

1	Einführung	1
1.1	Warum lineare Algebra?	1
1.1.1	Die Welt ist linear	1
1.1.2	Große Probleme — große lineare Gleichungssysteme	1
1.1.3	Alles ist Matrix	2
1.2	Inhaltsübersicht	3
1.3	Anwendungen	6
1.4	Notation	11
1.5	Grundlagen und Voraussetzungen	13
1.5.1	Mathematische Grundlagen, Bezeichnungen	14
1.5.2	Zahlkörper	17
1.6	Wie lineare Algebra studieren?	19
1.6.1	Den Stoff erarbeiten	19
1.6.2	Begriffe pauken	21
1.6.3	Anwendungen verstehen	21
1.6.4	Übungsaufgaben lösen	22
1.6.5	Lineare Algebra ist überall	22
2	Lineare Gleichungssysteme	23
2.1	Anforderungen	23
2.2	Gleichungen	24
2.2.1	Variablen, Koeffizienten und rechte Seiten	24
2.2.2	Linearformen	27
2.2.3	Rechnen mit Linearformen	28
2.2.4	Was ist eine Lösung?	28
2.2.5	Was kann passieren?	29
2.2.6	Tableau-Schreibweise	31
2.3	Der gaußsche Eliminationsalgorithmus	33
2.3.1	Einführungsbeispiel: zwei Variable und zwei Unbekannte	34
2.3.2	Der grundlegende Algorithmus	37
2.3.3	Durchführung des Algorithmus mit dem Computer	41
2.4	Lösungen	43
2.4.1	Problemfälle für den Gauß-Algorithmus	43
2.4.2	Schlusstableau	48

2.4.3	Reduzierte Zeilenstufenform	51
2.4.4	Die Lösungsmenge	54
2.5	Lineare Abhängigkeit	56
2.5.1	Lineare Abhängigkeit von Zeilen	56
2.5.2	Lineare Abhängigkeit von Spalten	60
2.A	Elektrische Netzwerke	62
2.A.1	Netzwerke und kirchhoffsche Gesetze	63
2.A.2	Gleichungen für Zyklen	67
2.A.3	Beispiel: Zyklen auf einem Oktaeder	69
	Übungsaufgaben	70
3	Matrizen und Vektoren	73
3.1	Vektoren	73
3.1.1	Zeilen und Spaltenvektoren	73
3.1.2	Rechnen mit Vektoren	74
3.1.3	Gleichungssysteme in Vektorschreibweise	75
3.1.4	Linear abhängige Vektoren	76
3.2	Vektorraum	77
3.2.1	Axiomatische Definition	78
3.2.2	Basis	80
3.2.3	Basiswechsel	85
3.3	Matrizen	87
3.3.1	Matrizen und Gleichungssysteme	87
3.3.2	Das Produkt Matrix $\times$ Vektor	90
3.3.3	Transponierte Matrix	94
3.3.4	Matrizenprodukt	95
3.3.5	Rechenregeln für das Matrizenprodukt	100
3.3.6	Inverse Matrix	103
3.4	Spur	106
3.5	Hadamard-Algebra	109
3.A	Elektrische Netzwerke in Matrixschreibweise	111
3.A.1	Matrixbeschreibung eines Netzwerks	111
3.A.2	Die kirchhoffschen Gesetze	116
3.A.3	Potential	117
3.B	Matrixoptik	118
3.B.1	Das Brechungsgesetz	119
3.B.2	Strahlen und Transfermatrizen	119
3.B.3	Dünne Linse	123
3.B.4	Achromat	126
3.C	Rechnen mit Resten: Modulare Arithmetik	129
3.C.1	Grundoperationen	130
3.C.2	Division	132
3.C.3	Anwendung: Das Diffie-Hellman-Schlüsselprotokoll	139
3.C.4	Endliche Körper und lineare Algebra	140
3.D	Kettenbrüche	141

