

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	1
1.1	Mehrkörpersysteme	1
1.2	Physikalische Grundlagen der Mehrkörperdynamik	2
1.3	Entwicklung der Mehrkörperdynamik	6
1.4	Mehrkörperformalismen	8
1.5	Anwendungen von Mehrkörpersystemen	11
1.6	Inhaltsübersicht	17
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Vektorrechnung</b>	19
2.1	Skalare und Vektoren	19
2.2	Koordinaten von Vektoren	19
2.3	Rechenregeln für Vektoren	21
2.4	Transformation von Vektorkoordinaten	26
2.5	Tensoren zweiter Stufe	30
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Kinematik</b>	33
3.1	Allgemeine Bewegung des starren Körpers	33
3.1.1	Aufgabenstellung	33
3.1.2	Lage	35
3.1.3	Geschwindigkeit, Bewegungswinder	36
3.1.4	Beschleunigung	37
3.1.5	Beispiel zur Bewegung eines starren Körpers	38
3.1.6	Sonderfälle der allgemeinen Bewegung	39
3.2	Relativbewegungen starrer Körper	40
3.2.1	Relative zeitliche Ableitung von Vektoren	40
3.2.2	Zusammensetzung zweier Bewegungen	45
3.2.3	Beispiel zur Zusammensetzung zweier Bewegungen	48
3.2.4	Umgekehrte Relativbewegung	52
3.3	Drehzeiger und Drehtensor	55
3.3.1	Drehzeiger	55
3.3.2	Drehtensor	56

3.3.3	Passive und aktive Betrachtung der Drehung . . . . .	58
3.3.4	Beispiele für Drehungen . . . . .	60
3.4	Mehrfache Drehungen . . . . .	62
3.4.1	Nichtkommutativität von Drehungen . . . . .	62
3.4.2	Drehungen um die Ausgangsachsen . . . . .	63
3.4.3	Drehungen um die mitgedrehten Achsen . . . . .	65
3.4.4	Gegenüberstellung der Drehreihenfolgen . . . . .	68
3.5	Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit . . . . .	68
3.5.1	Infinitesimale Drehung und Winkelgeschwindigkeit . . . . .	68
3.5.2	Drehtensor und Winkelgeschwindigkeit . . . . .	70
3.6	KARDAN-Winkel und EULER-Winkel . . . . .	71
3.6.1	<i>xyz</i> -KARDAN-Winkel und Drehmatrix . . . . .	72
3.6.2	<i>xyz</i> -KARDAN-Winkel aus gegebener Drehmatrix . . . . .	74
3.6.3	<i>xyz</i> -KARDAN-Winkel und Winkelgeschwindigkeit . . . . .	75
3.6.4	Gegenüberstellung verschiedener Drehreihenfolgen . . . . .	76
3.7	EULER-Parameter (Quaternionen) . . . . .	80
3.7.1	EULER-Parameter und Drehtensor . . . . .	80
3.7.2	EULER-Parameter aus gegebener Drehmatrix . . . . .	82
3.7.3	EULER-Parameter als Quaternionen . . . . .	83
3.7.4	EULER-Parameter und mehrfache Drehungen . . . . .	84
3.7.5	EULER-Parameter und Winkelgeschwindigkeit . . . . .	86
3.8	RODRIGUES-Parameter . . . . .	90
3.8.1	RODRIGUES-Parameter und Drehtensor . . . . .	90
3.8.2	RODRIGUES-Parameter und Winkelgeschwindigkeit . . . . .	90
3.9	Beispiele zu Koordinaten von Drehungen . . . . .	92
3.9.1	Koordinaten zu einer gegebenen Drehung . . . . .	92
3.9.2	Kinematische Bewegungsgleichungen . . . . .	94
4	<b>Grundlagen der Dynamik . . . . .</b>	97
4.1	Impuls und Drall . . . . .	97
4.1.1	Impuls . . . . .	98
4.1.2	Drall (Drehimpuls, Impulsmoment) . . . . .	98
4.2	Schwerpunktsatz und Drallsatz . . . . .	100
4.2.1	Impulssatz und Schwerpunktsatz . . . . .	100
4.2.2	Drallsatz (Momentensatz) . . . . .	101
4.3	Impuls und Drall des starren Körpers . . . . .	102
4.3.1	Masse und Massenmittelpunkt . . . . .	103
4.3.2	Impuls des starren Körpers . . . . .	104
4.3.3	Drall des starren Körpers . . . . .	104
4.4	Trägheitstensor . . . . .	104
4.4.1	Eigenschaften des Trägheitstensors . . . . .	105
4.4.2	Parallelverschiebung des Bezugssystems . . . . .	106
4.4.3	Drehung des Bezugssystems . . . . .	108
4.4.4	Hauptachsensystem . . . . .	109
4.4.5	Trägheitstensor eines homogenen Kreiszylinders . . . . .	110

