2(w) = -\frac{g \Phi_2(w)}{l} + \frac{d (\Phi_1(w) - \Phi_2(w))}{m}$$

Durch das Lösen des LGS mit dem **solve**-Befehl erhält man die Transformierten der Winkelauslenkungen.

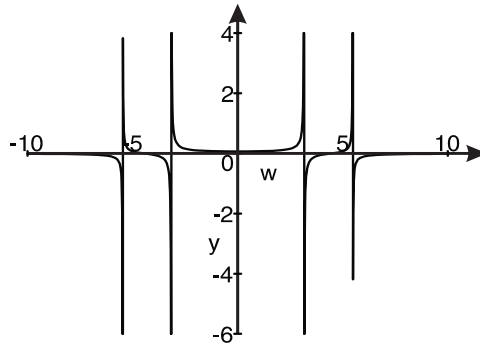
```
> sol := solve({eq1, eq2}, {Phi1(w), Phi2(w)});
> assign(sol);
```

$$sol := \left\{ \begin{aligned} \Phi_1(w) &= \frac{l (-w^2 l m + g m + d l)}{-2 m w^2 l g + m g^2 + m w^4 l^2 + 2 g d l - 2 w^2 l^2 d}, \\ \Phi_2(w) &= \frac{l^2 d}{-2 m w^2 l g + m g^2 + m w^4 l^2 + 2 g d l - 2 w^2 l^2 d} \end{aligned} \right\}$$

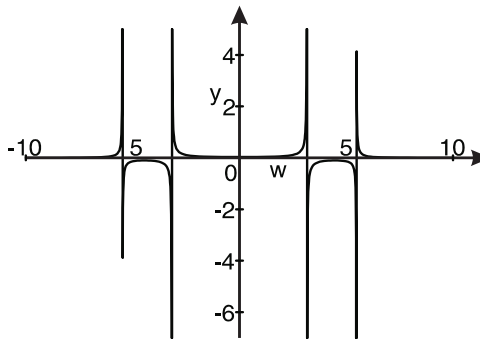


$\Phi_1(\omega)$  und  $\Phi_2(\omega)$  sind die Übertragungsfunktionen für Pendel (1) bzw. (2), wenn man Pendel (1) anregt. Wir stellen beide Übertragungsfunktionen in Abb. 9.6 und Abb. 9.7 graphisch dar:

```
> parameter := {g=10, m=0.1, l=1, d=1};
> plot(subs(parameter, Phi1(w)), w = -10..10);
> plot(subs(parameter, Phi2(w)), w = -10..10);
```



**Abbildung 9.6.** Frequenzspektrum des Doppelpendelsystems (Pendel 1)



**Abbildung 9.7.** Frequenzspektrum des Doppelpendelsystems (Pendel 2)

Aus den beiden Graphen entnimmt man die Resonanzfrequenzen  $\omega_1 = 3.1$  und  $\omega_2 = 5.48$ . Dies bedeutet, dass das Doppelpendelsystem zwei Eigenfrequenzen besitzt. Da keine Reibungskräfte bei der Erstellung des Modells berücksichtigt wurden, entsprechen die Eigenfrequenzen genau den Polstellen der Übertragungsfunktion: Wird das System mit diesen Frequenzen angeregt, kommt es zur Resonanzkatastrophe. Die Polstellen erhalten wir rechnerisch über die Nullstellen des Zählers von  $\Phi_1(\omega)$ :

```
> sol := solve(denom(Phi1(w)) = 0, w);
```

$$\text{sol} := -\frac{\sqrt{gl}}{l}, \frac{\sqrt{gl}}{l}, -\frac{\sqrt{ml(gm + 2dl)}}{ml}, \frac{\sqrt{ml(gm + 2dl)}}{ml}$$

**Zusammenfassung:** Durch die Fourier-Transformation der Impulsanregung eines linearen Systems lassen sich die charakteristischen Frequenzen des Systems bestimmen. Die Resonanzstellen sind die Eigenfrequenzen des Systems.  $\square$

### 9.5.2 Frequenzanalyse eines Hochpasses

Gegeben ist der Hochpass HP2TCLC, der aus zwei  $T$ -Gliedern zusammengesetzt ist (siehe Beispiel 1.1 aus Kapitel 1). Zur Bestimmung der Systemfunktion (=Übertragungsverhalten) setzen wir als Eingangsspannung die Delta-Funktion (=Impulsfunktion). Dann ist das Ausgangssignal die Impulsantwort. Die Fourier-Transformierte der Impulsantwort ist aber wiederum die Systemfunktion!

