

Inhaltsverzeichnis

Teil I Numerische lineare Algebra

1	Grundlegende Konzepte	3
1.1	Aufgabenstellung	3
1.2	Kondition und Stabilität	4
1.3	Aufwand	7
1.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	8
2	Operatornorm und Konditionszahl	9
2.1	Vektornormen	9
2.2	Matrixnormen	10
2.3	Konditionszahl	12
2.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	13
3	Matrixfaktorisierungen	15
3.1	Dreiecksmatrizen	15
3.2	<i>LU</i> -Zerlegung	16
3.3	Cholesky-Zerlegung	18
3.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	21
4	Eliminationsverfahren	23
4.1	Gaußsches Eliminationsverfahren	23
4.2	Pivot-Strategie	26
4.3	Lernziele, Quiz und Anwendung	28
5	Ausgleichsprobleme	31
5.1	Gaußsche Normalgleichung	31
5.2	Householder-Transformationen	33
5.3	<i>QR</i> -Zerlegung	35
5.4	Lösung des Ausgleichsproblems	37
5.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	38

6	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	39
6.1	Singulärwertzerlegung	39
6.2	Pseudoinverse	40
6.3	Lernziele, Quiz und Anwendung	41
7	Das Simplex-Verfahren	43
7.1	Lineare Programme	43
7.2	Der Simplex-Schritt	46
7.3	Lernziele, Quiz und Anwendung	48
8	Eigenwertaufgaben	51
8.1	Lokalisierung	51
8.2	Konditionierung	53
8.3	Potenzmethode	54
8.4	QR -Verfahren	58
8.5	Jacobi-Verfahren	61
8.6	Lernziele, Quiz und Anwendung	64
9	Iterative Lösungsmethoden	67
9.1	Inexakte Lösung	67
9.2	Banachscher Fixpunktsatz	67
9.3	Lineare Iterationsverfahren	69
9.4	Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren	70
9.5	Diagonaldominanz und Irreduzibilität	71
9.6	Konvergenz	73
9.7	Lernziele, Quiz und Anwendung	75

Teil II Numerische Analysis

10	Allgemeine Konditionszahl und Gleitkommazahlen	79
10.1	Konditionierung	79
10.2	Gleitkommazahlen	81
10.3	Rundung	83
10.4	Stabilität	84
10.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	85
11	Polynominterpolation	87
11.1	Lagrange-Interpolation	87
11.2	Interpolationsfehler	88
11.3	Neville-Schema	90
11.4	Tschebyscheff-Knoten	92
11.5	Hermite-Interpolation	94
11.6	Lernziele, Quiz und Anwendung	96

12	Interpolation mit Splines	97
12.1	Splines	97
12.2	Kubische Splines	99
12.3	Berechnung kubischer Splines	102
12.4	Interpolationsfehler	103
12.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	106
13	Diskrete Fourier-Transformation	109
13.1	Trigonometrische Interpolation	109
13.2	Fourier-Basen	111
13.3	Schnelle Fourier-Transformation	113
13.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	115
14	Numerische Integration	117
14.1	Quadraturformeln	117
14.2	Newton–Cotes-Formeln	119
14.3	Summierte Quadraturformeln	120
14.4	Gauß-Quadratur	122
14.5	Extrapolation	124
14.6	Experimentelle Konvergenzordnung	126
14.7	Lernziele, Quiz und Anwendung	127
15	Nichtlineare Probleme	129
15.1	Nullstellensuche und Minimierungsprobleme	129
15.2	Approximation von Nullstellen	130
15.3	Eindimensionale Minimierung	134
15.4	Mehrdimensionale Minimierung	135
15.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	138
16	Methode der konjugierten Gradienten	139
16.1	Quadratische Minimierung	139
16.2	Konjugierte Suchrichtungen	140
16.3	Berechnung A-konjugierter Richtungen	141
16.4	CG-Verfahren	142
16.5	Konvergenz des CG-Verfahrens	143
16.6	Lernziele, Quiz und Anwendung	146
17	Dünnbesetzte Matrizen und Vorkonditionierung	149
17.1	Dünnbesetzte Matrizen	149
17.2	Vorkonditioniertes CG-Verfahren	150
17.3	Weitere Vorkonditionierungsmatrizen	153
17.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	154

18	Mehrdimensionale Approximation	157
18.1	Gitter und Triangulierungen	157
18.2	Approximation auf Tensorproduktgittern	159
18.3	Zweidimensionale Fourier-Transformation	161
18.4	Approximation auf Triangulierungen	162
18.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	165
 Teil III Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen		
19	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	169
19.1	Grundlagen	169
19.2	Das Räuber-Beute-Modell	170
19.3	Gleichungen höherer Ordnung	171
19.4	Autonome Gleichungen	172
19.5	Zweikörperprobleme	173
19.6	Explizite Lösungen	174
19.7	Lernziele, Quiz und Anwendung	174
20	Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität	177
20.1	Existenz und Eindeutigkeit	177
20.2	Lemma von Gronwall	180
20.3	Stabilität	181
20.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	183
21	Einschrittverfahren	185
21.1	Euler-Verfahren	185
21.2	Konsistenz	187
21.3	Diskretes Gronwall-Lemma und Konvergenz	189
21.4	Verfahren höherer Ordnung	192
21.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	193
22	Runge-Kutta-Verfahren	195
22.1	Motivation	195
22.2	Runge-Kutta-Verfahren	196
22.3	Wohlgestelltheit	198
22.4	Konsistenz	200
22.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	203
23	Mehrschrittverfahren	205
23.1	Allgemeine Mehrschrittverfahren	205
23.2	Konsistenz	207
23.3	Adams-Verfahren	208
23.4	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	210
23.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	211