4.5	Impulssatz und Drallsatz für den starren Körper . . . . .	112
4.5.1	Impulssatz . . . . .	112
4.5.2	Drallsatz . . . . .	112
4.5.3	d'ALEMBERTSche Trägheitskräfte . . . . .	114
4.6	Kinetische Energie des starren Körpers . . . . .	115
4.7	Kraftwirkungen von Rotoren . . . . .	116
4.8	Dynamik von Kreiseln . . . . .	119
4.8.1	Bewegungen eines momentenfreien Kreisels . . . . .	119
4.8.2	Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels . . . . .	123
5	<b>Mechanische Systeme mit Bindungen . . . . .</b>	127
5.1	Freie und gebundene mechanische Systeme . . . . .	127
5.2	Kinematik holonomer Systeme . . . . .	129
5.2.1	Skleronome und rheonome holonome Bindungen . . . . .	129
5.2.2	Beispiel: Bindungen eines Verladekran . . . . .	130
5.2.3	Zweiseitige und einseitige holonome Bindungen . . . . .	131
5.2.4	Freiheitsgrad holonomer Systeme . . . . .	132
5.2.5	Minimalkoordinaten holonomer Systeme . . . . .	133
5.2.6	Implizite holonome Bindungen . . . . .	134
5.2.7	Explizite holonome Bindungen . . . . .	137
5.2.8	Geometrische und kinematische Bindungen . . . . .	141
5.2.9	Bindungen des Verladekran . . . . .	141
5.3	Dynamik holonomer Systeme . . . . .	143
5.3.1	Eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte . . . . .	144
5.3.2	Explizite Reaktionsbedingungen . . . . .	145
5.3.3	Implizite Reaktionsbedingungen . . . . .	146
5.3.4	Reaktionsbedingungen für den Verladekran . . . . .	146
5.3.5	Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten . . . . .	147
5.3.6	Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten . . . . .	150
5.3.7	Bewegungsgleichungen des Verladekran . . . . .	154
5.3.8	Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels . . . . .	154
5.4	Kinematik nichtholonomer Systeme . . . . .	159
5.4.1	Implizite nichtholonomie Bindungen . . . . .	160
5.4.2	Freiheitsgrad nichtholonomer Systeme . . . . .	162
5.4.3	Explizite nichtholonomie Bindungen . . . . .	163
5.5	Dynamik nichtholonomer Systeme . . . . .	165
5.5.1	Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten . . . . .	166
5.5.2	Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten . . . . .	168
5.6	Prinzipien und Methoden der Dynamik . . . . .	171
5.6.1	Prinzip von d'ALEMBERT-LAGRANGE . . . . .	172
5.6.2	Prinzip von JOURDAIN . . . . .	174
5.6.3	Prinzip von GAUSS . . . . .	175
5.6.4	LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art . . . . .	177
5.6.5	Gleichungen von HAMILTON und GIBBS-APPELL . . . . .	182
5.7	Zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen . . . . .	182

5.7.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	183
5.7.2	Differential-algebraische Gleichungen . . . . .	186
5.7.3	Nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	189
<b>6</b>	<b>Bindungen in Mehrkörpersystemen . . . . .</b>	<b>191</b>
6.1	Gelenke in Mehrkörpersystemen . . . . .	191
6.1.1	Gelenke mit holonomen skleronomen Bindungen . . . . .	192
6.1.2	Gelenke mit holonomen rheonomen Bindungen . . . . .	194
6.1.3	Gelenke mit nichtholonomen Bindungen . . . . .	194
6.1.4	Zur Modellierung von Gelenken . . . . .	195
6.2	Klassifizierungen von Mehrkörpersystemen . . . . .	197
6.2.1	Topologische Klassifizierung . . . . .	197
6.2.2	Kinematische Klassifizierung . . . . .	199
6.3	Statische und kinematische Bestimmtheit . . . . .	200
6.3.1	Definitionen und Begriffe . . . . .	200
6.3.2	Freiheitsgrad statisch bestimmter Systeme . . . . .	202
6.3.3	Freiheitsgrad statisch unbestimmter Systeme . . . . .	205
6.3.4	Freiheitsgrad ebener und sphärischer Systeme . . . . .	207
6.4	Implizite holonome Bindungen von Gelenken . . . . .	208
6.4.1	Bewegungsgrößen eines starren Körpers . . . . .	208
6.4.2	Implizite Bindungen eines holonomen Gelenks . . . . .	209
6.4.3	Elementare implizite Bindungen von Gelenken . . . . .	210
6.4.4	Implizite Bindungen des Drehgelenks . . . . .	215
6.5	Explizite holonome Bindungen von Gelenken . . . . .	216
6.5.1	Explizite Bindungen eines holonomen Gelenks . . . . .	216
6.5.2	Explizite Bindungen des Drehgelenks . . . . .	220
6.5.3	Explizite Bindungen des Schubgelenks . . . . .	221
6.5.4	Explizite Bindungen des Kugelgelenks . . . . .	222
6.6	Reaktionsbedingungen für holonome Gelenke . . . . .	225
6.6.1	Explizite Reaktionsbedingungen . . . . .	226
6.6.2	Implizite Reaktionsbedingungen . . . . .	226
6.6.3	Reaktionsbedingungen für das Drehgelenk . . . . .	227
6.7	Nichtholome Bindungen von Gelenken . . . . .	228
6.7.1	Implizite Bindungen eines nichtholonomen Gelenks . . . . .	229
6.7.2	Explizite Bindungen eines nichtholonomen Gelenks . . . . .	230
6.7.3	Reaktionsbedingungen für ein nichtholonomes Gelenk . . . . .	233
6.8	Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen . . . . .	234
<b>7</b>	<b>Offene Mehrkörpersysteme . . . . .</b>	<b>237</b>
7.1	Topologie offener Mehrkörpersysteme . . . . .	237
7.2	Kinematik offener Mehrkörpersysteme . . . . .	239
7.2.1	Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten . . . . .	240
7.2.2	Explizite Bindungen einer Kettenstruktur . . . . .	241
7.2.3	Kettenstruktur mit Standardgelenken . . . . .	247

