

Inhaltsverzeichnis

Einige Worte vorab	v
Analysis	1
1 Worum geht es in der Analysis?	3
2 Ein wenig Vorbereitung	5
2.1 Motivation	5
2.2 Ein Vorrat an Buchstaben	5
2.3 Vom richtigen Umgang mit der Aussagenlogik	6
2.4 Vollständige Induktion	9
2.5 Mengen	10
2.5.1 Ein kleiner Zoo wichtiger Mengen	12
2.5.2 Wie aus bekannten Mengen neue entstehen	13
2.6 Aufgaben	16
2.7 Lösungen	17
3 Reelle und komplexe Zahlen	21
3.1 Motivation	21
3.2 Reelle Zahlen	21
3.2.1 Rechnen mit Ungleichungen	22
3.3 Summen und Produkte	23
3.3.1 Fakultät und Binomialkoeffizient	25
3.4 Komplexe Zahlen	27
3.4.1 Polarkoordinaten	29
3.5 Aufgaben	31
3.6 Lösungen	32
4 Abbildungen und Funktionen	37
4.1 Motivation und Definitionen	37
4.2 Einige Eigenschaften von Abbildungen	38
4.3 Komposition von Abbildungen	42
4.4 Darstellung von Funktionen	44
4.5 Aufgaben	45

4.6	Lösungen	46
5	Wichtige Funktionen im Überblick	51
5.1	Motivation	51
5.2	Polynome und rationale Funktionen	51
5.2.1	Polynome	51
5.2.2	Rationale Funktionen	52
5.3	Sinus, Kosinus und Tangens	55
5.3.1	Einige Additionstheoreme	57
5.4	Exponentialfunktion und Logarithmus	58
5.4.1	Potenz- und Logarithmusgesetze	59
5.5	Weitere wichtige Funktionen	60
5.6	Aufgaben	63
5.7	Lösungen	63
6	Folgen	69
6.1	Motivation	69
6.2	Grundlagen	69
6.3	Konvergenz und Divergenz	70
6.4	Rechenregeln für Folgen	73
6.5	Das Monotoniekriterium	75
6.6	Was noch über Folgen gewusst werden sollte	75
6.7	Das Häufungspunktprinzip und mehr	76
6.8	Aufgaben	77
6.9	Lösungen	78
7	Reihen	83
7.1	Motivation	83
7.2	Grundlegendes zu Reihen	84
7.3	Eigenschaften von Reihen	86
7.4	Konvergenzkriterien	86
7.4.1	Majorantenkriterium	88
7.4.2	Wurzelkriterium	89
7.4.3	Quotientenkriterium	89
7.4.4	Leibniz-Kriterium	90
7.5	Aufgaben	91
7.6	Lösungen	91
8	Stetigkeit	95
8.1	Motivation	95
8.2	Grundlagen zur Stetigkeit	96
8.3	Zusammensetzung stetiger Funktionen	99
8.4	Der Zwischenwertsatz	100
8.5	Supremum, Infimum, Maximum und Minimum	101
8.6	Maximum und Minimum für stetige Funktionen	102
8.7	Aufgaben	103

8.8 Lösungen	104
9 Differenziation	107
9.1 Motivation	107
9.2 Grundlagen zur Differenziation	108
9.3 Rechenregeln für Ableitungen	110
9.4 Der Mittelwertsatz und Folgerungen daraus	113
9.5 Höhere Ableitungen	115
9.6 Ausflug: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion	116
9.6.1 Schwingung eines Pendels	116
9.6.2 Eigenschaften von Sinus und Kosinus	117
9.6.3 Exponentialfunktion	118
9.7 Die Regel von l'Hospital	118
9.8 Aufgaben	120
9.9 Lösungen	121
10 Potenzreihen	127
10.1 Motivation	127
10.2 Grundlegendes zu Potenzreihen	127
10.3 Aufgaben	130
10.4 Lösungen	131
11 Taylorpolynome, Taylorreihen und Extremwerte	135
11.1 Motivation	135
11.2 Taylorpolynom und Taylorreihe	136
11.2.1 Das Taylorpolynom	136
11.2.2 Die Taylorreihe	138
11.2.3 Fehlerabschätzung	142
11.3 Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen	144
11.3.1 Zur Berechnung lokaler Extrema	144
11.4 Aufgaben	147
11.5 Lösungen	147
12 Integration	151
12.1 Motivation	151
12.2 Grundlagen zur Integration	152
12.3 Der Hauptsatz	155
12.4 Wichtige Regeln zur Integration	157
12.4.1 Substitutionsregel	157
12.4.2 Partielle Integration	159
12.4.3 Integration rationaler Funktionen	160
12.5 Das uneigentliche Integral	162
12.5.1 Integration unbeschränkter Funktionen	164
12.5.2 Unbeschränkte Integrationsgrenzen	164
12.6 Aufgaben	168
12.7 Lösungen	169

