

Auf einen Blick

Über den Autor	11
Einführung	23
Teil I: Analysis – ein Überblick	29
Kapitel 1: Was ist Analysis?	31
Kapitel 2: Die beiden wichtigsten Konzepte der Analysis: Differenziation und Integration	37
Kapitel 3: Warum die Analysis funktioniert	45
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	51
Kapitel 4: Überblick über Vor-Algebra und Algebra	53
Kapitel 5: Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen	73
Kapitel 6: Trigonometrie ist Trumpf!	93
Teil III: Grenzwerte	109
Kapitel 7: Grenzwerte und Stetigkeit	111
Kapitel 8: Grenzwerte auswerten	129
Teil IV: Differenziation	147
Kapitel 9: Differenziation – Orientierung	149
Kapitel 10: Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein!	171
Kapitel 11: Differenziation und die Form von Kurven	193
Kapitel 12: Problemlos glücklich: Der Differenziation sei Dank!	223
Teil V: Integration und unendliche Reihen	261
Kapitel 13: Integration und Flächenberechnung – ein Einstieg	263
Kapitel 14: Integration: Die Rückwärtsdifferenziation	291
Kapitel 15: Integrationstechniken für Profis	321
Kapitel 16: Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen	349
Kapitel 17: Unendliche Reihen	379
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	407
Kapitel 18: Zehn Dinge, die Sie sich unbedingt merken sollten	409
Kapitel 19: Noch zehn Dinge, die Sie nicht vergessen sollten	413
Stichwortverzeichnis	419





Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	11
Einführung	23
Über dieses Buch	23
Konventionen in diesem Buch	24
Wie Sie dieses Buch einsetzen	24
Törichte Annahmen über den Leser	25
Wie dieses Buch aufgebaut ist	25
Teil I: Analysis – ein Überblick	25
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	25
Teil III: Grenzwerte	26
Teil IV: Differenziation	26
Teil V: Integration und unendliche Reihen	26
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	27
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	27
Wie es weitergeht	27
 TEIL I	
ANALYSIS – EIN ÜBERBLICK	29
Kapitel 1	
Was ist Analysis?	31
Was Analysis nicht ist	31
Was also ist Analysis?	32
Beispiele für die Analysis aus der Praxis	34
 Kapitel 2	
Die beiden wichtigsten Konzepte der Analysis:	
Differenziation und Integration	37
Differenziation – Definition	37
Die Ableitung ist eine Steigung	37
Die Ableitung ist eine Änderungsrate	39
Und jetzt zur Integration	40
Unendliche Reihen	41
Divergierende Reihen	42
Konvergierende Reihen	42
 Kapitel 3	
Warum die Analysis funktioniert	45
Das Grenzwertkonzept: Ein mathematisches Mikroskop	45
Was passiert beim Vergrößern?	46
Zwei Warnungen – nur zur Vorsicht	49
Ich könnte meine Lizenz verlieren, Mathematik zu betreiben	49
Und was um alles in der Welt bedeutet »unendlich« eigentlich?	49



16 Inhaltsverzeichnis

TEIL II	
DIE VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE ANALYSIS.....	51
Kapitel 4	
Überblick über Vor-Algebra und Algebra.....	53
Was Sie über Brüche wissen sollten.....	53
Ein paar schnelle Regeln.....	54
Brüche multiplizieren.....	54
Brüche dividieren	54
Brüche addieren.....	55
Brüche subtrahieren	58
Brüche kürzen.....	58
Betrag (Absolutwert) – absolut einfach.....	60
Potenzen machen stark.....	61
Zu den Wurzeln der Wurzeln	62
Wurzeln, überall Wurzeln!.....	62
Wurzeln vereinfachen	63
Logarithmen ... wirklich keine Hexerei.....	64
Faktorisieren – wer braucht denn so was?.....	65
Den größten gemeinsamen Teiler herausziehen.....	65
Die Mustersuche	66
Faktorisierung quadratischer Polynome.....	67
Quadratische Gleichungen lösen.....	67
Methode 1: Faktorisieren.....	67
Methode 2: Die <i>abc</i> -Formel oder Mitternachtsformel	69
Methode 3: Quadratische Ergänzung	70
Kapitel 5	
Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen.....	73
Was ist eine Funktion?	73
Die definierende Eigenschaft einer Funktion.....	74
Unabhängige und abhängige Variablen.....	76
Funktionsnotation	77
Verkettete Funktionen.....	77
Wie sieht eine Funktion aus?	79
Allgemeine Funktionen und ihre Graphen.....	80
Geradeheraus – Geraden in der Ebene.....	80
Parabel- und Betragsfunktionen – gerade heraus.....	84
Einige ungerade Funktionen	85
Exponentialfunktionen.....	85
Logarithmusfunktionen.....	86
Inverse Funktionen.....	87
Schieben, spiegeln, dehnen, stauchen	88
Horizontale Transformationen	89
Vertikale Transformationen.....	90