3.D.1	Definitionen	142
3.D.2	Beispiele	143
3.D.3	Näherungsbrüche	147
3.D.4	Anwendung: Übertragungsleitungen	153
	Übungsaufgaben	155
4	Determinante	161
4.1	Eine Kennzahl für lineare Abhängigkeit	161
4.1.1	Definition	162
4.1.2	Rechenregeln für Determinanten	165
4.1.3	Determinante als lineare Funktion der Zeilen	166
4.1.4	Spalten statt Zeilen	167
4.2	Berechnung der Determinanten	168
4.2.1	Berechnung mit dem Gauß-Algorithmus	168
4.2.2	Berechnung mit Zeilenoperationen	169
4.2.3	Blockdiagonalmatrizen	170
4.3	Permutationen	171
4.3.1	Permutationen einer endlichen Menge	171
4.3.2	Zyklenzerlegung	172
4.3.3	Permutationen und Transpositionen	174
4.3.4	Signum einer Permutation	175
4.3.5	Permutationsmatrizen	176
4.3.6	Permutationsmatrix einer Transposition	177
4.3.7	Determinante und Vorzeichen	178
4.4	Entwicklungssatz	179
4.4.1	Entwicklungssatz aus der Pivotproduktformel	179
4.4.2	Entwicklungssatz direkt aus der Linearität	183
4.4.3	Spezialfall: Dimension 3, die Sarrus-Formel	185
4.4.4	Determinante einer Bandmatrix	186
4.4.5	Determinante von $I + tA$	187
4.4.6	Entwicklungssatz und Permutationen	188
4.5	Produktformel	190
4.6	Lösen von Gleichungssystemen	193
4.6.1	Die cramersche Regel	194
4.6.2	Inverse Matrix	196
	Übungsaufgaben	198
5	Polynome	201
5.1	Notation und allgemeine Eigenschaften	201
5.1.1	Rechnen mit Polynomen	201
5.1.2	Der Grad eines Polynoms	202
5.1.3	Der Polynomring	202
5.1.4	Rechnen mit dem Grad	203
5.2	Polynome als Vektoren	204
5.3	Teilbarkeit	206
5.3.1	Division von Polynomen	206

5.3.2	Größter gemeinsamer Teiler und Sylvester-Matrix	211
5.3.3	Der euklidische Algorithmus für Polynome	215
5.4	Nullstellen	220
5.4.1	Faktorisierung und Nullstellen	220
5.4.2	Nullstellen in Körpererweiterungen	221
5.4.3	Komplexe Zahlen	222
5.4.4	Fundamentalsatz der Algebra	223
5.4.5	Erweiterung von $\mathbb{Q}$ um eine Nullstelle	223
5.5	Polynome und Matrizen	226
5.5.1	Die Matrix der Variablen X	227
5.5.2	Die Matrix eines Polynoms	227
5.5.3	Matrizenprodukt und Faltung	228
5.5.4	Matrix in ein Polynom einsetzen	229
5.5.5	Minimalpolynom einer Matrix	233
5.A	Interpolation	236
5.A.1	Stützstellen	236
5.A.2	Die Polynome $l(x)$ und $l_i(x)$	237
5.A.3	Vandermonde-Determinante	240
5.A.4	Vandermonde-Determinante als Polynom in $x_0, \dots, x_n$	241
5.A.5	Die Vandermonde-Determinante und Zeilen- und Spaltenoperationen	243
5.B	Die endlichen Körper $\mathbb{F}_{p^n}$ und AES	245
5.B.1	Erweiterung von $\mathbb{F}_p$ um eine Nullstelle	245
5.B.2	Der Körper $\mathbb{F}_{2^8}$	248
5.B.3	Blockbildung in AES	252
	Übungsaufgaben	253
6	Affine Vektorgeometrie	255
6.1	Affine Geometrie	255
6.1.1	Axiome	255
6.1.2	Grundkonstruktionen	256
6.1.3	Affine Geometrie und Vektoroperationen über $\mathbb{Q}$	257
6.1.4	Vektorraumoperationen über $\mathbb{R}$	259
6.2	Koordinatensysteme	259
6.2.1	Punkte und Vektoren	259
6.2.2	Basis und Koordinatensystem	262
6.2.3	Koordinatenvektoren	263
6.2.4	Unterräume	264
6.2.5	Basiswechsel	267
6.3	Lineare Abbildungen	267
6.3.1	Affine und lineare Abbildungen	267
6.3.2	Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen	268
6.3.3	Zusammensetzung linearer Abbildungen	271
6.3.4	Basiswechsel	272
6.4	Geraden	274

