

1	Unendlichkeit in der Antike	1
1.1	Der Satz von Euklid	2
1.2	Achilles und die Schildkröte	3
1.3	Irrationalität	4
1.4	Der Euklid'sche Algorithmus	8
2	Konstruktion der reellen Zahlen	11
2.1	Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen	11
2.2	Dedekind'sche Schnitte	12
2.3	Das Intervallschachtelungsprinzip	21
3	Irrationalität und Transzendenz	25
3.1	Irrationalität von e und π	25
3.2	Darstellung von Irrationalzahlen durch Kettenbrüche	29
3.3	Algebraische und transzendente Zahlen	39
3.4	Liouville'sche Zahlen	43
3.5	Transzendenz von e	45
4	Unendliche Mengen	49
4.1	Das Hotel Hilbert	49
4.2	Abzählen endlicher Mengen	51
4.3	Das erste Diagonalargument	55
4.4	Der Calkin-Wilf-Baum	59
4.5	Das zweite Diagonalargument	66
4.6	Die Cantor-Menge	72
5	Gleichmächtigkeit	77
5.1	Vergleichen von Mächtigkeiten	77
5.2	Der Satz von Cantor-Bernstein	82

6	Kardinalitäten und Wohlordnungen	87
6.1	Der Satz von Cantor	87
6.2	Kardinalitäten	88
6.3	Kardinale Arithmetik	89
6.4	Wohlordnungen	91
6.5	Kardinalitäten wohlgeordneter Mengen	100
7	Das Auswahlaxiom	103
7.1	Das Auswahlaxiom und erste Anwendungen	104
7.2	Das Lemma von König	108
7.3	Anwendungen in der Unterhaltungsmathematik	110
8	Das Banach-Tarski-Paradoxon	115
8.1	Zerlegungsgleichheit	115
8.2	Das Hausdorff-Paradoxon	119
8.3	Das Banach-Tarski Paradoxon	126
9	Axiome der Mengenlehre	129
9.1	Axiome der Mengenlehre	129
10	Ordinalzahlen	137
10.1	Axiomatische Konstruktion der Ordinalzahlen	137
10.2	Transfinite Rekursion und Induktion	143
10.3	Der Wohlordnungssatz	151
10.4	Ordnungstypen von Wohlordnungen	156
10.5	Die Cantor-Normalform	158
10.6	Der Satz von Goodstein	161
11	Kardinalzahlen	165
11.1	Kardinalitäten als Ordinalzahlen	165
11.2	Kardinalzahlarithmetik	168
11.3	Der Satz von König	172
11.4	Die Kontinuumshypothese	174
11.5	Große Kardinalzahlen	177
12	Modelle der Mengenlehre	179
12.1	Ein kurzer Exkurs in die Modelltheorie	179
12.2	Die kumulative Hierarchie	181
12.3	Zur Existenz eines Modells von ZFC	184
12.4	Die erblich endlichen Mengen	186
12.5	Modelle der Mengenlehre mit Atomen	191
13	Permutationsmodelle	193
13.1	Konstruktion von Permutationsmodellen	193
13.2	Ein Modell der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom	198

14	Der Satz von Ramsey	203
14.1	Der Satz von Ramsey	203
14.2	Folgerungen und Anwendungen des Satzes von Ramsey	205
14.3	Verallgemeinerungen des Satzes von Ramsey	208
15	Spiele und Gewinnstrategien	211
15.1	Endliche Spiele	211
15.2	Unendliche Spiele	217
15.3	Determiniertheit offener Mengen	221
15.4	Existenz nicht-determinierter Spiele	223
16	Determiniertheit unendlicher Spiele	229
16.1	Das Axiom der Determiniertheit	229
16.2	Die Perfekte-Teilmenge-Eigenschaft	231
16.3	Das Lebesgue'sche Maß	235
16.4	Zur Messbarkeit von Mengen reeller Zahlen	239
16.5	Die Baire-Eigenschaft	244
17	Die surreellen Zahlen	251
17.1	Kombinatorische Spiele	251
17.2	Eine Ordnung und eine Gruppenstruktur auf $\mathcal{G}$	254
17.3	Hackenbush	259
17.4	Die surreellen Zahlen	265
17.5	Surreelle Zahlen mit Geburtstag ω	270
17.6	S ist ein geordneter Körper	273
17.7	Nochmals Hackenbush	278
17.8	Werte von Hackenbushspielen	284
	Literaturverzeichnis	289
	Index	291