

Teil I Vorkenntnisse und Grundlagen

1	Basiswissen und Notation	3
1.1	Grundlagen	3
1.1.1	Wichtige Rechenregeln	3
1.1.2	Ungleichung und Betrag	4
1.1.3	Fakultät	5
1.1.4	Komplexe Zahlen	5
1.2	Notation	6
1.2.1	Summenzeichen	6
1.2.2	Produktzeichen	7
1.2.3	Mathematische Symbole und Abkürzungen	7
1.2.4	Griechische Buchstaben	9
2	Mengenlehre zu Funktionen	13
2.1	Was ist eine Funktion?	13
2.1.1	Beispiel	14
2.1.2	Geometrische Deutung von Funktionen	14
2.2	Mengenlehre	16
2.2.1	Mengenrelationen und Mengenoperationen	16
2.2.2	Funktionen in der Mengenschreibweise	17
2.2.3	Zahlenbereiche	18
2.2.4	Intervalle	19

Teil II Funktionen, Differential- und Integralrechnung

3	Funktionen	25
3.1	Einteilung von Funktionen	25
3.2	Grundlegende Funktionstypen und deren Eigenschaften	26
3.2.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	26
3.2.2	Gebrochenrationale Funktionen	36
3.2.3	Potenzfunktionen	45
3.2.4	Exponentialfunktionen	46
3.2.5	Logarithmusfunktionen	49
3.2.6	Umkehrfunktionen	50

3.2.7	Trigonometrische Funktionen	55
3.2.8	Betragsfunktionen	61
3.3	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	63
3.3.1	Stromkosten	63
3.3.2	Virenpopulation	64
3.3.3	Produktion und Nachhaltigkeit	65
3.3.4	Tageslänge	67
3.3.5	Meeresbodentiefe	68
4	Grenzwerte und Stetigkeit	73
4.1	Folgen und Reihen	73
4.1.1	Beispiele.	75
4.1.2	Grenzwert von Folgen	75
4.1.3	Cauchy-Folge.	76
4.1.4	Konvergenzgeschwindigkeiten.	77
4.1.5	Grenzwert von Reihen	79
4.2	Grenzwert von Funktionen.	81
4.2.1	Rechenregeln für Grenzwerte	82
4.3	Stetige und nichtstetige Funktionen.	86
4.3.1	Wie hilft uns eine grobe Intuition zur Stetigkeit?	87
4.3.2	Definition von Unstetigkeitsstellen	88
4.3.3	Stetigkeitsbeweis mit dem Folgenkriterium.	89
4.3.4	Epsilon-Delta-Kriterium der Stetigkeit	91
4.4	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	93
4.4.1	Teichfilter	93
4.4.2	Zinseszinsrechnung	93
4.4.3	Emissionen nach Altersgruppen.	94
4.4.4	Dünger und Ertrag	95
4.4.5	Marmarameer	97
5	Einführung in die Differentialrechnung	103
5.1	Differenzierbarkeit	103
5.2	Ableitungsregeln	107
5.2.1	Ableitungen 1. Ordnung.	109
5.2.2	Ableitungen höherer Ordnung	111
5.3	Kurvendiskussion	113
5.3.1	Steigungsverhalten	113
5.3.2	Monotonieverhalten	115
5.3.3	Krümmungsverhalten.	116
5.4	Regel von l'Hospital.	119
5.4.1	Beispiele.	120
5.4.2	Anwendbarkeit.	121
5.5	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	123
5.5.1	Weltbevölkerung	123
5.5.2	Benzinverbrauch über Bewegungsgesetze	125
5.5.3	Materialkostenminimierung	128