6.4.1	Geraden in der Ebene und im Raum	274
6.4.2	Schnittpunkte	278
6.4.3	Gerade als Bild einer linearen Abbildung	281
6.4.4	Gerade in der Ebene als Lösungsmenge	282
6.4.5	Parallele Geraden	283
6.5	Ebenen	284
6.5.1	Parameterdarstellung	284
6.5.2	Schnittmengen	288
6.5.3	Ebenen und lineare Abbildungen	292
6.6	Affine Unterräume beliebiger Dimension	294
6.6.1	k -dimensionale affine Unterräume	295
6.6.2	Schnittmengen affiner Unterräume	295
6.6.3	Vergleich affiner Unterräume	297
6.6.4	Gleichungssystem für einen affinen Unterraum	298
6.A	Aufrechtbildkamera	301
6.A.1	Lösungskonzept	302
6.A.2	Bilddrehung	302
6.A.3	Farbraumumrechnung	307
	Übungsaufgaben	311

7 Skalarprodukt und Orthogonalität 315

7.1	Orthogonale Projektion und Skalarprodukt	315
7.1.1	Orthogonale Projektion	315
7.1.2	Skalarprodukt	316
7.1.3	Kosinussatz	318
7.1.4	Skalarprodukt und Standardbasis	319
7.1.5	Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$	320
7.2	Erste Anwendungen des Skalarproduktes	321
7.2.1	Normalenform von Ebene und Gerade	321
7.2.2	Parallel- und Orthogonalkomponente	324
7.2.3	Spiegelung an einer Geraden oder Ebene	324
7.3	Orthogonale und orthonormierte Basen	325
7.3.1	Orthogonale Basis und Orthonormalbasis	326
7.3.2	Darstellung von Vektoren und Matrizen	326
7.3.3	Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt	329
7.3.4	Orthonormalisierung in $\mathbb{R}^n$	331
7.4	Orthogonale Matrizen	332
7.4.1	Längentreue lineare Abbildungen	333
7.4.2	Eigenschaften orthogonaler Matrizen	333
7.4.3	Vertauschung der Koordinatenachsen	334
7.4.4	Spiegelungen	334
7.5	Drehungen	336
7.5.1	Drehungen im zweidimensionalen Raum	336
7.5.2	Drehungen des dreidimensionalen Raumes	337
7.6	Verallgemeinerte Skalarprodukte	342

7.6.1	Gram-Matrix	342
7.6.2	Axiomatische Definition eines Skalarproduktes	344
7.6.3	Allgemeine Gesetze für Skalarprodukte	346
7.7	Kreis und Kugel	349
7.7.1	Gleichungen von Kreis und Kugel	350
7.7.2	Durchstoßpunkt einer Geraden mit einer Kugel	350
7.7.3	Thales-Kreis	351
7.7.4	Tangente und Tangentialebene	352
7.8	Überbestimmte Gleichungssysteme – “Least Squares”	354
7.8.1	Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate	356
7.8.2	Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate	359
7.A	Raytracing	362
7.A.1	Reflexion eines Lichtstrahls	362
7.A.2	Diffuse Reflexion und Umgebungslicht	366
7.A.3	Phong-Beleuchtungsmodell	366
7.B	Ein Parametrisierungsproblem	367
7.B.1	Die Problemstellung	369
7.B.2	Lösung	372
7.C	Bildregistrierung	376
7.D	Anwendung: Diskrete Fourier-Transformation	382
7.D.1	Signale	383
7.D.2	Eine orthogonale Basis	385
7.D.3	Frequenzanalyse und -synthese	390
7.E	Das Haar-Wavelet	394
7.E.1	Motivation	394
7.E.2	Die Haar-Basis	395
7.E.3	Analyse	397
7.E.4	Synthese	400
7.E.5	Erweiterungen	403
	Übungsaufgaben	405