Inhaltsverzeichnis 17

Kapitel 6	
Trigonometrie ist Trumpf!	93
Trigonometrie im Crashkurs	93
Zwei spezielle rechtwinklige Dreiecke	95
Das 45°-45°-90°-Dreieck	95
Das 30°-60°-90°-Dreieck	96
Im Einheitskreis gefangen!	97
Winkel im Einheitskreis	98
Winkel im Bogenmaß messen	98
Liebling, ich habe die Hypotenuse geschrumpft!	99
Und jetzt das Ganze zusammen	100
Sinus, Kosinus und Tangens zeichnen	102
Inverse trigonometrische Funktionen	104
Identifikation mit trigonometrischen Identitäten	107
 TEIL III	
GRENZWERTE	109
Kapitel 7	
Grenzwerte und Stetigkeit	111
Bis an die Grenzen – NEIN	111
Drei Funktionen erklären den Grenzwert	112
Einseitige Betrachtungen	115
Einseitige und zweiseitige Grenzwerte: Der Teil und das Ganze!	116
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	117
Grenzwerte im Unendlichen – haben Sie gute Schuhe an?	119
Die Momentangeschwindigkeit berechnen – mithilfe von Grenzwerten	119
Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen	122
Stetigkeit und Grenzwerte gehen normalerweise Hand in Hand	123
Die Ausnahme für ein Loch bringt die Wahrheit ans Licht	124
Drei Bedingungen für die Stetigkeit	126
Die 3333-Eselsbrücke für den Grenzwert	126
 Kapitel 8	
Grenzwerte auswerten	129
Einfache Grenzwerte	129
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	129
Grenzwerte geometrisch bestimmen	130
Einsetzen und Einkochen	131
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	132
Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen	132
Grenzwertaufgaben algebraisch lösen	134
Guten Appetit – mit einem Grenzwertsandwich	137
Grenzwerte bei unendlich auswerten	141
Grenzwerte im Unendlichen und horizontale Asymptoten	143
Grenzwerte im Unendlichen mit einem Taschenrechner lösen	144
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden	145



18 Inhaltsverzeichnis

TEIL IV	
DIFFERENZATION	147
Kapitel 9	
Differenziation – Orientierung	149
Differenziation: Such die Steigung!	150
Die Steigung einer Geraden	153
Die Ableitung einer Geraden	155
Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate	155
Analysis auf dem Spielplatz	155
Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate	157
Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung	158
Die Ableitung einer Kurve	158
Der Differenzenquotient	160
Durchschnittliche Änderungsrate und momentane Änderungsrate	167
Sein oder Nichtsein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	168
Kapitel 10	
Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein!... ..	171
Grundlegende Regeln der Differenziation	172
Die Konstantenregel	172
Die Potenzregel	172
Die Faktorregel	174
Die Summenregel – die kennen Sie schon	175
Die Differenzregel – macht kaum einen Unterschied	175
Trigonometrische Funktionen differenzieren	176
Exponential- und Logarithmusfunktionen differenzieren	176
Differenziationsregeln für Profis – Wir sind die Champions!	178
Die Produktregel	178
Die Quotientenregel	179
Die Kettenregel	181
Implizite Differenziation	186
Logarithmische Differenziation – der Rhythmus macht's	188
Inverse Funktionen differenzieren	189
Ableitungen höherer Ordnung – die Leiter hinabsteigen	191
Kapitel 11	
Differenziation und die Form von Kurven	193
Ein Ausflug mit der Analysisgruppe	193
Über die Berge und durch die Täler: Positive und negative Steigungen	194
Mir fällt einfach keine Reisetapher für diesen Abschnitt ein:	
Krümmung und Wendepunkte	195
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum	196
Ein atemberaubender Ausblick: Das absolute Maximum	196
Autopanne: Auf dem Gipfel hängen geblieben	196
Von nun an geht's bergab!	196
Ihr Reisetagebuch	197



