

Inhalt

Vorwort — VII

Abbildungsverzeichnis — XV

Tabellenverzeichnis — XVII

1 Einleitung — 1

- 1.1 Ein Beispiel zur Einstimmung — 1
- 1.2 Warum sollte man sich mit Nonstandard-Analysis befassen? — 3
- 1.3 Die reellen Zahlen in konventionellen Analysiskursen — 5
 - 1.3.1 Axiomatische Einführung — 6
 - 1.3.2 Die natürlichen Zahlen — 7
 - 1.3.3 Vollständige Induktion und rekursive Definitionen — 9
 - 1.3.4 Die implizit genutzten Mengenaxiome — 11
 - 1.3.5 Endliche Mengen — 12
 - 1.3.6 Wie streng darf es sein? — 13

2 Elemente einer vorlesungsergänzenden Veranstaltung — 16

- 2.1 Historischer Anknüpfungspunkt Leibniz — 17
- 2.2 Eine moderne Übersetzung der Leibniz'schen Ideen — 18
- 2.3 Vorbemerkungen zur Axiomatik — 19
- 2.4 Mengenlehre in der Analysis — 21
 - 2.4.1 Die Standardmengenaxiome — 21
 - 2.4.2 Nicht verwendete Mengenaxiome — 24
 - 2.4.3 Kartesische Produkte — 25
 - 2.4.4 Relationen und Funktionen — 26
- 2.5 Die reellen Zahlen — 27
 - 2.5.1 Zur axiomatischen Einführung — 27
 - 2.5.2 Körperaxiome — 27
 - 2.5.3 Anordnungsaxiome — 27
 - 2.5.4 Einbettung der natürlichen Zahlen — 28
 - 2.5.5 Metasprachliche Definitionen und Beweise — 28
 - 2.5.6 Vollständige Induktion und rekursive Definitionen — 30
 - 2.5.7 Endliche Mengen — 31
 - 2.5.8 Archimedisches Axiom — 33
 - 2.5.9 Zwischenfazit — 33
- 2.6 Die Nichtstandardaxiome der Analysis — 33
 - 2.6.1 Transferaxiom — 33
 - 2.6.2 Idealisierungsaxiom für reelle Zahlen — 35
 - 2.6.3 Standardteilaxiom — 37

2.7	Abschließende Bemerkungen zur Axiomatik —	40
2.8	Externe Kriterien für zentrale Begriffe der Analysis —	42
2.8.1	Konvergenz von Folgen —	43
2.8.2	Stetigkeit in einem Punkt —	45
2.8.3	Gleichmäßige Stetigkeit —	46
2.8.4	Häufungspunkt einer Menge —	46
2.8.5	Grenzwerte von Funktionen —	47
2.8.6	Differenzierbarkeit —	48
2.8.7	Integrierbarkeit —	48
2.9	Einige Sätze und Beweise —	51
2.9.1	Sätze über Folgen —	51
2.9.2	Sätze über stetige Funktionen —	51
2.9.3	Sätze der Differentialrechnung —	53
2.9.4	Sätze der Integralrechnung —	55
2.9.5	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung —	56
2.10	Ausblick —	57
2.10.1	Formalisierung und Konservativität —	57
2.10.2	Idealisierung —	59
2.10.3	Standardisierung —	59
3	Ein Überblick zur Nonstandard-Analysis —	61
3.1	Zur Geschichte der Nonstandard-Analysis —	61
3.2	Omega-Kalkül nach Schmieden und Laugwitz —	64
3.2.1	Definition der Omegazahlen —	65
3.2.2	Fortsetzung von Relationen und Funktionen —	66
3.2.3	Infinite und infinitesimale Omegazahlen —	67
3.2.4	Hyperendliche Folgen und Summen —	68
3.2.5	Zentrale Begriffe der elementaren Analysis mit Omegazahlen —	69
3.2.6	Einschränkungen —	70
3.3	Die hyperreellen Zahlen —	71
3.3.1	Körpererweiterung mittels Ultrafilter —	71
3.3.2	Transferprinzip für hyperreelle Zahlen —	72
3.3.3	Körpererweiterung mit dem Endlichkeitssatz —	73
3.4	Nonstandard-Analysis in Superstrukturen —	74
3.4.1	Transitiv beschränkte Ausdrücke —	75
3.4.2	Superstrukturen —	75
3.4.3	Elementare Einbettungen —	76
3.4.4	Nichtstandardeinbettungen —	78
3.4.5	Standardelemente und Standardmengen —	79
3.4.6	Interne Elemente und interne Mengen —	79
3.4.7	Hyperendliche Mengen —	81
3.4.8	Analysis für interne Funktionen —	82

