

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Grundlagen	1
1.1 Mengenlehre	1
1.1.1 Mengenbegriff	2
1.1.2 Mengenoperationen	4
1.1.3 Abbildungen	7
1.2 Logik	12
1.2.1 Aussagenlogik	12
1.2.2 Prädikatenlogik	18
1.2.3 Beweise	23
1.3 Reelle Zahlen	25
1.3.1 Natürliche und ganze Zahlen	25
1.3.2 Rationale Zahlen	34
1.3.3 Reelle Zahlen	44
1.4 Rechnen mit reellen Zahlen	55
1.4.1 Potenzen und Wurzeln	55
1.4.2 Summen und Produkte, Binomischer Lehrsatz	57
1.4.3 Beträge und Ungleichungen	65
1.4.4 Über das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	71
1.5 Reelle Funktionen	77
1.5.1 Notation reeller Funktionen	77
1.5.2 Eigenschaften von reellen Funktionen	80
1.5.3 Umkehrfunktion	85
1.5.4 Verkettung von Funktionen	87
1.5.5 Signum- und Betragsfunktion	89
1.5.6 Polynome und gebrochen-rationale Funktionen	90
1.5.7 Potenz- und Wurzelfunktionen	101
1.5.8 Exponentialfunktionen und Logarithmen	102
1.5.9 Trigonometrische Funktionen	112
1.5.10 Hyperbel- und Areafunktionen	128
1.6 Komplexe Zahlen	131
1.6.1 Erweiterung der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit	132
1.6.2 Komplexe Arithmetik	133
1.6.3 Die Gauß'sche Zahlenebene	135
1.6.4 Euler'sche Gleichung und Polarform komplexer Zahlen	138
1.6.5 Komplexe Wechselstromrechnung*	144
1.6.6 Fundamentalsatz der Algebra	147
1.7 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	152

1.7.1	Lineare Gleichungssysteme	152
1.7.2	Matrizen, Zeilen- und Spaltenvektoren	154
1.7.3	Lösen linearer Gleichungssysteme	161
1.7.4	Inverse Matrix und transponierte Matrix	168
1.7.5	Symmetrische und orthogonale Matrizen	173
1.7.6	Dreiecksmatrizen, Bandmatrizen und LR-Zerlegung *	176
1.8	Determinanten	181
1.8.1	Definition und elementare Eigenschaften von Determinanten	182
1.8.2	Determinanten und lineare Gleichungssysteme	193
1.9	Aufgaben	199
2	Differenzial- und Integralrechnung	211
2.1	Folgen	211
2.1.1	Definition und Grundbegriffe von Folgen	212
2.1.2	Konvergenz und Divergenz von Folgen	216
2.1.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	220
2.1.4	Konvergenzkriterien	223
2.1.5	Die Euler'sche Zahl e als Grenzwert von Folgen	226
2.1.6	Approximation reeller Potenzen	228
2.1.7	Bestimmte Divergenz	229
2.1.8	Häufungspunkte einer Folge *	232
2.1.9	Folgenkompaktheit und Cauchy-Folgen *	232
2.2	Zahlen-Reihen	236
2.2.1	Definition und Konvergenz einer Reihe	237
2.2.2	Rechnen mit konvergenten Reihen	240
2.2.3	Alternativen zur Definition der Reihenkonvergenz	241
2.2.4	Absolute Konvergenz	243
2.2.5	Konvergenzkriterien für Reihen	245
2.3	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	255
2.3.1	Umgebungen und Überdeckungen	255
2.3.2	Grenzwerte von Funktionen	257
2.3.3	Stetigkeit	270
2.3.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	278
2.3.5	Unstetigkeitsstellen	285
2.4	Differenzierbarkeit und Ableitungen	288
2.4.1	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten	289
2.4.2	Ableitungsregeln	295
2.4.3	Newton-Verfahren	305
2.4.4	Das Differenzial	307
2.4.5	Höhere Ableitungen	310
2.5	Zentrale Sätze der Differenzialrechnung	314