Inhaltsverzeichnis 19

Extremwerte finden.....	198
Die kritischen Stellen herausleiern.....	198
Der Test der ersten Ableitung.....	200
Der Test der zweiten Ableitung – Tests, Tests, Tests!	202
Absolute Extremwerte für ein abgeschlossenes Intervall finden	205
Und wenn der Definitionsbereich kein abgeschlossenes Intervall ist?.....	208
Krümmung und Wendepunkte bestimmen	210
Die Graphen von Ableitungen – bis zum Abwinken	212
Der Mittelwertsatz – es bleibt einem nichts erspart!.....	215
Die Regel von L'Hôpital: Analysis für den Notfall.....	218
Nicht akzeptable Formen in Form bringen.....	219
Drei weitere nicht akzeptable Formen.....	220

Kapitel 12**Problemlos glücklich: Der Differenziation sei Dank! 223**

Wie Sie das meiste aus Ihrem Leben machen: Optimierungsprobleme.....	223
Das maximale Volumen einer Schachtel.....	224
Die maximale Fläche eines Weidezauns berechnen – Cowboys unter sich!.....	226
Husch, husch: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung	229
Geschwindigkeit und Tempo	231
Maximale und minimale Höhe	232
Positionsänderung, zurückgelegter Weg und Abstand	233
Gummigeruch und Bremsspuren: Beschleunigung und Abbremsen.....	235
Und jetzt alles zusammen.....	236
Voneinander abhängige Änderungsraten.....	237
Einen Ballon aufblasen.....	237
Einen Trog auffüllen	240
Schnallen Sie sich an: Wir nähern uns einer Analysiskreuzung.....	242
Tangenten und Normalen: Auf die Spitze getrieben.....	245
Die Aufgabenstellung mit der Tangente.....	245
Und jetzt zur Normale.....	247
Leichtes Spiel mit linearen Näherungen.....	250
Aufgabenstellungen aus der Geschäftswelt und aus der Wirtschaft.....	253
Verwaltung von Grenzkosten in der Wirtschaft.....	253

TEIL V**INTEGRATION UND UNENDLICHE REIHEN 261****Kapitel 13****Integration und Flächenberechnung – ein Einstieg 263**

Integration: Einfach eine seltsame Addition.....	263
Die Fläche unter einer Kurve bestimmen	266
Der Umgang mit negativen Flächen.....	269



20 Inhaltsverzeichnis

Flächen annähern	270
Flächen mithilfe linker Summen annähern	270
Flächen mithilfe rechter Summen annähern	273
Flächen mit Mittelpunktsummen annähern	275
Die Summennotation	277
Die Grundlagen summieren	278
Riemann-Summen in Sigma-Notation	278
Flächeninhalte mithilfe des bestimmten Integrals exakt bestimmen	282
Flächen annähern mit der Trapezregel und der Simpson-Regel	286
Die Trapezregel	287
Die Simpson-Regel – Thomas (1710–1761), nicht Homer (1987–)	289

Kapitel 14

Integration: Die Rückwärtsdifferenziation 291

Stammfunktionen suchen – die umgekehrte Differenziation	291
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	293
Die müßige Flächenfunktion	294
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	297
Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Teil 2	301
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 1	304
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 2	306
Warum der Hauptsatz funktioniert: Die Verbindung zwischen	
Integration und Differenziation	307
Stammfunktionen finden: Drei grundlegende Techniken	309
Umkehrregeln für Stammfunktionen	309
Raten und Prüfen	312
Die Substitutionsmethode	313
Flächen mithilfe der Substitutionsmethode bestimmen	318

