

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einige Worte vorab</b>	<b>v</b>
<b>Analysis</b>	<b>1</b>
<b>1 Worum geht es in der Analysis?</b>	<b>3</b>
<b>2 Ein wenig Vorbereitung</b>	<b>5</b>
2.1 Motivation . . . . .	5
2.2 Ein Vorrat an Buchstaben . . . . .	5
2.3 Vom richtigen Umgang mit der Aussagenlogik . . . . .	6
2.4 Vollständige Induktion . . . . .	9
2.5 Mengen . . . . .	10
2.5.1 Ein kleiner Zoo wichtiger Mengen . . . . .	12
2.5.2 Wie aus bekannten Mengen neue entstehen . . . . .	13
2.6 Aufgaben . . . . .	16
2.7 Lösungen . . . . .	17
<b>3 Reelle und komplexe Zahlen</b>	<b>21</b>
3.1 Motivation . . . . .	21
3.2 Reelle Zahlen . . . . .	21
3.2.1 Rechnen mit Ungleichungen . . . . .	22
3.3 Summen und Produkte . . . . .	23
3.3.1 Fakultät und Binomialkoeffizient . . . . .	25
3.4 Komplexe Zahlen . . . . .	27
3.4.1 Polarkoordinaten . . . . .	29
3.5 Aufgaben . . . . .	31
3.6 Lösungen . . . . .	32
<b>4 Abbildungen und Funktionen</b>	<b>37</b>
4.1 Motivation und Definitionen . . . . .	37
4.2 Einige Eigenschaften von Abbildungen . . . . .	38
4.3 Komposition von Abbildungen . . . . .	42
4.4 Darstellung von Funktionen . . . . .	44
4.5 Aufgaben . . . . .	45

4.6	Lösungen	46
<b>5</b>	<b>Wichtige Funktionen im Überblick</b>	<b>51</b>
5.1	Motivation	51
5.2	Polynome und rationale Funktionen	51
5.2.1	Polynome	51
5.2.2	Rationale Funktionen	52
5.3	Sinus, Kosinus und Tangens	55
5.3.1	Einige Additionstheoreme	57
5.4	Exponentialfunktion und Logarithmus	58
5.4.1	Potenz- und Logarithmusgesetze	59
5.5	Weitere wichtige Funktionen	60
5.6	Aufgaben	63
5.7	Lösungen	63
<b>6</b>	<b>Folgen</b>	<b>69</b>
6.1	Motivation	69
6.2	Grundlagen	69
6.3	Konvergenz und Divergenz	70
6.4	Rechenregeln für Folgen	73
6.5	Das Monotoniekriterium	75
6.6	Was noch über Folgen gewusst werden sollte	75
6.7	Das Häufungspunktprinzip und mehr	76
6.8	Aufgaben	77
6.9	Lösungen	78
<b>7</b>	<b>Reihen</b>	<b>83</b>
7.1	Motivation	83
7.2	Grundlegendes zu Reihen	84
7.3	Eigenschaften von Reihen	86
7.4	Konvergenzkriterien	86
7.4.1	Majorantenkriterium	88
7.4.2	Wurzelkriterium	89
7.4.3	Quotientenkriterium	89
7.4.4	Leibniz-Kriterium	90
7.5	Aufgaben	91
7.6	Lösungen	91
<b>8</b>	<b>Stetigkeit</b>	<b>95</b>
8.1	Motivation	95
8.2	Grundlagen zur Stetigkeit	96
8.3	Zusammensetzung stetiger Funktionen	99
8.4	Der Zwischenwertsatz	100
8.5	Supremum, Infimum, Maximum und Minimum	101
8.6	Maximum und Minimum für stetige Funktionen	102
8.7	Aufgaben	103

8.8	Lösungen	104
<b>9</b>	<b>Differenziation</b>	<b>107</b>
9.1	Motivation	107
9.2	Grundlagen zur Differenziation	108
9.3	Rechenregeln für Ableitungen	110
9.4	Der Mittelwertsatz und Folgerungen daraus	113
9.5	Höhere Ableitungen	115
9.6	Ausflug: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion	116
9.6.1	Schwingung eines Pendels	116
9.6.2	Eigenschaften von Sinus und Kosinus	117
9.6.3	Exponentialfunktion	118
9.7	Die Regel von l'Hospital	118
9.8	Aufgaben	120
9.9	Lösungen	121
<b>10</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>127</b>
10.1	Motivation	127
10.2	Grundlegendes zu Potenzreihen	127
10.3	Aufgaben	130
10.4	Lösungen	131
<b>11</b>	<b>Taylorpolynome, Taylorreihen und Extremwerte</b>	<b>135</b>
11.1	Motivation	135
11.2	Taylorpolynom und Taylorreihe	136
11.2.1	Das Taylorpolynom	136
11.2.2	Die Taylorreihe	138
11.2.3	Fehlerabschätzung	142
11.3	Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen	144
11.3.1	Zur Berechnung lokaler Extrema	144
11.4	Aufgaben	147
11.5	Lösungen	147
<b>12</b>	<b>Integration</b>	<b>151</b>
12.1	Motivation	151
12.2	Grundlagen zur Integration	152
12.3	Der Hauptsatz	155
12.4	Wichtige Regeln zur Integration	157
12.4.1	Substitutionsregel	157
12.4.2	Partielle Integration	159
12.4.3	Integration rationaler Funktionen	160
12.5	Das uneigentliche Integral	162
12.5.1	Integration unbeschränkter Funktionen	164
12.5.2	Unbeschränkte Integrationsgrenzen	164
12.6	Aufgaben	168
12.7	Lösungen	169

