

I Mathematische Grundbegriffe

1	Grundrechenarten (w)	3
1.1	Addition (w)	3
1.2	Subtraktion (w)	4
1.3	Multiplikation (w)	6
1.4	Division (w)	7
1.5	Potenz (w)	7
1.6	Vorrangregeln (w) und Termumformungen (w)	8
1.7	Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen, Stellenwertsysteme	9
1.7.1	Brüche	9
1.7.2	Dezimalzahlen (w)	12
1.7.3	Weitere Stellenwertsysteme	13
1.8	Prozentrechnen (s)	13
2	Zahlenmengen	15
2.1	Die Menge der natürlichen Zahlen	15
2.2	Die Menge der ganzen Zahlen	15
2.3	Die Menge der rationalen Zahlen	16
2.4	Die Menge der reellen Zahlen	17
2.5	Die Menge der algebraischen Zahlen	21
2.6	Die Menge der komplexen Zahlen	21
3	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	23
3.1	Potenzen, Potenzgesetze	23
3.2	Wurzeln	24
3.3	Monotoniegesetze für Potenzen	26
3.4	Logarithmen	27
3.5	Anwendungen des Logarithmus	28
3.5.1	Bel, Dezibel, Neper	28
3.5.2	Einfach-Logarithmische Diagramme	29

	3.5.3	Doppelt logarithmische Diagramme	30
	3.5.4	Normalverteilung (w)	31
4		Aussagen und Aussageformen	33
	4.1	Definition und Beispiele	33
	4.2	Verknüpfung von Aussageformen	35
	4.3	Lösen von Gleichungen	35
	4.4	Lösen quadratischer Gleichungen	37
	4.5	Lösen von Ungleichungen	38
5		Mengenlehre und Aussagenlogik	41
	5.1	Mengenlehre	41
	5.1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre	41
	5.1.2	Beweise in der Mengenlehre	45
	5.2	Aussagenlogik	49
	5.2.1	Negation	50
	5.2.2	Konjunktion	51
	5.2.3	Disjunktion	51
	5.2.4	Antivalenz	52
	5.2.5	Subjunktion und Implikation	53
	5.2.6	Bijunktion und Äquivalenzverknüpfung	55
	5.2.7	Aussagenlogische Gesetze	57
	5.2.8	Beispiel aus der Elektronik	58
6		Relationen und Funktionen	61
	6.1	Relationen: Definition und Beispiele	61
	6.2	Funktion	65
	6.2.1	Definition und Begriffe	65
	6.2.2	Nullstellen von Funktionen	66
	6.2.3	Injektivität, Surjektivität, Bijektivität	66
	6.2.4	Monotonie (w)	69
	6.2.5	Umkehrbarkeit	70
	6.2.6	Symmetrien	71
	6.3	Lineare Funktion	71
	6.4	Quadratische Funktion	76
	6.5	Ganzrationale Funktion	80
	6.6	Gebrochen rationale Funktionen	85
	6.7	Trigonometrische Funktionen	85
	6.8	Spezielle Funktionen	87

II Lineare Algebra und Analytische Geometrie

7	Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme	93
7.1	Definition linearer Gleichungssysteme	93
7.2	Gaußsches Eliminationsverfahren, Verfahren nach Gauß-Jordan	94
7.3	Determinanten, Laplacescher Entwicklungssatz	96
7.4	Cramersche Regel	100
7.4.1	2×2 Lineare Gleichungssysteme	101
7.4.2	3×3 Lineare Gleichungssysteme	102
7.5	Homogene lineare Gleichungssysteme	106
8	Elementargeometrische Grundlagen	107
8.1	Punkt, Strecke, Gerade, Halbgerade	107
8.2	Kreis	108
8.3	Winkel	109
8.4	Lagebeziehung von Geraden	111
8.5	Winkel an Geradenkreuzungen	112
8.6	Dreiecke	113
8.7	Vierecke	115
8.8	Reguläre Vielecke	116
8.9	Kongruenz von Figuren	116
8.10	Ähnlichkeit von Figuren	117
8.11	Strahlensatz	117
8.12	Dreidimensionale Figuren	118
9	Vektoralgebra	121
9.1	Vektoren des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	121
9.2	Vektoraddition	122
9.3	S-Multiplikation	124
9.4	Koordinatendarstellung von Vektoren	125
9.5	Skalarprodukt von Vektoren	126
9.5.1	Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts von Vektoren	126
9.5.2	Winkel zwischen Vektoren	128
9.5.3	Anwendung des Skalarprodukts für Beweise in der Geometrie	129
9.5.4	Skalarprodukt in Koordinatendarstellung	130
9.5.5	Betrag eines Vektors und Einheitsvektor	131
9.5.6	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung	132
9.6	Vektorprodukt/Kreuzprodukt	133
9.7	Spatprodukt	137