2.5.1	Satz von Fermat: notwendige Bedingung für lokale Extrema	314
2.5.2	Mittelwertsätze der Differenzialrechnung	315
2.5.3	Regeln von L'Hospital	322
2.6	Integralrechnung	328
2.6.1	Definition des Integrals	329
2.6.2	Eigenschaften des Integrals	334
2.6.3	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	339
2.6.4	Rechenregeln zur Integration	343
2.6.5	Numerische Integration	359
2.6.6	Uneigentliche Integrale	362
2.6.7	Volumen und Flächen	369
2.6.8	Lebesgue-Integral *	373
2.7	Satz von Taylor, Kurvendiskussion und Extremalprobleme	382
2.7.1	Taylor-Summen	382
2.7.2	Kurvendiskussion und Extremalprobleme	387
2.8	Potenzreihen	398
2.8.1	Unendliche Taylor-Summen und Potenzreihen	398
2.8.2	Einschub: Funktionenfolgen *	402
2.8.3	Konvergenz von Potenzreihen	411
2.8.4	Differenziation und Integration von Potenzreihen	415
2.8.5	Der Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Taylor-Reihen	417
2.8.6	Die komplexe Exponentialfunktion	418
2.9	Aufgaben	420
3	Lineare Algebra	427
3.1	Vektoren in der Ebene und im Raum	427
3.1.1	Vektoren: Grundbegriffe und elementare Rechenregeln	427
3.1.2	Skalarprodukt und Orthogonalität	435
3.1.3	Vektorprodukt und Spatprodukt	442
3.1.4	Anwendungen des Skalar-, Vektor- und Spatprodukts	450
3.2	Analytische Geometrie	452
3.2.1	Geraden in der Ebene und im Raum	453
3.2.2	Ebenen im Raum	460
3.3	Vektorräume	466
3.3.1	Definition des Vektorraums	467
3.3.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	474
3.3.3	Skalarprodukt und Norm	483
3.3.4	Orthogonalität, Orthogonal- und Orthonormalsysteme	488
3.4	Lineare Abbildungen	500
3.4.1	Lineare Abbildungen und Matrizen	500
3.4.2	Summe, skalares Vielfaches und Verkettung linearer Abbildungen ..	506

- 3.4.3 Kern und Bild einer linearen Abbildung, Dimensionssatz 508
 - 3.4.4 Umkehrabbildung und inverse Matrix 515
 - 3.4.5 Koordinaten- und Basistransformationen * 517
- 3.5 Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme 521
 - 3.5.1 Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems 523
 - 3.5.2 Berechnung von linearen elektrischen Netzwerken * 529
- 3.6 Eigenwerte und Eigenvektoren 537
 - 3.6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren 538
 - 3.6.2 Diagonalisierung von Matrizen * 548
 - 3.6.3 Hauptvektoren und Jordan-Normalform * 552
- 3.7 Normierte Vektorräume: Lineare Algebra trifft Analysis * 557
 - 3.7.1 Norm 557
 - 3.7.2 Banach- und Hilbert-Räume 560
 - 3.7.3 L^p -Räume 562
 - 3.7.4 Stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen 566
 - 3.7.5 Einige zentrale Sätze der Funktionalanalysis 577
 - 3.7.6 Sobolev-Räume 584
- 3.8 Aufgaben 585
- 4 Funktionen mit mehreren Variablen 589**
 - 4.1 Grenzwerte und Stetigkeit 592
 - 4.2 Ableitungen von reellwertigen Funktionen mit mehreren Variablen 597
 - 4.2.1 Ableitungsbegriffe 597
 - 4.2.2 Implizite Differenziation und implizite Funktion 609
 - 4.2.3 Höhere Ableitungen 610
 - 4.2.4 Fehlerrechnung * 614
 - 4.3 Extremwertrechnung 617
 - 4.3.1 Lokale und globale Extrema 618
 - 4.3.2 Extrema unter Nebenbedingungen * 631
 - 4.3.3 Lineare Optimierung * 638
 - 4.4 Integralrechnung mit mehreren Variablen 649
 - 4.4.1 Integration über mehrdimensionale Intervalle 649
 - 4.4.2 Integration über Normalbereiche 657
 - 4.4.3 Substitutionsregel 661
 - 4.4.4 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten 663
 - 4.4.5 Lebesgue-Integral, L^p - und Sobolev-Räume * 668
 - 4.5 Vektoranalysis 672
 - 4.5.1 Vektorfelder 673
 - 4.5.2 Kurven 674
 - 4.5.3 Quellen, Senken und Wirbel in Vektorfeldern 678
 - 4.5.4 Kurvenintegrale 680