<b>13 Ausblick: Fourierreihen</b>	<b>177</b>
13.1 Motivation . . . . .	177
13.2 Grundlagen zu Fourierreihen . . . . .	178
13.3 Komplexe Darstellung der Fourierreihe . . . . .	181
 <b>Lineare Algebra</b>	 <b>185</b>
<b>14 Worum geht es in der Linearen Algebra?</b>	<b>187</b>
<b>15 Vektorräume, lineare Unabhängigkeit</b>	<b>191</b>
15.1 Motivation . . . . .	191
15.2 Vektorräume . . . . .	192
15.3 Der Vektorraum der reellen Zahlen . . . . .	194
15.4 Der Vektorraum reellwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ . . . . .	195
15.5 Linearkombinationen . . . . .	196
15.6 Aufgaben . . . . .	201
15.7 Lösungen . . . . .	202
<b>16 Lineare Abbildungen und Matrizen</b>	<b>207</b>
16.1 Motivation . . . . .	207
16.2 Grundlagen zu linearen Abbildungen . . . . .	207
16.3 Kern und Bild . . . . .	209
16.4 Grundlegendes zu Matrizen . . . . .	211
16.5 Rechnen mit Matrizen . . . . .	213
16.5.1 Multiplikation von Matrizen . . . . .	213
16.5.2 Vektorraumstruktur für Matrizen . . . . .	215
16.6 Besondere Matrizen . . . . .	216
16.7 Aufgaben . . . . .	219
16.8 Lösungen . . . . .	220
<b>17 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>225</b>
17.1 Motivation und elementare Anwendungen . . . . .	225
17.2 Grundlagen . . . . .	227
17.3 Gauß-Algorithmus . . . . .	228
17.3.1 Abweichungen vom Idealfall . . . . .	230
17.4 Die Struktur der Lösungsmenge . . . . .	231
17.5 Zum Invertieren von Matrizen . . . . .	234
17.6 Aufgaben . . . . .	235
17.7 Lösungen . . . . .	235
<b>18 Determinanten</b>	<b>241</b>
18.1 Motivation . . . . .	241
18.2 Definition und Berechnung . . . . .	242
18.2.1 Berechnung für $(2 \times 2)$ -Matrizen . . . . .	244
18.2.2 Berechnung für $(3 \times 3)$ -Matrizen . . . . .	244

18.2.3	Dreiecksmatrizen . . . . .	244
18.3	Geometrische Interpretation . . . . .	245
18.3.1	Determinante als Volumenform . . . . .	245
18.3.2	Determinante und Orientierung . . . . .	246
18.3.3	Determinante und lineare Unabhängigkeit . . . . .	247
18.4	Rechenregeln für die Determinante . . . . .	248
18.5	Das Kreuzprodukt . . . . .	249
18.6	Aufgaben . . . . .	250
18.7	Lösungen . . . . .	251
<b>19</b>	<b>Norm und Skalarprodukt</b>	<b>257</b>
19.1	Motivation . . . . .	257
19.2	Die Norm . . . . .	257
19.3	Das Skalarprodukt . . . . .	260
19.4	Orthonormalisierung nach Schmidt . . . . .	262
19.4.1	Das Verfahren . . . . .	265
19.5	Orthogonale Matrizen . . . . .	266
19.6	Aufgaben . . . . .	267
19.7	Lösungen . . . . .	269
<b>20</b>	<b>Basiswechsel und darstellende Matrizen</b>	<b>273</b>
20.1	Motivation . . . . .	273
20.2	Koordinatenabbildungen und Koordinatenvektoren . . . . .	274
20.2.1	Das Geschehen im Diagramm . . . . .	275
20.3	Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen . . . . .	276
20.4	Matrixtransformation bei einem Basiswechsel . . . . .	278
20.5	Aufgaben . . . . .	280
20.6	Lösungen . . . . .	281
<b>21</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>287</b>
21.1	Motivation . . . . .	287
21.2	Grundlagen . . . . .	287
21.3	Berechnung der Eigenwerte . . . . .	290
21.4	Berechnung der Eigenvektoren . . . . .	291
21.5	Vielfachheiten . . . . .	291
21.6	Hauptvektoren . . . . .	293
21.7	Diagonalisierbarkeit . . . . .	295
21.7.1	Diagonalisierung am Beispiel . . . . .	298
21.8	Aufgaben . . . . .	299
21.9	Lösungen . . . . .	300
<b>22</b>	<b>Differenzialgleichungen</b>	<b>307</b>
22.1	Motivation . . . . .	307
22.2	Grundlagen . . . . .	308
22.3	Umschreiben in ein System am Beispiel . . . . .	309
22.4	Einige Fragestellungen und erste Antworten . . . . .	311

22.5 Lösen durch Integration . . . . .	312
22.6 Standardlösungsansatz I . . . . .	313
22.7 Standardlösungsansatz II . . . . .	315
22.8 Finden einer partikulären Lösung . . . . .	316
22.9 Anfangswertprobleme . . . . .	318
22.10 Wronski-Test . . . . .	319
22.11 Beispiel für nicht-lineare Differenzialgleichungen . . . . .	321
22.12 Aufgaben . . . . .	322
22.13 Lösungen . . . . .	323
 <b>Klausuraufgaben</b>	 <b>329</b>
 <b>23 Analysis</b>	 <b>331</b>
23.1 Aufgaben . . . . .	331
23.2 Lösungen . . . . .	334
 <b>24 Lineare Algebra</b>	 <b>343</b>
24.1 Aufgaben . . . . .	343
24.2 Lösungen . . . . .	346
 <b>Vom Umgang mit Prüfungen</b>	 <b>353</b>
 <b>Literatur und Schlussbemerkungen</b>	 <b>359</b>
 <b>Index</b>	 <b>361</b>