

|          |                                                                               |          |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                                             | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Theoretischer Hintergrund</b>                                              | <b>9</b> |
| 2.1      | Mathematische Argumente im Unterricht                                         | 10       |
| 2.1.1    | Begriffsklärung mathematische Argumente und<br>mathematische Argumentationen  | 10       |
| 2.1.2    | Aufbau von Argumenten nach dem Toulmin<br>Modell                              | 16       |
| 2.1.3    | Klassifizierungen von mathematischen<br>Argumenten in der Literatur           | 20       |
| 2.1.4    | Unterscheidungen von mathematischen<br>Argumenten in dieser Arbeit            | 27       |
| 2.1.5    | Relevanz für den Mathematikunterricht und<br>didaktische Implikationen        | 36       |
| 2.2      | Argumentationen als soziale Prozesse im<br>Mathematikunterricht               | 44       |
| 2.2.1    | Mathematische Argumentationen im Unterricht                                   | 45       |
| 2.2.2    | Interaktionen und typische Argumentationsmuster<br>im Mathematikunterricht    | 57       |
| 2.2.3    | Partizipation an mathematischen Argumentationen                               | 67       |
| 2.2.4    | Argumentationskompetenzen von Schülerinnen<br>und Schülern                    | 72       |
| 2.2.5    | Diskursivität und Negative Diskursivität beim<br>mathematischen Argumentieren | 78       |
| 2.3      | Rolle der Lehrkraft bei mathematischen Argumentationen                        | 83       |
| 2.3.1    | Die besondere Rolle der Lehrkraft                                             | 84       |

|          |                                                                                |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.2    | Einbindung von Schülerinnen und Schülern durch Lehrkräfte .....                | 87         |
| 2.3.3    | Unterstützungen von mathematischen Argumentationen .....                       | 90         |
| 2.3.4    | Vorstellungen von Lehrkräften zum mathematischen Argumentieren .....           | 100        |
| 2.4      | Argumentationen und Argumente im Übergang von der Arithmetik zur Algebra ..... | 106        |
| 2.4.1    | Der Übergang von der Arithmetik zur Algebra .....                              | 106        |
| 2.4.2    | Prozess-Produkt Dualität von algebraischer Symbolsprache .....                 | 109        |
| 2.4.3    | Weitere Hindernisse im Übergang von der Arithmetik zur Algebra .....           | 122        |
| 2.4.4    | Rolle der Lehrkraft beim Übergang .....                                        | 127        |
| 2.4.5    | Argumentationen im Übergang .....                                              | 131        |
| 2.4.6    | Mathematische Argumente im Übergang .....                                      | 138        |
| <b>3</b> | <b>Exkurs: Beschreibung der Lernumgebung .....</b>                             | <b>147</b> |
| 3.1      | Thematische Verortung der Lernumgebung .....                                   | 148        |
| 3.2      | Aufgabenkonstruktion .....                                                     | 154        |
| 3.2.1    | Aufgabencharakteristika .....                                                  | 154        |
| 3.2.2    | Strategisches Vorgehen beim mathematischen Argumentieren .....                 | 158        |
| 3.2.3    | Repräsentationen von Argumenten .....                                          | 161        |
| 3.3      | Beschreibung der Aufgaben .....                                                | 166        |
| 3.4      | Rolle der Lehrkraft .....                                                      | 172        |
| <b>4</b> | <b>Methodologie und Methoden .....</b>                                         | <b>177</b> |
| 4.1      | Ausdifferenzierung der Fragestellung .....                                     | 177        |
| 4.2      | Methodologische Überlegungen und Untersuchungsdesign .....                     | 180        |
| 4.2.1    | Eckdaten der empirischen Erhebung und der Datenanalyse .....                   | 185        |
| 4.2.2    | Fallstudie .....                                                               | 186        |
| 4.2.3    | Beschreibung der Stichprobe .....                                              | 187        |
| 4.3      | Interviews .....                                                               | 189        |
| 4.3.1    | Konstruktion der Interviewleitfäden .....                                      | 190        |
| 4.3.2    | Datenerhebung und Datenaufbereitung .....                                      | 198        |
| 4.3.3    | Datenauswertung .....                                                          | 199        |
| 4.3.4    | Güte und Qualitätssicherung .....                                              | 210        |