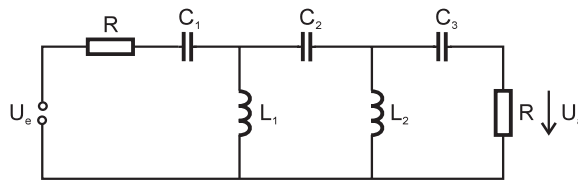


Abbildung 9.8. Hochpass aus 2  $T$ -Gliedern

Die Differenzialgleichungen lauten nach Beispiel 1.1

- >  $\text{deq1} := R \cdot C_1 \cdot \text{diff}(U_1(t), t) + L_1 \cdot \text{diff}(I_1(t), t) = \text{Dirac}(t) - U_1(t);$
- >  $\text{deq2} := C_1 \cdot \text{diff}(U_1(t), t) - C_2 \cdot \text{diff}(U_2(t), t) = I_1(t);$
- >  $\text{deq3} := L_1 \cdot \text{diff}(I_1(t), t) - L_2 \cdot \text{diff}(I_2(t), t) = U_2(t);$
- >  $\text{deq4} := C_2 \cdot \text{diff}(U_2(t), t) - C_3 \cdot \text{diff}(U_3(t), t) = I_2(t);$
- >  $\text{deq5} := L_2 \cdot \text{diff}(I_2(t), t) - R \cdot C_3 \cdot \text{diff}(U_3(t), t) = U_3(t);$

Dabei haben wir als Eingangssignal  $U_e(t) = \delta(t)$  die Impulsfunktion gewählt. Da die Systemfunktion die Fourier-Transformierte der Impulsantwort ist, wenden wir die Fourier-Transformation an, um in den Frequenzbereich zu kommen. Durch Anwenden des **fourier**-Befehls auf die Differenzialgleichungen folgt ein lineares Gleichungssystem für die Fourier-Transformierten der Variablen  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_3(t)$ ,  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ .

- > `with(inttrans):`
- >  $\text{eq1} := \text{fourier}(\text{deq1}, t, w);$
- >  $\text{eq2} := \text{fourier}(\text{deq2}, t, w);$
- >  $\text{eq3} := \text{fourier}(\text{deq3}, t, w);$
- >  $\text{eq4} := \text{fourier}(\text{deq4}, t, w);$
- >  $\text{eq5} := \text{fourier}(\text{deq5}, t, w);$

$$\begin{aligned} \text{eq5} &:= I L_2 w \text{fourier}(I_2(t), t, w) \\ -I R C_3 w \text{fourier}(U_3(t), t, w) &= \text{fourier}(U_3(t), t, w) \end{aligned}$$

Zur Abkürzung ersetzen wir mit dem **alias**-Befehl  $\text{fourier}(U_1(t), t, w)$  durch  $F(\omega)$

- >  $\text{alias}(U_1(w) = \text{fourier}(U_1(t), t, w));$
- >  $\text{alias}(U_2(w) = \text{fourier}(U_2(t), t, w));$
- >  $\text{alias}(U_2(w) = \text{fourier}(U_2(t), t, w));$
- >  $\text{alias}(I_1(w) = \text{fourier}(I_1(t), t, w));$
- >  $\text{alias}(I_2(w) = \text{fourier}(I_2(t), t, w));$

und lösen die linearen Gleichungen nach den Variablen  $U_1(\omega)$ ,  $U_2(\omega)$ ,  $U_3(\omega)$ ;  $I_1(\omega)$ ,  $I_2(\omega)$  mit dem **solve-Befehl** auf.

```
> sol := solve({eq1, eq2, eq3, eq4, eq5},
>              {U1(w), U2(w), U3(w), I1(w), I2(w)});
> assign(sol);
```