8 Flächeninhalt, Volumen und Orientierung 411

8.1	Orientierung	411
8.1.1	Festlegung einer Orientierung mit Hilfe einer Basis	411
8.1.2	Orientierung und Determinante	413
8.1.3	Orientierung einer Ebene oder des dreidimensionalen Raumes	415
8.2	Flächeninhalt und Volumen	415
8.2.1	Flächeninhalt eines Parallelogramms	415
8.2.2	Volumen eines Parallelepipedes	417
8.2.3	Die Schubbündel-Formel für den Flächeninhalt eines Polygons	421
8.2.4	Orientiertes Volumen in n Dimensionen	423
8.3	Vektorprodukt	423
8.3.1	Definition des Vektorproduktes	424
8.3.2	Normale	426
8.3.3	Dreierprodukte	427

8.3.4	Viererprodukte	433
8.3.5	Drehungen und die Rodrigues-Formel	435
8.3.6	Weitere Anwendungen	439
8.4	Gram-Matrix und Gram-Determinante	441
8.4.1	Ein neuer Blick auf die Gram-Matrix	442
8.4.2	Gram-Determinante	443
8.4.3	Die allgemeine Abstandsformel	445
8.A	Welche Leistung kann man von einer PV-Anlage erwarten?	445
8.A.1	Koordinatensystem für Punkte auf der Erdkugel	446
8.A.2	Die Normale auf die Solarpanels	447
8.A.3	Die Bewegung der Sonne	449
8.A.4	Die Leistung der PV-Anlage	453
8.B	MEMS-Kreiselsensoren und Quaternionen	455
8.B.1	MEMS-Kreiselsensoren	456
8.B.2	Quaternionen	456
8.B.3	Drehungen	459
8.B.4	Geometrische Algebra	460
	Übungsaufgaben	461
9	Transformationen	463
9.1	Eigenschaften linearer Abbildungen	463
9.1.1	Kern: Eindeutige Lösbarkeit	463
9.1.2	Bild: Lösbarkeit von Gleichungen	465
9.1.3	Kern, Bild und Gauß-Tableau	465
9.1.4	Orthogonalkomplement	466
9.2	Invarianten	468
9.2.1	Volumen	468
9.2.2	Längen und Winkel	468
9.3	Gruppen	470
9.3.1	Die Definition einer Gruppe	470
9.3.2	Die orthogonale Gruppe	471
9.3.3	Homomorphismen	472
9.3.4	Die spezielle lineare Gruppe	474
9.3.5	Die spezielle orthogonale Gruppe	474
9.3.6	Die Spur definiert keine Gruppe	474
9.4	Lie-Algebren	475
9.4.1	Eine Algebra für Matrizen mit Spur 0	475
9.4.2	Lie-Algebra	477
9.4.3	Lie-Algebren zu den Matrizen Gruppen	477
9.4.4	Exponentialfunktion	480
9.A	Quadratur-Amplituden-Modulation	484
9.A.1	Amplitudenmodulation	484
9.A.2	Zweidimensionale Signale	486
9.A.3	Modulation zweidimensionaler Signale	486
9.A.4	Demodulation	490