13 Ausblick: Fourierreihen	177
13.1 Motivation	177
13.2 Grundlagen zu Fourierreihen	178
13.3 Komplexe Darstellung der Fourierreihe	181
Lineare Algebra	185
14 Worum geht es in der Linearen Algebra?	187
15 Vektorräume, lineare Unabhängigkeit	191
15.1 Motivation	191
15.2 Vektorräume	192
15.3 Der Vektorraum der reellen Zahlen	194
15.4 Der Vektorraum reellwertiger Funktionen auf \mathbb{R}	195
15.5 Linearkombinationen	196
15.6 Aufgaben	201
15.7 Lösungen	202
16 Lineare Abbildungen und Matrizen	207
16.1 Motivation	207
16.2 Grundlagen zu linearen Abbildungen	207
16.3 Kern und Bild	209
16.4 Grundlegendes zu Matrizen	211
16.5 Rechnen mit Matrizen	213
16.5.1 Multiplikation von Matrizen	213
16.5.2 Vektorraumstruktur für Matrizen	215
16.6 Besondere Matrizen	216
16.7 Aufgaben	219
16.8 Lösungen	220
17 Lineare Gleichungssysteme	225
17.1 Motivation und elementare Anwendungen	225
17.2 Grundlagen	227
17.3 Gauß-Algorithmus	228
17.3.1 Abweichungen vom Idealfall	230
17.4 Die Struktur der Lösungsmenge	231
17.5 Zum Invertieren von Matrizen	234
17.6 Aufgaben	235
17.7 Lösungen	235
18 Determinanten	241
18.1 Motivation	241
18.2 Definition und Berechnung	242
18.2.1 Berechnung für (2×2) -Matrizen	244
18.2.2 Berechnung für (3×3) -Matrizen	244

18.2.3 Dreiecksmatrizen	244
18.3 Geometrische Interpretation	245
18.3.1 Determinante als Volumenform	245
18.3.2 Determinante und Orientierung	246
18.3.3 Determinante und lineare Unabhängigkeit	247
18.4 Rechenregeln für die Determinante	248
18.5 Das Kreuzprodukt	249
18.6 Aufgaben	250
18.7 Lösungen	251
19 Norm und Skalarprodukt	257
19.1 Motivation	257
19.2 Die Norm	257
19.3 Das Skalarprodukt	260
19.4 Orthonormalisierung nach Schmidt	262
19.4.1 Das Verfahren	265
19.5 Orthogonale Matrizen	266
19.6 Aufgaben	267
19.7 Lösungen	269
20 Basiswechsel und darstellende Matrizen	273
20.1 Motivation	273
20.2 Koordinatenabbildungen und Koordinatenvektoren	274
20.2.1 Das Geschehen im Diagramm	275
20.3 Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen	276
20.4 Matrixtransformation bei einem Basiswechsel	278
20.5 Aufgaben	280
20.6 Lösungen	281
21 Eigenwerte und Eigenvektoren	287
21.1 Motivation	287
21.2 Grundlagen	287
21.3 Berechnung der Eigenwerte	290
21.4 Berechnung der Eigenvektoren	291
21.5 Vielfachheiten	291
21.6 Hauptvektoren	293
21.7 Diagonalisierbarkeit	295
21.7.1 Diagonalisierung am Beispiel	298
21.8 Aufgaben	299
21.9 Lösungen	300
22 Differenzialgleichungen	307
22.1 Motivation	307
22.2 Grundlagen	308
22.3 Umschreiben in ein System am Beispiel	309
22.4 Einige Fragestellungen und erste Antworten	311

22.5 Lösen durch Integration	312
22.6 Standardlösungsansatz I	313
22.7 Standardlösungsansatz II	315
22.8 Finden einer partikulären Lösung	316
22.9 Anfangswertprobleme	318
22.10 Wronski-Test	319
22.11 Beispiel für nicht-lineare Differenzialgleichungen	321
22.12 Aufgaben	322
22.13 Lösungen	323
Klausuraufgaben	329
23 Analysis	331
23.1 Aufgaben	331
23.2 Lösungen	334
24 Lineare Algebra	343
24.1 Aufgaben	343
24.2 Lösungen	346
Vom Umgang mit Prüfungen	353
Literatur und Schlussbemerkungen	359
Index	361