Für das Übertragungsverhalten sind aber nicht die oben berechneten Größen von Interesse, sondern die am Ohmschen Widerstand abgegriffene Spannung

$$U_a(t) = R \cdot C_3 \cdot U_3'(t)$$

$U_a(t)$  ist die Systemreaktion auf das Eingangssignal  $\delta(t)$ , also die Impulsantwort. Die Systemfunktion ist somit die Fourier-Transformierte von  $U_a(t)$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \mathcal{F}(R \cdot C_3 \cdot U_3'(t))(\omega) = R C_3 \mathcal{F}(U_3'(t))(\omega) \\ &= R \cdot C_3 \cdot i \omega \cdot U_3(\omega). \end{aligned}$$

Für die Parameter  $R = 1000 \, \Omega$ ,  $C_1 = C_3 = 5.28 \cdot 10^{-9} \, F$ ,  $C_2 = \frac{1}{2} C_1$ ,  $L_1 = L_2 = 3.128 \cdot 10^{-3} \, H$  stellen wir die Übertragungsfunktion in Abb. 9.9 graphisch dar.

```
> R:=1000: C1:=5.28e-9: C2:=C1/2: C3:=C1: L1:=3.128e-3: L2:=L1:
> H(w) := R*C3*I*w*U3(w):
> plot(abs(H(w)), w = 0..500000);
```

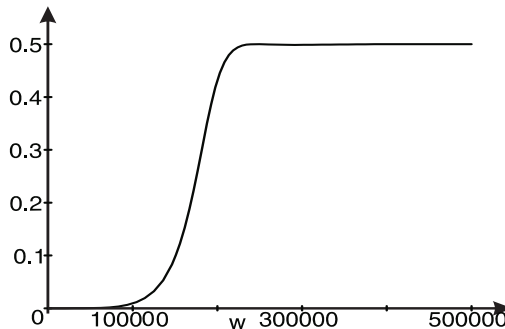


Abbildung 9.9. Frequenzspektrum des Hochpasses

Man erkennt den Hochpasscharakter der Übertragungsfunktion: Tiefe Frequenzen werden gesperrt ( $H(\omega) \approx 0$ ) und hohe Frequenzen können passieren ( $H(\omega) \approx \frac{1}{2}$ ). Die Grenzfrequenz bei halber Amplitude liegt bei  $\omega_g = 175000 \frac{1}{s}$ .  $H(\omega)$  stimmt genau mit der Übertragungsfunktion überein, die wir im Beispiel 1.1 mit der komplexen Rechnung erhalten haben.  $\square$

---

**Zusammenfassung des Kapitels:** In diesem Kapitel haben wir die Beschreibung von LZK-Systemen mit dem Konzept der Impulsantwort eingeführt. Wir haben auch den Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Systemfunktion erklärt. Beide sind über die Fourier-Transformation miteinander verbunden. Mit der Fourier-Analyse der Impulsanregung eines linearen Systems bestimmen wir die charakteristischen Frequenzen des Systems bzw. das Frequenzverhalten der Übertragungsfunktion.

---

# Appendix A

## Einführung in die Benutzeroberfläche



# Einführung in die Benutzeroberfläche



---

**Überblick:** Maple ist ein Computerprogramm, mit dem man Mathematik am Computer betreiben kann, wie man es ursprünglich nur mit Stift und Papier gewohnt war. Nicht nur das Rechnen mit reellen oder komplexen Zahlen wird exakt durchgeführt, sondern auch grundlegende mathematische Problemstellungen der Signalanalyse wie z.B. das Lösen von Gleichungen oder Differenzialgleichungen, die Fourier-Transformation und vieles mehr wird in Maple exakt berechnet.

In diesem Anhang wird die verwendete Benutzeroberfläche von Maple beschrieben, um eine Orientierungshilfe für das Arbeiten mit dem Programm zu erhalten sowie Beispiele für die wichtigsten Befehle angegeben.

---

## A.1 Grundlegendes zur Benutzeroberfläche von Maple

---

### A.1.1 Grundeinstellungen

Nach dem Start von Maple wählen wir zunächst den Modus aus, mit dem wir Maple betreiben: *Worksheet-Mode* oder *Document-Mode*. Wir stellen für alle weiteren Simulationen den **Worksheet-Mode** ein, da wir mehrere Befehle kombinieren, Befehlsoptionen gezielt aktivieren bzw. deaktivieren, die Programmierungselemente verwenden bzw. Prozeduren erstellen. Worksheet-Mode und Document-Mode sind identisch in ihrer Funktionalität.