9.A.5	Beispiele	495
9.B	Fehlerkorrigierende Codes	502
9.B.1	Rechnen mit Bits: der Körper $\mathbb{F}_2$	504
9.B.2	Digitale Codes	504
9.B.3	Parität: einen Einzelbitfehler erkennen	505
9.B.4	Maskierung: einen Einzelbitfehler lokalisieren	506
9.B.5	Codierung und Fehlerkorrektur als lineare Operationen	509
9.C	Satellitennavigation	511
9.C.1	Positionsbestimmung	512
9.C.2	Satellitenkonstellationen	513
9.D	Trägheitsplattform	516
9.D.1	Koordinatensystem und orthogonale Matrizen	517
9.D.2	Drehungen	517
9.D.3	Geschwindigkeit	518
9.D.4	Flugzeug in einer Standardkurve	520
	Übungsaufgaben	522
10	Projektive Geometrie	525
10.1	Perspektive	525
10.1.1	Lochkamera	526
10.1.2	Geraden	529
10.2	Strahlen	531
10.2.1	Strahlensatz	531
10.2.2	Der projektive Raum	532
10.2.3	Homogene Koordinaten	533
10.3	Projektion	535
10.3.1	Koordinatensysteme für Bilder	535
10.3.2	Spezielle Projektionen	536
10.3.3	Beliebige Kameraposition und -orientierung	539
10.3.4	Bestimmung der Drehmatrix D	540
10.A	Triangulation mit Kameras	541
10.A.1	Triangulation mit zwei Kameras	542
10.A.2	Beliebig viele Kameras	543
10.A.3	Ein vollständiges Triangulationsbeispiel	544
	Übungsaufgaben	545
11	Eigenwerte und Eigenvektoren	549
11.1	Motivation	549
11.1.1	Fibonacci-Zahlen	549
11.1.2	Matrixexponentialfunktion	551
11.1.3	Komplexität der Berechnung von Matrixpotenzen	551
11.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	552
11.2.1	Problemstellung	553
11.2.2	Die charakteristische Gleichung	553
11.2.3	Berechnung der Eigenvektoren	556
11.2.4	Algorithmus für Eigenwerte und Eigenvektoren	557

11.3	Diagonalisierung	558
11.3.1	Diagonalbasis	558
11.3.2	Diagonalisierbarkeit	561
11.3.3	Beispiele nicht diagonalisierbarer Matrizen	562
11.4	Symmetrische Matrizen	563
11.4.1	Eigenvektoren symmetrischer Matrizen	564
11.4.2	Geometrische Eigenschaften der Eigenvektoren	565
11.4.3	Konstruktion einer Eigenbasis	567
11.4.4	Gleichzeitige Diagonalisierbarkeit	569
11.4.5	Übersicht Diagonalisierbarkeit	569
11.5	Numerische Eigenvektorbestimmung	570
11.5.1	Die Potenzmethode	571
11.5.2	Der Jacobi-Transformationsalgorithmus	574
11.A	Lineare Differenzengleichungen	581
11.A.1	Lineare Differenzengleichungen und Matrizen	582
11.A.2	Allgemeine Lösung einer linearen Differenzengleichung	583
11.A.3	Eine Formel für die Fibonacci-Zahlen	584
11.A.4	Die Determinante $\det B_n$ aus Abschnitt 4.4.4	585
11.B	Differentialgleichungen	586
11.B.1	Die Matrixexponentialfunktion und Eigenvektoren	586
11.B.2	Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung	587
11.B.3	Differentialgleichung einer Federkette	590
	Übungsaufgaben	594
12	Matrixzerlegungen	597
12.1	Zerlegung in Produkte einfacherer Matrizen	597
12.2	LU-, LDU- und LR-Zerlegung	599
12.2.1	Gauß-Matrizen	599
12.2.2	Die LU-Zerlegung	601
12.2.3	Die LDU-Zerlegung	602
12.2.4	Die LR-Zerlegung	603
12.2.5	Übersicht	604
12.2.6	Spezialfälle	604
12.3	Cholesky-Zerlegung	607
12.4	QR-Zerlegung	610
12.4.1	Gram-Schmidt-Orthonormalisierung und QR-Zerlegung	611
12.4.2	QR-Zerlegung mit Reflektoren	612
12.4.3	Kleinste Quadrate und die QR-Zerlegung	615
12.4.4	Anwendung: geometrische Zerlegung einer Abbildung	617
12.5	Singulärwertzerlegung	619
12.5.1	Singulärwerte	619
12.5.2	Eindeutigkeit der Singulärwertzerlegung	621
12.5.3	Singulärwerte und Eigenwerte	622
12.5.4	Pseudoinverse	624
12.5.5	Geometrische Interpretation	625