4.5.5	Satz von Green *	688
4.5.6	Flächenintegrale *	690
4.5.7	Die Sätze von Gauß und Stokes *	694
4.6	Aufgaben	701
5	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	705
5.1	Einführung	705
5.1.1	Beispiele für Differenzialgleichungen aus Physik und Technik	706
5.1.2	Grundbegriffe	710
5.1.3	Konstruktion einer Lösung, Existenz und Eindeutigkeit	715
5.1.4	Iterationsverfahren von Picard und Lindelöf	718
5.1.5	Runge-Kutta-Verfahren	719
5.2	Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen erster Ordnung	721
5.2.1	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	722
5.2.2	Nicht-lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	735
5.3	Lineare Differenzialgleichungssysteme	748
5.3.1	Motivation: Eine Schaltung mit Induktivitäten	748
5.3.2	Grundbegriffe	749
5.3.3	Homogene Lösungen	753
5.3.4	Partikuläre Lösungen	757
5.3.5	Komplexe und mehrfache Eigenwerte *	762
5.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	770
5.4.1	Lösung über ein lineares Differenzialgleichungssystem	770
5.4.2	Lösung mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite	777
5.4.3	Schwingungsgleichung *	782
5.5	Ausblick: Partielle Differenzialgleichungen und Finite-Elemente-Methode *	788
5.5.1	Eine schwingende Saite: Wellengleichung	788
5.5.2	Partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung	790
5.5.3	Finite-Elemente-Methode	792
5.5.4	Beispiel für die Finite-Elemente-Methode in 2-D	799
5.6	Aufgaben	809
6	Fourier-Reihen und Integraltransformationen	813
6.1	Fourier-Reihen	814
6.1.1	Fourier-Koeffizienten und Definition der Fourier-Reihe	815
6.1.2	Sinus- und Kosinus-Form der Fourier-Reihe	821
6.1.3	Komplexwertige Funktionen und Fourier-Koeffizienten	823
6.1.4	Faltung	832
6.1.5	Konvergenz von Fourier-Reihen *	840
6.1.6	Gibbs-Phänomen	853
6.1.7	Entwicklung 2p-periodischer Funktionen	859
6.2	Fourier-Transformation	861

6.2.1	Fourier-Integral	861
6.2.2	Fourier-Umkehrtransformation	865
6.2.3	Fourier-Koeffizienten und Fourier-Transformation	867
6.2.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation	869
6.2.5	Faltung	874
6.3	Laplace-Transformation	878
6.3.1	Von der Fourier- zur Laplace-Transformation	878
6.3.2	Rechnen mit der Laplace-Transformation	882
6.3.3	Laplace-Transformation in der Systemtheorie *	894
6.4	Diskrete Fourier-Transformation	903
6.4.1	Ausgangspunkt: Koeffizienten einer Fourier-Reihe	905
6.4.2	Diskrete Fourier-Transformation	908
6.4.3	Diskrete Faltung *	919
6.4.4	FFT-Algorithmus	923
6.4.5	Numerische Berechnung von Fourier-Koeffizienten	928
6.4.6	Abtastsatz für trigonometrische Polynome	930
6.4.7	Abtastung 2p-periodischer Funktionen und Leck-Effekt (Leakage) *	937
6.4.8	Numerische Berechnung der Fourier-Transformation	939
6.4.9	Abtastsatz der Fourier-Transformation	941
6.4.10	Leck-Effekt und Fensterfunktionen *	950
6.4.11	Zusammenfassung	954
6.5	Wavelets und schnelle Wavelet-Transformation *	954
6.5.1	Idee der Wavelet-Transformation	955
6.5.2	Eindimensionale Wavelet-Transformation mit orthogonalen Wavelets	959
6.5.3	Zweidimensionale diskrete Wavelet-Transformation	963
6.6	Aufgaben	965
7	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	969
7.1	Beschreibende Statistik	970
7.1.1	Grundbegriffe	970
7.1.2	Empirische Verteilungsfunktionen	975
7.1.3	Lageparameter	977
7.1.4	Streuungsparameter	982
7.1.5	Zweidimensionale Häufigkeitsverteilungen und Korrelation	984
7.1.6	Kovarianzmatrix	988
7.1.7	Lineare Regressionsrechnung	992
7.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	997
7.2.1	Zufallsexperimente und Ereignisse	997
7.2.2	Wahrscheinlichkeit und Satz von Laplace	999
7.2.3	Kombinatorik	1003
7.2.4	Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeiten	1008

7.2.5 Zufallsvariablen 1018

7.2.6 Lage- und Streuungsparameter von Zufallsvariablen 1032

7.2.7 Gesetz der großen Zahlen 1042

7.2.8 Zentraler Grenzwertsatz 1047

7.2.9 Integrale über Zufallsvariablen * 1054

7.3 Schließende Statistik 1056

7.3.1 Punktschätzungen 1057

7.3.2 Begriffe der Fehlerrechnung * 1061

7.3.3 Intervallschätzungen 1063

7.3.4 Hypothesentests 1071

7.4 Aufgaben 1076

Literaturverzeichnis 1083

Index 1087