**Alle Simulationen zur Signal- und Systemanalyse und alle in diesem Buch beschriebenen Simulationen gehen von diesem Worksheet-Mode aus.** Falls die Voreinstellung auf Document-Mode steht, kann man jederzeit nachträglich zum Worksheet-Mode umstellen:

Tools → Options → Interface → Document ↗ Worksheet → Apply Globally

## 146 A Einführung in die Benutzeroberfläche

Nach der Wahl des Modes wird man zur Benutzeroberfläche von Maple weitergeleitet, die von Maple 2019 in Abb. A.1 gezeigt ist:

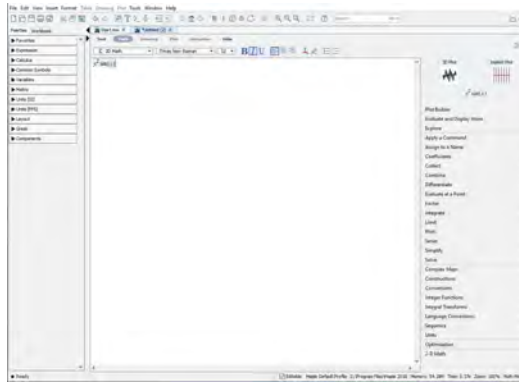


Abbildung A.1. Benutzeroberfläche von Maple (Worksheet-Mode)

Am oberen Rand befinden sich Symbolleisten u.a. zum Dateimanagement, zur Formatierung und Ausführung des Worksheets und Links zur Maple-Hilfe. Am linken Rand befinden sich die Paletten, welche die Eingabe erleichtern, insbesondere wenn man noch keine oder geringe Maple-Kenntnisse besitzt. Mit der Expression Palette können die Befehle sehr einfach, symbolorientiert erstellt werden. Am oberen Rand der Arbeitsfläche sind weitere Formatierungs- und Auswahlelemente.

Die Maple-Eingabezeile ist nun durch einen Schrägstrich [ $>/$ ] oder senkrechten Eingabeprompt [ $>|$ ] gegeben. Maple erwartet jetzt eine Eingabe. Auch bei der *Darstellung* der Eingabe gibt es zwei unterschiedliche Modi. Zum einen den befehlsorientierten Text-Modus oder den symbolorientierte Math-Modus. Beide Modi unterscheiden sich lediglich in der Darstellung der Maple-Eingabe. Wir verwenden den befehlsorientierten Modus.

Obwohl die symbolorientierte Eingabe für den Einstieg in Maple bequemer erscheint, ist die befehlsorientierte Eingabe nicht nur versionsunabhängig, sondern auch übersichtlicher und weniger fehleranfällig. Standardmäßig ist Maple im Math-Modus. **Wir stellen daher einmalig in den Befehls-Modus um:**

**Tools** → Options → Display → Input display **Maple Notation** → Apply Globally.

### A.1.2 Eingabe

Im Text-Modus wird eine Eingabe entsprechend der Maple-Syntax gemacht. Die Eingabe muss mit einem ; oder : abgeschlossen und durch Drücken der **Return**-Taste bestätigt werden. Ein Beispiel:

$> 5*4;$

Die Ausgabe erscheint in blauer Farbe, eine Zeile tiefer und zentriert. Anschließend erscheint wieder eine Eingabeaufforderung. Alle in diesem Buch verwendeten Befehle sind in diesem **Text-Modus** angegeben. Soll beispielsweise die Funktion  $x^2 \sin(x)$  *integriert* werden, so wird der **int**-Befehl spezifiziert:

> **int**( $x^2 \sin(x)$ , x);

$$-x^2 \cos(x) + 2 \cos(x) + 2x \sin(x)$$

Die Maple-Eingabe wird in den nachfolgenden Kapiteln des Buches so spezifiziert. Mit dem **diff**-Befehl wird die *Ableitung* von  $x^2 \sin(x)$  bestimmt.