5.5.4	Seever Verschmutzung	129
5.5.5	Windenergie	130
6	Einführung in die Integralrechnung	137
6.1	Bestimmtes Integral	138
6.1.1	Beispiele	139
6.2	Unbestimmtes Integral	139
6.2.1	Beispiele	140
6.2.2	Integrationsregeln	141
6.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	142
6.3.1	Beispiel	144
6.3.2	Eingeschlossene Flächeninhalte	145
6.4	Riemann-Integral	146
6.5	Integrationstechniken	147
6.5.1	Partielle Integration	147
6.5.2	Integration durch Substitution	149
6.6	Uneigentliches Integral	152
6.6.1	Beispiele	153
6.6.2	Integration über die Gauß'sche Glockenkurve	154
6.7	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	155
6.7.1	Mittelwertberechnung mittels Integration	155
6.7.2	Gesamte Tageslänge	156
6.7.3	Räuber-Beute-Systeme	157
6.7.4	Baumwachstum	159
6.7.5	Biologische Auswirkungen von Giftstoffen	161
7	Mehrdimensionale Funktionen	167
7.1	Funktionen mehrerer Veränderlichen	167
7.1.1	Vektorschreibweise	168
7.1.2	Flächen im dreidimensionalen Raum	171
7.2	Stetigkeit im mehrdimensionalen Fall	174
7.2.1	Beispiele	175
7.2.2	Richtungsgrenzwerte und Richtungsstetigkeit	177
7.3	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	179
7.3.1	Integrität von Korallenriffen	179
7.3.2	Günstige Standorte für Windräder	181
7.3.3	Zuchtwertschätzung	183
7.3.4	Umweltschäden und Rebound-Effekt	185
7.3.5	Abgasfahne von Luftschadstoffen	186
8	Partielles Differential	191
8.1	Partielle Ableitung 1. Ordnung	191
8.1.1	Gradient	194
8.1.2	Jacobi-Matrix	197
8.2	Partielle Ableitung 2. Ordnung	198
8.2.1	Beispiel	199

8.2.2	Satz von Schwarz	199
8.2.3	Hesse-Matrix	202
8.3	Kurvendiskussion	203
8.3.1	Extremstellen	203
8.4	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	206
8.4.1	Photobioreaktor	206
8.4.2	Grundwasserleiter Salzwasserintrusion	206
8.4.3	Wärmeinseleffekt	208
8.4.4	Borkenkäfer	210
8.4.5	Landwirtschaftliche Nutzenfunktion	211
 Teil III Ergänzungen und weiterführende Konzepte		
9	Taylor-Näherung	217
9.1	Taylor-Näherung verschiedener Ordnung	218
9.1.1	Taylor-Näherung 1. Ordnung	218
9.1.2	Taylor-Näherung 2. Ordnung	220
9.1.3	Taylor-Polynom höherer Ordnung	221
9.2	Reihenentwicklung	222
9.2.1	Potenzreihendarstellung grundlegender Funktionen	223
9.3	Restglied des Taylor-Polynoms	224
9.3.1	Beispiel	224
9.4	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	225
9.4.1	Näherungsverfahren im Alltag	225
9.4.2	Sättigungsdampfdruck	225
9.4.3	Meerwasserentsalzung	226
10	Koordinatensysteme	229
10.1	Kartesische Koordinaten	230
10.2	Polarkoordinaten	230
10.2.1	Beispiele	232
10.3	Zylinder- und Kugelkoordinaten	235
10.3.1	Beispiele	236
10.4	Differentiation in verschiedenen Koordinaten	237
10.4.1	Zeitliche Ableitung in Polarkoordinaten	237
10.4.2	Zeitliche Ableitung in Zylinderkoordinaten	238
10.4.3	Zeitliche Ableitung in Kugelkoordinaten	238
10.5	Praxisbeispiele aus den Umweltsystemwissenschaften	239
10.5.1	Tornadoverfolgung mit Radar	239
10.5.2	Änderung des magnetischen Nordpols	240
10.5.3	Epizentrum eines Erdbebens	240
Lösungen		243
Literatur		259
Stichwortverzeichnis		261