12.6	RREF und die CR-Zerlegung	627
12.6.1	Faktorisierung mit der reduzierten Zeilenstufenform	628
12.6.2	Bild und Kern	629
12.A	Magnetische Navigationssysteme	630
12.A.1	Kräfte im Magnetfeld	632
12.A.2	Magnetfelder erzeugen	637
12.A.3	Magnetische Navigation	640
12.B	Regelungstechnik und SVD	642
12.B.1	Lineare, diskrete Systemmodellierung	642
12.B.2	Steuerbarkeit	644
12.B.3	Beobachtbarkeit	646
12.B.4	Approximation	648
	Übungsaufgaben	648
13	Normalformen	651
13.1	Invariante Unterräume	651
13.1.1	Kern und Bild von Matrixpotenzen	651
13.1.2	Invariante Unterräume	655
13.1.3	Nilpotente Matrizen	656
13.1.4	Basis für die Normalform einer nilpotenten Matrix bestimmen	659
13.2	Eigenräume	661
13.2.1	Verallgemeinerte Eigenräume	661
13.2.2	Zerlegung in invariante Unterräume	663
13.2.3	Nullstellen des charakteristischen Polynoms	663
13.3	Normalformen	665
13.3.1	Diagonalform	665
13.3.2	Jordan-Normalform	666
13.3.3	Reelle Normalform	670
13.A	Die Federwaage	672
13.A.1	Jordan-Normalform und Exponentialreihe	673
13.A.2	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	674
13.A.3	Reibung und kritische Dämpfung	678
	Übungsaufgaben	681
14	Positive Matrizen	683
14.1	Wahrscheinlichkeitsmatrizen und Markov-Ketten	683
14.1.1	Graphen	683
14.1.2	Wahrscheinlichkeitsmatrizen	691
14.1.3	Markov-Ketten	694
14.2	Perron-Frobenius-Theorie	698
14.2.1	Nichtnegative und positive Matrizen und Vektoren	698
14.2.2	Spektralradius	701
14.2.3	Invariante Unterräume und Eigenräume positiver Matrizen	705
14.2.4	Satz von Perron-Frobenius	708
14.A	Google-Matrix	712
14.A.1	Ein Wahrscheinlichkeitsmodell für Internetbesucher	713

14.A.2 Die Google-Matrix	716
14.B Das Parrondo-Paradoxon	719
14.B.1 Die beiden Teilspele	720
14.B.2 Kombination der Spiele	726
Übungsaufgaben	727
15 Tensoren	729
15.1 Vektoren und Linearformen	729
15.1.1 Basen für Vektoren und Linearformen	729
15.1.2 Koordinatentransformation	732
15.2 Kovariante und kontravariante Tensoren	733
15.2.1 Lineare Abbildungen	733
15.2.2 Verallgemeinertes Skalarprodukt	733
15.2.3 Tensoren beliebiger Stufe	734
15.3 Tensorprodukt und Kroneckerprodukt	736
15.3.1 Indexfreie Notation	736
15.3.2 Tensorprodukt	736
15.3.3 Kroneckerprodukt von Matrizen	737
Literatur	741
Index	743