> **diff**( $x^2 \sin(x)$ , x);

$$2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

Wir können auch einen Ausdruck der Form

>  $y^2 * \sin(x)$ ;

eingeben. Bis Maple 2018 kann man das Ergebnis der Maple-Rechnung (Maple-Output) mit der rechten Maustaste anklicken, dann erhält man ein Kontextmenü (siehe Abb. A.2), aus dem man Operationen auswählen kann, die auf den Ausdruck angewendet werden sollen. Ab Maple 2018 stehen diese Operationen automatisch auf der Leiste am rechten Rand zur Verfügung.



Abbildung A.2. Interaktive Eingabe

Alternativ zum Rechtsklick der Maple-Eingabe, kann auch der Maple-Output weiter interaktiv bearbeitet werden. Kommen wir zur Verdeutlichung auf die Integralaufgabe  $\int x^2 \sin(x) dx$  zurück. Um das Ergebnis der Rechnung einer Variablen *expr* zuzuordnen, verwendet man die Variablenzuweisung mit **:=** vor dem Maple-Befehl:

> **expr** := **int**( $x^2 \sin(x)$ , x);

$$expr := -x^2 \cos(x) + 2 \cos(x) + 2x \sin(x)$$

Alternativ steht der **%**-Operator (ditto-Operator) zur Verfügung. Mit **%** wird auf das Ergebnis der letzten Maple-Rechnung zurückgegriffen. Eine Variablenzuweisung erfolgt dann *nach* dem **int**-Befehl durch

> **expr** := **%**; anschließend können mit *expr* Formelmanipulationen vorgenommen werden:



Markiert man das Ergebnis der Maple-Rechnung (Maple-Output) und betätigt die rechte Maustaste, werden mögliche Rechenoperationen vorgeschlagen, die auf das Ergebnis anwendbar sind. Ab Maple 2018 wird dieses Kontextmenü automatisch am rechten Rand angezeigt. Z.B. *Differentiate*  $\rightarrow$   $x$  differenziert das Ergebnis.

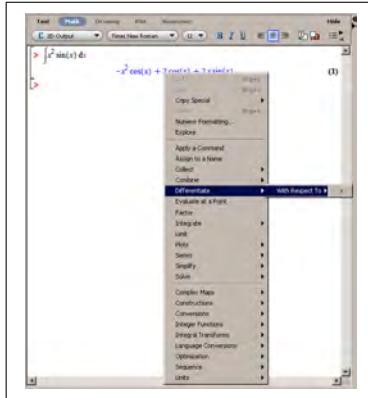


Abbildung A.3. Interaktive Manipulationen der Ausgabe

Wählt man statt dem Differenzieren mit der rechten Maustaste z.B. *Plots*  $\rightarrow$  *2D-Plot*, wird die Funktion in einem *Smartplot* gezeichnet. Die Skalierung der  $x$ -Achse erfolgt dabei immer von -10 bis 10.

## A.2 Weitere Eingabehilfen

### A.2.1 Expression Palette

Standardaufgaben der Mathematik sind als Befehle schon fertig in den Paletten vorgegeben. Man erkennt die Aufgabenstellungen sehr einfach an den angegebenen Symbolen:  $\frac{d}{dx}f$  symbolisiert die Ableitung von  $f$  nach der Variablen  $x$  bzw.  $\int_a^b f dx$  steht für das bestimmte Integral. Z.B. durch Anklicken des Symbols

$$\frac{d}{dx}f$$

für die gewöhnliche Ableitung erscheint im Text-Modus in der Eingabezeile

`> diff(f, x);`

In dieser Eingabezeile muss man nun die farblich gekennzeichneten Symbole **f** und **x** spezifizieren. Durch ein anschließendes Betätigen der Return-Taste wird der Befehl ausgeführt.