10	Algebraische Strukturen	139
10.1	Gruppen	139
10.1.1	Definition einer Gruppe	139
10.1.2	Restklassen	144
10.1.3	Gruppen-Homomorphismus	145
10.1.4	Permutationsgruppen	146
10.2	Körper	146
10.3	Vektorräume	151
10.3.1	Definition und Beispiele	151
10.3.2	Untervektorräume	152
11	Linearkombination und Basis	155
11.1	Linearkombinationen	155
11.2	Erzeugendensysteme	157
11.3	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren	160
11.4	Basis eines Vektorraums	163
11.5	Dimension eines Vektorraums	164
11.6	Koordinaten und Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis	168
11.7	Teilverhältnisse	170
12	Affine Geometrie	173
12.1	Geraden	173
12.1.1	Parameterformen von Geraden	173
12.1.2	Lagebeziehung von Geraden	174
12.1.3	Schnittwinkel zweier Geraden	175
12.2	Ebenen	176
12.2.1	Parameterformen von Ebenen	176
12.2.2	Normalenformen von Ebenen	177
12.2.3	Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene	179
12.2.4	Lagebeziehung zweier Ebenen	181
12.3	Abstandsprobleme	183
12.3.1	Abstand Punkt-Ebene, Hesse-Normalform einer Ebene	183
12.3.2	Abstand zweier paralleler Ebenen, Mittelebene	185
12.3.3	Abstand Punkt Gerade	185
12.3.4	Abstand windschiefer Geraden	186
13	Matrizenrechnung	189
13.1	Definitionen und Begriffe	189
13.2	Matrizenaddition	191
13.3	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	191
13.4	Matrizenmultiplikation	192
13.5	Inverse Matrix	193

13.6	Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe der inversen Matrix	196
13.7	Invertierbarkeit einer Matrix, Eindeutigkeit der inversen Matrix	197
13.8	Lineare Abbildungen mit Hilfe von Matrizen	198
13.8.1	Lineare Abbildung und Matrix	198
13.8.2	Geradentreue, Parallelentreue, Teilverhältnistreue von linearen Abbildungen	200
13.8.3	Einfache lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$	201
13.8.4	Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix	202
13.8.5	Klassifizierung linearer Abbildungen nach der Anzahl ihrer Eigenwerte	204
13.8.6	Ähnlichkeits- und Kongruenzabbildungen	211
13.8.7	Homomorphismus, Endomorphismus, Isomorphismus	213

III Reelle Analysis

14	Menge der reellen Zahlen	217
14.1	$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ als angeordneter Körper	217
14.2	Vollständigkeit eines angeordneten Körpers	218
14.3	Definition der reellen Zahlen	218
14.4	Eigenschaften der reellen Zahlen	219
15	Menge der natürlichen Zahlen	221
15.1	Definition der natürlichen Zahlen nach Peano	221
15.2	Beweisverfahren der vollständigen Induktion	222
15.3	Beweis der Rechengesetze in $\mathbb{N}_0$ aus den Axiomen von Peano	224
15.4	Binomialkoeffizienten und binomischer Lehrsatz	226
16	Folgen und Reihen	231
16.1	Folgen und ihre Grenzwerte	231
16.1.1	Definitionen und Beispiele	231
16.1.2	Eigenschaften von Folgen	235
16.1.3	Grenzwerte von Folgen	236
16.1.4	Sätze über Folgen	242
16.1.5	Grenzwerte spezieller Folgen	244
16.2	Reihen	247
16.2.1	Definition und Beispiele	247
16.2.2	Konvergenzkriterien für Reihen	249
16.2.3	Potenzreihen	252