Kapitel 15

Integrationstechniken für Profis 321

Teilweise (partielle) Integration: Teile und Herrsche!	321
Das u auswählen	325
Partielle Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	327
Alles im Kreis!	328
Tricks mit Trig-Integralen	330
Integrale mit Sinus und Kosinus	331
Integrale mit Sekans und Tangens	334
Integrale mit Kosekans und Kotangens	337
Ihr schlimmster Albtraum: Trigonometrische Substitution	337
1. Fall: Tangens	338
2. Fall: Sinus	341
3. Fall: Sekans	342
A , B und C in Teilbrüchen (Partialbrüchen)	343
1. Fall: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	344
2. Fall: Der Nenner enthält quadratische Faktoren ohne Nullstellen	345

Inhaltsverzeichnis 21

3. Fall: Der Nenner enthält mehrere gleiche lineare oder quadratische Faktoren.....	347
Bonusrunde: Koeffizientenvergleich	347

Kapitel 16**Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte****Probleme lösen 349**

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung und der Durchschnittswert.....	350
Die Fläche zwischen zwei Kurven – der doppelte Spaß	353
Die Volumen unregelmäßiger Körper ermitteln	357
Die Wurstscheibenmethode.....	357
Die Pfannkuchenstapelmethode	359
Die Stapel-Donuts-auf-den-sich-jemand-gesetzt-hat-Methode.....	360
Die Methode mit den Matroschkas	362
Bogenlängen analysieren	365
Drehoberflächen – entstehen durch Drehen!	367
Uneigentliche Integrale – am Verlauf zu erkennen	370
Vertikale Asymptoten	371
Uneigentliche Integrale mit einer oder zwei Integrationsgrenzen im Unendlichen	373
Und jetzt zu Gabriels Horn.....	375

Kapitel 17**Unendliche Reihen 379**

Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	380
Folgen aneinanderreihen.....	380
Reihen summieren.....	382
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!.....	385
Der einfachste Test auf Divergenz: Die Prüfung auf den n -ten Term.....	385
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz/Divergenz.....	387
Drei Vergleichstests für Konvergenz/Divergenz	390
Tests auf Quotienten und Wurzeln.....	396
Alternierende Reihen.....	399
Absolute oder bedingte Konvergenz bestimmen.....	399
Der Test mit den alternierenden Reihen	400
Nehmen Sie die Tests leicht.....	405

TEIL VI**DER TOP-TEN-TEIL 407****Kapitel 18****Zehn Dinge, die Sie sich unbedingt merken sollten 409**

Die drei binomischen Formeln.....	409
$\frac{0}{5} = 0$, aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert	409
$0/0$ ist nicht definiert	410



22 Inhaltsverzeichnis

$0 \cdot \infty$ ist nicht definiert.....	410
Irgendetwas ⁰ = 1	410
Die GAGA-HühnerHof-AG.....	410
Trigonometrische Werte für 30-, 45- und 60-Grad-Winkel.....	411
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	411
Die Produktregel.....	411
Die Quotientenregel.....	411

Kapitel 19

Noch zehn Dinge, die Sie nicht vergessen sollten 413

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ – falsch!.....	413
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ – falsch!.....	413
Steigung einer Geraden = $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ – falsch!.....	413
$\frac{3a + b}{3a + c} = \frac{b}{c}$ – falsch!.....	414
$e^{a+b} = e^a + e^b$ und $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$ – falsch!.....	414
$\frac{d}{da} x^3 = 3x^2$ – falsch!.....	414
Wenn k eine Konstante ist, dann ist $\frac{d}{dx} kx = k'x + kx'$ – na ja ...	414
Die Quotientenregel ist $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ – falsch!.....	415
$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ – falsch!.....	415
$\int (\sin x) dx = \cos x + C$ – falsch!.....	415

Stichwortverzeichnis 419