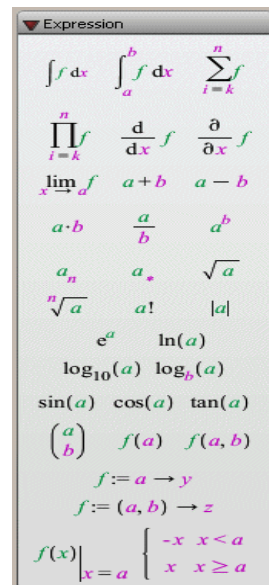


Abbildung A.4. Palette

### A.2.2 Interaktiver PlotBuilder

Sehr umfangreich ist der interaktive **PlotBuilder**. Um ihn zu verwenden, definiert man die zu zeichnende Funktion, z.B. mit  $y := \sin(x)$ ; klickt mit der rechten Maustaste auf die Maple-Ausgabe und folgt der Menüführung

*Plots  $\longrightarrow$  Plot Builder  $\longrightarrow$  Options  $\longrightarrow$  ...  $\longrightarrow$  Plot*

Durch den PlotBuilder, dessen Oberfläche auf der linken Spalte in Abb. A.5 zu sehen ist, wird die Art der Darstellung (z.B.: 2-D plot) selektiert. Über das Untermenü Options können weitere Optionen des plot-Befehls selektiert werden (siehe rechte Spalte).

Wird abschließend der Button **Plot** gedrückt, erscheint das Bild im Worksheet; wird

**Command** gedrückt erhält man den Maple-Befehl mit allen spezifizierten Optionen.



Abbildung A.5. PlotBuilder

### A.2.3 Interaktiver DE Solver

Sehr umfangreich ist auch der interaktive **DE Solver**. Um ihn zu verwenden definiert man die zu lösende Differenzialgleichung, klickt mit der rechten Maustaste auf die Maple-Ausgabe und folgt dem Kontextmenü

*Solve DE Interactively*

In diesem Menü können Anfangsbedingungen oder Parameter der Differenzialgleichung spezifiziert werden. Man entscheidet, ob die Differenzialgleichung numerisch oder analytisch gelöst werden soll und erhält entsprechend der Wahl ein weiteres Menü, bei dem man Optionen zur Lösung spezifizieren kann. Man entscheidet, ob die Maple-Befehle

## 150 A Einführung in die Benutzeroberfläche

angezeigt werden sollen und welche Ausgabe man im Worksheet haben möchte (Plot/ Solution/ MapleCommand) bzw. (Plot/ NumericProcedure/ MapleCommand) im Falle der numerischen Variante.

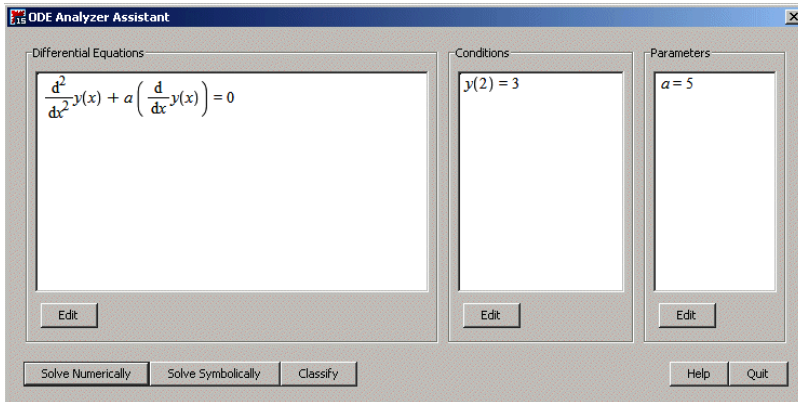
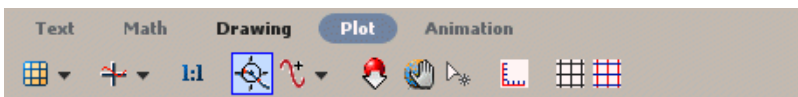


Abbildung A.6. Interaktiver DE Solver

## A.2.4 Maple-Graphik

Durch Anklicken einer in Maple erstellten Graphik (erzeugt z.B. durch den Befehl `plot(x^2, x=0..2);`) erscheint eine neue Toolbar an der oberen Taskleiste, mit der man die Graphik *nachträglich* interaktiv ändern kann.



Jetzt ist der **Plot**-Modus aktiv. Man kann z.B. die Achsen beschriften, Gitterlinien einfügen, den Graphen verschieben, zoomen oder Eigenschaften des Graphen wie Liniestärke, Farbe und vieles mehr ändern. Es steht aber auch der **Drawing**-Modus zur Verfügung. Mit dieser Option kann man in der gewählten Graphik weitere Graphik-Elemente einfügen, die unter den zugehörigen Icons anwählbar sind. Alternativ steht wieder die rechte Maustaste zur Verfügung. Dadurch gibt es eine bequeme Möglichkeit Legenden zu beschriften, in die Graphik mit einzubinden sowie die Graphiken in einem der Formate <eps, gif, jpg, bmp, wmf> abzuspeichern.