17	Grenzwerte reeller Funktionen und Stetigkeit	253
17.1	Verhalten einer Funktion am Rand ihres Definitionsbereichs	253
17.1.1	Verhalten im Unendlichen	253
17.1.2	Verhalten an einer Stelle x_0	255
17.2	Stetigkeit	263
17.3	Sätze über stetige Funktionen	267
17.3.1	Zwischenwertsatz	267
17.3.2	Nullstellensatz	269
17.3.3	Extremwertsatz	270
18	Differentialrechnung	271
18.1	Differenzierbarkeit und Ableitung	271
18.2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	276
18.3	Ableitungen der Grundfunktionen und Ableitungsregeln	278
18.4	Umkehrfunktionen und ihre Ableitung	281
18.5	Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion	286
18.6	Sätze aus der Differentialrechnung	289
18.6.1	Satz von Rolle	289
18.6.2	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	289
18.6.3	Regeln von l'Hospital	290
18.7	Monotoniekriterium	292
18.8	Höhere Ableitungen	293
18.9	Extrema	295
18.10	Wendepunkte	298
18.11	Kurvendiskussion	301
19	Anwendungen der Differentialrechnung	305
19.1	Optimierungsaufgaben	305
19.2	Newton-Verfahren	307
19.3	Taylorreihen	310
19.4	Totales Differential	316
19.5	Lineare Regression	319
20	Integralrechnung	323
20.1	Historisches Beispiel	323
20.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	325
20.3	Partielle Integration	327
20.4	Integration durch Variablentransformation, Integration durch Substitution	328
20.5	Integralfunktion und bestimmtes Integral	329
20.6	Eigenschaften von bestimmten Integralen	331
20.7	Gerichtete Flächen und Flächen zwischen Graphen	332

20.8	Integration symmetrischer Funktionen über symmetrische Intervalle .	334
20.9	Uneigentliche Integrale	335
20.10	Mittelwertsatz der Integralrechnung	338
20.11	Anwendungen der Integralrechnung	339
20.11.1	Berechnung der Rauminhalte von Rotationskörpern	339
20.11.2	Mittelwertberechnung von Funktionen	342
20.12	Näherungsweise Berechnung von Integralen	344
20.13	Partialbruchzerlegung	346

IV Komplexe Zahlen

21	Komplexe Zahlen	351
21.1	Bereichserweiterung	351
21.2	Definition der komplexen Zahlen	352
21.3	Rechnen mit komplexen Zahlen	352
21.4	Körper $\mathbb{C}$	353
21.5	Anordnungseigenschaft in $\mathbb{C}$?	354
21.6	Komplexe Zahlenebene	354
21.6.1	Betrag einer komplexen Zahl	355
21.6.2	Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	356
21.6.3	Produkt und Quotient komplexer Zahlen in Polarform	357
21.7	Funktionen komplexer Zahlen	359
21.8	Algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}$	359
21.8.1	Existenz von Lösungen	359
21.8.2	n -te Einheitswurzeln	360
21.8.3	Komplexe Lösungen quadratischer Gleichungen	360

V Differentialgleichungen

22	Differentialgleichungen	363
22.1	Begriffe und einfache Beispiele	363
22.2	Separierung der Variablen	365
22.3	Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	367
22.3.1	Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	368
22.3.2	Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung .	368

22.4	Schwingungsprobleme	368
22.4.1	Freier ungedämpfter harmonischer Oszillator	368
22.4.2	Freier gedämpfter harmonischer Oszillator	369
22.4.3	Erzwungene gedämpfte Schwingung mit harmonischer Anregung	371
22.5	Arten von Wachstum	372
22.5.1	Lineares und exponentielles Wachstum	372
22.5.2	Beschränktes Wachstum	373
22.5.3	Logistisches Wachstum	375
22.6	SIR-Modell zur mathematischen Behandlung von Epidemien	375
	Stichwortverzeichnis	383