24	Konvergenz von Mehrschrittverfahren	215
24.1	Differenzengleichungen	215
24.2	Nullstabilität	217
24.3	Konvergenz	218
24.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	221
25	Steife Differenzialgleichungen	223
25.1	Steifheit	223
25.2	A-Stabilität	224
25.3	Gradientenflüsse	228
25.4	Wärmeleitungsgleichung	230
25.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	231
26	Schrittweitensteuerung	233
26.1	A-posteriori Fehlerkontrolle	233
26.2	Adaptiver Algorithmus	236
26.3	Kontrollverfahren	236
26.4	Extrapolation	237
26.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	238
27	Symplektische, Schieß- und dG-Verfahren	239
27.1	Hamiltonsche Systeme	239
27.2	Symplektische Verfahren	241
27.3	Schießverfahren	245
27.4	Diskontinuierliche Galerkin-Verfahren	246
27.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	247
 Teil IV Aufgabensammlungen		
28	Aufgaben zur numerischen linearen Algebra	251
28.1	Grundlegende Konzepte	251
28.2	Operatornorm und Konditionszahl	253
28.3	Matrixfaktorisierungen	256
28.4	Eliminationsverfahren	259
28.5	Ausgleichsprobleme	262
28.6	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	265
28.7	Das Simplex-Verfahren	268
28.8	Eigenwertaufgaben	270
28.9	Iterative Lösungsmethoden	274
29	Aufgaben zur numerischen Analysis	277
29.1	Allgemeine Konditionszahl und Maschinenzahlen	277
29.2	Polynominterpolation	280
29.3	Interpolation mit Splines	282

29.4	Diskrete Fourier-Transformation	286
29.5	Numerische Integration	289
29.6	Nichtlineare Probleme	292
29.7	Methode der konjugierten Gradienten	295
29.8	Dünnbesetzte Matrizen und Vorkonditionierung	299
29.9	Mehrdimensionale Approximation	301
30	Aufgaben zur Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen	307
30.1	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	307
30.2	Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität	311
30.3	Einschrittverfahren	313
30.4	Runge–Kutta-Verfahren	317
30.5	Mehrschrittverfahren	319
30.6	Konvergenz von Mehrschrittverfahren	322
30.7	Steife Differenzialgleichungen	324
30.8	Schrittweitensteuerung	327
30.9	Symplektische, Schieß- und dG-Verfahren	329
 Teil V Ergänzende Materialien		
31	Aussagen der linearen Algebra	335
31.1	Skalarprodukt von Vektoren	335
31.2	Determinante quadratischer Matrizen	335
31.3	Bild und Kern linearer Abbildungen	336
31.4	Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit	337
31.5	Jordansche Normalform	337
32	Aussagen der Analysis	339
32.1	Stetige und differenzierbare Funktionen	339
32.2	Mittelwertsatz und Taylor-Polynome	340
32.3	Landau-Symbole	340
32.4	Fundamentalsatz der Algebra	341
32.5	Mehrdimensionale Differenzialrechnung	342
33	Einführung in C++	343
33.1	Struktur	343
33.2	Klassen	343
33.3	Typen	344
33.4	Kontrollanweisungen	345
33.5	Logische Ausdrücke und Inkremente	346
33.6	Funktionen	346
33.7	Pointer	347
33.8	Dynamische Arrays	348

33.9	Arbeiten mit Matrizen	348
33.10	Zeitmessung, Speichern und Pakete	350
34	Einführung in MATLAB	351
34.1	Aufbau	351
34.2	Listen und Arrays	351
34.3	Matrixoperationen	352
34.4	Manipulation von Arrays	352
34.5	Elementare Funktionen	353
34.6	Schleifen und Kontrollanweisungen	353
34.7	Text- und Grafikausgabe	354
34.8	Erstellen neuer Funktionen	355
34.9	Verschiedene Befehle	355
34.10	Dünnbesetzte Matrizen	355
34.11	Beispiele	356
34.12	Freie Alternative	358
35	Einführung in Python	359
35.1	Struktur	359
35.2	Elementare Kommandos	360
35.3	Typen	361
35.4	Kontrollanweisungen	361
35.5	Logische Ausdrücke	362
35.6	Funktionen	362
35.7	Listen	362
35.8	Zeitmessung, Speichern und Plotten	363
36	Beispielprogramme in MATLAB, C++ und Python	365
36.1	LU-Zerlegung und Lösen von Dreieckssystemen	365
36.2	Polynominterpolation und Neville-Schema	366
36.3	Numerische Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	372
	Weiterführende Themen	377
	Literatur	379
	Stichwortverzeichnis	383