Insbesondere um eine Animation, die durch **animate** oder **display** erzeugt wird, zu starten, muss das Bild angeklickt werden. Dann erscheint das Symbol für den **Animation**-Modus. Betätigt man den Startbutton in der oberen Leiste, beginnt die Animation abzulaufen. Bei Animationen können auch der **Plot**- und **Drawing**-Modus durch Anklicken aktiviert werden. Alternativ kann man nach dem Anklicken der Graphik zur Steuerung wieder die rechte Maustaste verwenden.

## A.3 Maple-Strukturen

---

Wie jede Programmiersprache besitzt Maple Symbole für Operatoren, die im Falle der Grundrechenoperationen mit den Standardoperatoren übereinstimmen, Zuweisungsoperatoren und vieles mehr. Für die Klammern gelten bei Maple besondere Konventionen, da sie jeweils eigenständige Bedeutung besitzen. Zur Vollständigkeit werden in diesem Abschnitt auch die Programmierstrukturen wie for-Schleifen oder if-Abfragen zusammengestellt.

### Operatoren

+	Addition	<	kleiner
-	Subtraktion	<=	kleiner gleich
*	Multiplikation	>	größer
/	Division	>=	größer gleich
**	Potenz	=	gleich
^	Potenz	<>	ungleich
.	Matrizenmultiplikation		

### Nulloperatoren

:=	Zuweisung
;	Befehlende zur Ausführung und Ausgabe des Ergebnisses
:	Befehlende zur Ausführung <i>ohne</i> Ausgabe des Ergebnisses
%	zuletzt berechneter Ausdruck (ditto-Operator)
\n	An- und Abführungszeichen für Texte in Maple-Befehlen

### Klammern

( ... )	Klammerung in einer mathematischen Formel
[ .., ....., .]	Erzeugung einer Liste
< .., ....., .>	Erzeugung eines Spaltenvektors
< .  . ...  .>	Erzeugung eines Zeilenvektors
{ .., ....., .}	Erzeugung einer Menge

### Programmierstrukturen

**for-Schleife** for <index> from <start> by <schritt> to <ende>  
do <anweisungen> end do;

**while-Schleife** while <bedingung>  
do <anweisungen> end do;

**if-Bedingung** if <bedingung> then <anweisungen> endif;  
**if/else** if <bedingung> then <anweisungen>  
else <anweisungen>  
endif;

**Prozeduren** p:= proc(<parameter>)  
local <variablen>;  
<anweisungen>  
end;

## A.4 Maple-Hilfe

Maple bietet sowohl dem Anfänger als auch dem fortgeschrittenen Nutzer eine sehr umfangreiche Hilfe an, die man über den Menüpunkt

**Help** → Maple Help

erhält. Es öffnet sich anschließend ein separates Fenster (siehe Abb. A.7), in dem man dann die gewünschte Hilfestellung zu dem eingegebenen Befehl erhält. Besonders wertvoll sind die Beispiele, die sich mit Copy und Paste direkt in das aktuelle Worksheet übertragen lassen. Somit hat man schon ein syntaktisch korrektes Beispiel.

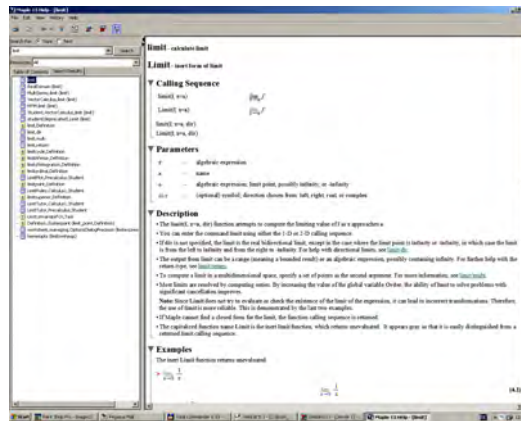


Abbildung A.7. Separates Hilfe-Fenster

Es werden immer alle möglichen Befehle angezeigt, die mit den spezifizierten Buchstaben beginnen. Ist man sich über den Befehlsnamen nicht sicher, dann kann man sich so vortasten: Sucht man z.B. die Hilfeseite für den Befehl der Grenzwerte berechnet, so gibt man am Besten zunächst *li* (für Limes) ein. Anschließend gibt man *limit* ein oder klickt direkt auf den Maple-Vorschlag **limit**.