7.2.4	Explizite Bindungen einer Baumstruktur .....	251
7.3	Dynamik offener Mehrkörpersysteme .....	253
7.3.1	Implizite Reaktionsbedingungen für offene MKS .....	253
7.3.2	Impuls- und Drallsätze .....	258
7.3.3	Eingeprägte Kräfte und Momente .....	259
7.3.4	Bestimmungsgleichungen offener MKS .....	263
7.4	Nichtrekursiver Formalismus für offene MKS .....	265
7.5	Rekursiver Formalismus für offene MKS .....	269
7.5.1	Rekursive Lösung der Bestimmungsgleichungen .....	269
7.5.2	Ablauf der rekursiven Berechnung .....	273
7.6	Beispiele offener Mehrkörpersysteme .....	274
7.6.1	Vertikaler Knickarm-Roboter .....	274
7.6.2	Schwerer Kreisel mit Fixpunktierung .....	283
8	<b>Geschlossene Mehrkörpersysteme .....</b>	<b>287</b>
8.1	Kinematik einer einzelnen Mehrkörperschleife .....	287
8.1.1	Implizite Schließbedingungen .....	288
8.1.2	Explizite Schließbedingungen .....	293
8.1.3	Kinematik eines ebenen Gelenkvierecks .....	297
8.2	Kinematik mehrschleifiger Systeme .....	307
8.2.1	Primäre Gelenkkoordinaten .....	307
8.2.2	Implizite Schließbedingungen .....	308
8.2.3	Zur Definition unabhängiger Schleifen .....	312
8.2.4	Zusätzliche kinematische Ketten .....	314
8.2.5	Explizite Schließbedingungen .....	315
8.3	Dynamik geschlossener Mehrkörpersysteme .....	318
8.3.1	Sekundäre Reaktionskraftwinder .....	318
8.3.2	Impuls- und Drallsätze .....	319
8.4	Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten ..	320
8.4.1	Bestimmungsgleichungen geschlossener MKS .....	320
8.4.2	Nichtrekursiver Formalismus für geschlossene MKS ..	323
8.4.3	Rekursiver Formalismus für geschlossene MKS .....	324
8.5	Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten .....	329
8.5.1	Zustandsgleichungen .....	329
8.5.2	Minimalform der Bewegungsgleichungen .....	330
8.6	Dynamik eines ebenen Schubkurbelgetriebes .....	332
8.6.1	Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten .....	333
8.6.2	Bewegungsgleichungen in Minimalform .....	336
8.7	Dynamik eines räumlichen Koppelgetriebes .....	337
8.7.1	Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten .....	338
8.7.2	Bewegungsgleichungen in Minimalform .....	342
8.8	Dynamik eines Parallelroboters .....	346
8.8.1	Statisch bestimmte Mehrkörpermodelle .....	347

8.8.2	Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten .....	349
8.9	Auf einer rotierenden Ebene rollende Kugel .....	355
8.9.1	Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten .....	355
8.9.2	Bewegungsgleichungen in Minimalform .....	360
<b>A</b>	<b>Mathematische Grundlagen .....</b>	<b>363</b>
A.1	Matrizen .....	363
A.2	Quaternionen .....	368
<b>B</b>	<b>Zur Integrierbarkeit kinematischer Bindungen .....</b>	<b>371</b>
B.1	Wagen mit zwei Rädern (Kufe) .....	371
B.2	Integrierbarkeitsbedingungen .....	375
B.3	Beispiele .....	377
B.3.1	Wagen mit nicht zusammenfallenden Radachsen .....	377
B.3.2	Zweirädriger Wagen mit Raddrehungen .....	380
B.3.3	Wagen mit Lenkung .....	382
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>385</b>
	<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>391</b>