|          |                                                                                           |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4      | Unterrichtssituationen und ihre Auswertung .....                                          | 212        |
| 4.4.1    | Daten und Vorgehen bei der Datenerhebung .....                                            | 212        |
| 4.4.2    | Datenreduktion und Datenaufbereitung .....                                                | 213        |
| 4.4.3    | Datenauswertung – Übersicht .....                                                         | 214        |
| 4.4.4    | Datenauswertung – Rekonstruktion der<br>Handlungen der Lehrkräfte .....                   | 217        |
| 4.4.5    | Datenauswertung – Rekonstruktionen der<br>mathematischen Argumente .....                  | 235        |
| 4.4.6    | Datenauswertung – Rekonstruktion von<br>Handlungen der Lehrkräfte in den Argumenten ..... | 249        |
| 4.4.7    | Interpretationen der Rekonstruktionen .....                                               | 252        |
| 4.4.8    | Güte und Qualitätssicherung .....                                                         | 259        |
| <b>5</b> | <b>Vorstellungen der Lehrkräfte .....</b>                                                 | <b>261</b> |
| 5.1      | Vorstellungen von Frau Petrow (L1) .....                                                  | 262        |
| 5.1.1    | Mathematisches Argumentieren .....                                                        | 262        |
| 5.1.2    | Prozess-Produkt Dualität von algebraischer<br>Symbolsprache .....                         | 266        |
| 5.2      | Vorstellungen von Frau Kaiser (L2) .....                                                  | 268        |
| 5.2.1    | Mathematisches Argumentieren .....                                                        | 269        |
| 5.2.2    | Prozess-Produkt Dualität von algebraischer<br>Symbolsprache .....                         | 273        |
| 5.3      | Vorstellungen von Herrn Peters (L3) .....                                                 | 276        |
| 5.3.1    | Mathematisches Argumentieren .....                                                        | 276        |
| 5.3.2    | Prozess-Produkt Dualität von algebraischer<br>Symbolsprache .....                         | 281        |
| 5.4      | Vergleich zwischen den Lehrkräften .....                                                  | 284        |
| 5.4.1    | Mathematisches Argumentieren .....                                                        | 284        |
| 5.4.2    | Prozess-Produkt Dualität von algebraischer<br>Symbolsprache .....                         | 290        |
| 5.5      | Zusammenfassung und Diskussion .....                                                      | 293        |
| <b>6</b> | <b>Handlungen von Lehrkräften in mathematischen<br/>Argumentationsprozessen .....</b>     | <b>295</b> |
| 6.1      | Derangierende Handlungen .....                                                            | 297        |
| 6.2      | Meta Handlungen .....                                                                     | 305        |
| 6.3      | Schülerinnen und Schüler Handlungen .....                                                 | 311        |
| 6.4      | Einfluss von Interaktionen .....                                                          | 318        |
| 6.5      | Zusammenfassung und Zwischenfazit .....                                                   | 325        |

|          |                                                                                                                                                    |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7</b> | <b>Mathematische Argumente im Übergang von der Arithmetik zur Algebra</b>                                                                          | <b>329</b> |
| 7.1      | Aufbau und Struktur der hervorgebrachten mathematischen Argumente                                                                                  | 331        |
| 7.2      | Empirische Argumente im Übergang von der Arithmetik zur Algebra                                                                                    | 337        |
| 7.2.1    | Übersicht: Charakteristika von empirischen Argumenten                                                                                              | 338        |
| 7.2.2    | Ausführliche Beschreibung mit illustrierenden Beispielen                                                                                           | 339        |
| 7.3      | Generische Argumente im Übergang von der Arithmetik zur Algebra                                                                                    | 345        |
| 7.3.1    | Übersicht: Charakteristika von generischen Argumenten                                                                                              | 345        |
| 7.3.2    | Ausführliche Beschreibung mit illustrierenden Beispielen                                                                                           | 347        |
| 7.4      | Strukturelle Argumente im Übergang von der Arithmetik zur Algebra                                                                                  | 361        |
| 7.4.1    | Übersicht: Charakteristika von strukturellen Argumenten                                                                                            | 361        |
| 7.4.2    | Ausführliche Beschreibung mit illustrierenden Beispielen                                                                                           | 362        |
| 7.5      | Zusammenfassung                                                                                                                                    | 378        |
| <b>8</b> | <b>Rolle der Prozess-Produkt Dualität von mathematischen Objekten beim mathematischen Argumentieren im Übergang von der Arithmetik zur Algebra</b> | <b>383</b> |
| 8.1      | Prozess-Produkt Dualität in mathematischen Argumenten                                                                                              | 385        |
| 8.1.1    | Prozess-Produkt Dualität in empirischen Argumenten                                                                                                 | 386        |
| 8.1.2    | Prozess-Produkt Dualität in generischen Argumenten                                                                                                 | 391        |
| 8.1.3    | Prozess-Produkt Dualität in strukturellen Argumenten                                                                                               | 401        |
| 8.2      | Prozess-Produkt Dualität bei Entwicklungen von mathematischen Argumenten                                                                           | 410        |
| 8.2.1    | Entwicklung von Vermutungen                                                                                                                        | 411        |

|           |                                                                                                         |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.2.2     | Entwicklung von Begründungen und<br>Generalisierungen .....                                             | 415        |
| 8.3       | Zusammenfassende Betrachtung .....                                                                      | 426        |
| <b>9</b>  | <b>Diskussion zum mathematischen Argumentieren im<br/>Übergang von der Arithmetik zur Algebra .....</b> | <b>429</b> |
| 9.1       | Vorstellungen der beteiligten Lehrkräfte .....                                                          | 429        |
| 9.2       | Handlungen der Lehrkräfte in mathematischen<br>Argumentationen .....                                    | 431        |
| 9.3       | Rahmungen mathematischer Argumente durch Lehrkräfte ....                                                | 437        |
| 9.4       | Prozess-Produkt Dualität beim mathematischen<br>Argumentieren .....                                     | 443        |
| 9.5       | Mögliche Einschränkungen der Studie .....                                                               | 447        |
| <b>10</b> | <b>Fazit und Ausblick .....</b>                                                                         | <b>451</b> |
| 10.1      | Beitrag zur Mathematikdidaktik .....                                                                    | 452        |
| 10.2      | Folgerungen für die mathematikdidaktische Forschung<br>und Forschungsdesiderate .....                   | 457        |
| 10.3      | Folgerungen für den Mathematikunterricht .....                                                          | 462        |
|           | <b>Literaturverzeichnis .....</b>                                                                       | <b>465</b> |