Alternativ kann man im Worksheet

**> ?limit**

eingeben, dann öffnet sich ebenfalls das Hilfemenü, jetzt aber gleich zum **limit**-Befehl. Oder man klickt im Math-Modus mit der rechten Maustaste auf das Symbol und selektiert *Help on Command*.

# Index

- Übertragungsfunktion, 121
- Amplitudenspektrum, 59, 73
- Analogsystem, 115
- Aufgaben, 163
- Ausblendeigenschaft, 84
- Betrag, 73
- Deltafunktion, 82, 83
  - Ausblendeigenschaft, 84
- DFT, 95
- Diracfunktion, 83
- Diskretisierung, 25
- Doppelpendel
  - diskret, 139
- Doppelpendelsystem, 128
- Euler-Verfahren, 26
- Faltungintegral, 79
- Faltungssatz, 118
- Faltungstheorem, 79
- Fourier-Analyse, 51
- Fourier-Integral, 70
- Fourier-Koeffizienten, 54
  - komplexe, 63
- Fourier-Reihe, 51, 54
  - $2\pi$ -periodische, 54
  - komplexe, 63
  - $p$ -periodische, 57
- Fourier-Transformation, 69
  - der Ableitung, 79
  - der Deltafunktion, 84
  - der  $n$ -te Ableitung, 79
  - Diracfunktion, 82
  - Eigenschaften, 75
  - Faltungssatz, 118
  - Faltungstheorem, 79
  - Frequenzverschiebung, 77
  - Impulsfunktion, 82
  - inverse, 74
  - lineare Systeme, 115
  - Linearität, 75
  - Modulation, 77
  - Symmetrie, 75
  - Zeitverschiebung, 76
- Fourier-Transformierte, 70
- Fouriertransformation
  - diskrete, 95
  - inverse diskrete, 93, 95
- Frequenzanalyse
  - Doppelpendelsystem, 128
  - Hochpass, 131
- Frequenzbereich, 70
- Frequenzverschiebung, 77
- Gekoppelte Pendel, 128
- Gleichspannungsanteil, 59
- Harmonische Schwingungen, 51
- Hochpass, 11
- iDFT, 93, 95
- Impulsantwort, 118, 119, 122, 126, 127
- Impulsfunktion, 83
- Kausales System, 116
- Kippschwingung, 60
- Komplexe Fourier-Reihe, 63
- Lineare Systeme, 115
- Linearität, 75
- Maple
  - Filterschaltungen, 10
  - Frequenzanalyse, 128
- Maple-Befehle
  - alias, 129, 131
  - diff, 129, 131
  - fourier, 129, 131
  - kette, 10
  - plot, 130
  - solve, 129, 132

- Maple-Prozeduren
  - FK\_komplex, 65
- Mittelwerteigenschaft, 54, 74
- Modulation, 77
- Phase, 73
- Phasenspektrum, 59, 73
- Polygonzugverfahren, 26
- Prozeduren
  - kette, 10
- Rechteckimpuls
  - modulierter, 78
- Satz von Fourier, 54, 57
- Schwingungen
  - harmonische, 51
- si-Funktion, 71
- Spektralbereich, 70
- Spektrbreite, 78
- Spektrum, 70
  - Amplitudenspektrum, 59, 73
  - diskretes, 59
  - Phasenspektrum, 59, 73
- Sprungantwort, 126
- Sprungfunktion, 125
- Stückweise Stetigkeit, 54
- Symmetrie, 75
- System Analyse
  - Doppelpendel, 139
- Systeme
  - lineare, 115
- Systemfunktion, 121–123
- T-periodische Signale, 58
- zeitinvariant, 116
- Zeitverschiebung, 76