3.4.9	Implizite Definitionen durch Standardisierung —	83
3.4.10	Saturiertheit —	84
3.4.11	Zur Existenz von Nichtstandardeinbettungen —	86
3.5	Interne Mengenlehre —	86
3.5.1	Erweiterung der Sprache —	86
3.5.2	Transferaxiom —	88
3.5.3	Idealisierungsaxiom —	89
3.5.4	Standardisierungsaxiom —	90
3.5.5	Elementare Analysis in der internen Mengenlehre —	91
3.5.6	Stetigkeit und S-Stetigkeit —	92
3.6	Andere axiomatische Zugänge —	94
3.6.1	Beschränkte Mengenlehre —	94
3.6.2	Externe Mengenlehren —	95
3.6.3	Relative Mengenlehren —	97
4	Zur Praxis und Akzeptanz in der Lehre —	101
4.1	Veranstaltungen zur Nonstandard-Analysis —	101
4.2	Lehrbücher zur Analysis —	102
4.3	Nichtstandardeinführungen in die Analysis —	104
4.3.1	Konstruktion mit Fréchet-Filter —	104
4.3.2	Verallgemeinerte Ω -Adjunktion —	106
4.3.3	Superreelle Zahlen —	107
4.3.4	Axiomatische Einführung der hyperreellen Zahlen —	109
4.3.5	Elementare Einführung mit interner Mengenlehre —	112
4.3.6	Elementare Einführung mit relativer Mengenlehre —	113
4.3.7	Zusammenfassung und Vergleich —	115
4.4	Erfahrungen aus der Lehre —	116
4.4.1	Die Hypothese des kognitiven Vorteils —	116
4.4.2	Die kognitive Existenz von Infinitesimalien —	119
4.4.3	Experimentelle Analysiskurse —	121
4.4.4	Gibt es Widerstand? —	122
4.5	Eine Umfrage unter Analysislehrenden —	124
4.5.1	Die Verbreitung von Nichtstandard —	124
4.5.2	Die Bewertung von Nichtstandard (aus der Sicht der Lehrenden) —	124
4.5.3	Die Argumente der Lehrenden —	125
4.5.4	Gründe für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandard in der Lehre —	126
4.5.5	Wie schwierig ist Nichtsstandard? —	127
4.5.6	Wie relevant ist Nichtstandard? —	129
4.5.7	Welchen Nutzen bringt Nichtstandard? —	132
4.5.8	Gibt es weitere Gründe für eine ablehnende Haltung? —	135

5	Philosophische Fragen und mathematische Herausforderungen — 136
5.1	Aus den Grundlagen der Mathematik — 136
5.1.1	Ein Blick in die Geschichte — 136
5.1.2	Gibt es richtige und falsche Mathematik? — 138
5.1.3	Mathematikphilosophische Grundfragen — 139
5.1.4	Realismus — 140
5.1.5	Konstruktivismus — 143
5.1.6	Formalismus — 144
5.1.7	Reverse Mathematik und das relativierte Hilbert-Programm — 146
5.1.8	Die mathematische Praxis — 149
5.2	Das Unendliche — 150
5.2.1	Potentiell vs. aktual unendlich — 150
5.2.2	Arithmetisches vs. unarithmetisches Unendlich — 152
5.2.3	Herausforderung: Das aktual Unendliche in der Arithmetik — 156
5.3	Das Kontinuum — 156
5.3.1	Das Wesen des Kontinuums — 156
5.3.2	Kontinuum vs. Menge — 158
5.3.3	Das Cantor-Dedekind-Postulat — 158
5.3.4	Das archimedische Axiom — 159
5.3.5	Herausforderung: Das nichtarchimedische Kontinuum — 160
5.4	Mengenlehre — 160
5.4.1	Zur Bedeutung der Mengenlehre in der Mathematik — 161
5.4.2	Das Mengenuniversum als kumulative Hierarchie — 162
5.4.3	Die konstruktible Hierarchie — 163
5.4.4	Vielfalt der Modelle — 164
5.4.5	Metasprache und Objektsprache — 165
5.4.6	Hintergrundmengenlehre und Objektmengenlehre — 165
5.4.7	Die sogenannten Standardmodelle — 167
5.4.8	Nichtstandard-Perspektiven auf die Mengenlehre — 169
5.4.9	Multiversum-Theorien — 170
5.4.10	Die Rolle des Auswahlaxioms — 171
5.4.11	Herausforderung: Nichtstandard-Mengenuniversen — 173
5.5	Die natürlichen Zahlen — 174
5.5.1	Peano-Strukturen — 174
5.5.2	Objektzahlen und Metazahlen — 175
5.5.3	Welches sind die richtigen natürlichen Zahlen? — 176
5.5.4	Herausforderung: unendliche natürliche Zahlen — 178
6	Aus den mathematischen Grundlagen: Zum Status der Nichtstandardzahlen — 179
6.1	Ontologische Fragen — 179
6.1.1	Sind Nichtstandardzahlen widersprüchlich? — 179

6.1.2	Existieren Nichtstandardzahlen? —	181
6.1.3	Zusammenfassung der ontologischen Antworten —	185
6.2	Epistemologische Fragen —	186
6.2.1	Wie bestimmt ist Nichtstandard? —	186
6.2.2	Wie sicher ist Nichtstandard? —	190
6.2.3	Zusammenfassung der epistemologischen Antworten —	190
6.3	Fragen zur Anwendbarkeit —	190
6.3.1	Welche Bedeutung haben Nichtstandardzahlen für die reale Welt? —	191
6.3.2	Ist Nonstandard-Analysis auf die reale Welt anwendbar? —	192
6.3.3	Ein Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie —	194
6.3.4	Zusammenfassung der Antworten zur Anwendbarkeit —	197

7 Schlussbetrachtung — 198

7.1	Zusammenfassung und Einordnung der Ergebnisse —	198
7.1.1	Zur Bedeutung der Nonstandard-Analysis in der Hochschullehre —	198
7.1.2	Die Einschätzung der Lehrenden —	198
7.1.3	Zur ablehnenden Haltung gegenüber Nichtstandard —	199
7.1.4	Kritische Reflexion der Ablehnungsgründe —	202
7.2	Fazit —	204
7.2.1	Mögliche Konsequenzen für die Lehre —	204
7.2.2	Schlusswort —	206

Literatur — 207

Stichwortverzeichnis — 217