

# Inhalt

<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>I      <b>Zentrale Grundbegriffe</b></b>	<b>17</b>
1      Rundungsfehler, Kondition und Stabilität . . . . .	17
2      Vektor- und Matrixnormen . . . . .	26
<b>Algebraische Gleichungen</b>	<b>39</b>
<b>II     <b>Lineare Gleichungssysteme</b></b>	<b>41</b>
3      Ein Beispiel aus der Mechanik . . . . .	41
4      Die <i>LR</i> -Zerlegung . . . . .	46
5      Die Cholesky-Zerlegung . . . . .	59
6      Toeplitz-Systeme . . . . .	64
7      Der Banachsche Fixpunktsatz . . . . .	73
8      Drei einfache Iterationsverfahren . . . . .	77
9      Das Verfahren der konjugierten Gradienten . . . . .	85
10     Präkonditionierung . . . . .	96
<b>III    <b>Lineare Ausgleichsrechnung</b></b>	<b>107</b>
11     Die Gaußschen Normalengleichungen . . . . .	107
12     Singularwertzerlegung und Pseudoinverse . . . . .	111
13     Die <i>QR</i> -Zerlegung . . . . .	119
14     Givens-Rotationen . . . . .	128
15     Ein CG-Verfahren für das Ausgleichsproblem . . . . .	133
16     Das GMRES-Verfahren . . . . .	137

<b>IV</b>	<b>Nichtlineare Gleichungen</b>	<b>149</b>
17	Konvergenzbegriffe . . . . .	149
18	Nullstellenbestimmung reeller Funktionen . . . . .	158
19	Das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	172
20	Das nichtlineare Ausgleichsproblem . . . . .	177
21	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren . . . . .	185
<b>V</b>	<b>Eigenwerte</b>	<b>199</b>
22	Wozu werden Eigenwerte berechnet? . . . . .	199
23	Eigenwerteinschließungen . . . . .	204
24	Kondition des Eigenwertproblems . . . . .	212
25	Die Potenzmethode . . . . .	218
26	Das $QR$ -Verfahren . . . . .	227
27	Implementierung des $QR$ -Verfahrens . . . . .	232
28	Das Jacobi-Verfahren . . . . .	238
29	Spezielle Verfahren für hermitesche Tridiagonalmatrizen . . . . .	245
30	Das Lanczos-Verfahren . . . . .	259
	<b>Interpolation und Approximation</b>	<b>273</b>
<b>VI</b>	<b>Orthogonalpolynome</b>	<b>275</b>
31	Innenprodukträume, Orthonormalbasen und Gramsche Matrizen	275
32	Tschebyscheff-Polynome . . . . .	284
33	Allgemeine Orthogonalpolynome . . . . .	288
34	Nullstellen von Orthogonalpolynomen . . . . .	293
35	Anwendungen in der numerischen linearen Algebra . . . . .	297
<b>VII</b>	<b>Numerische Quadratur</b>	<b>317</b>
36	Die Trapezformel . . . . .	317
37	Polynominterpolation . . . . .	321
38	Newton-Cotes-Formeln . . . . .	324
39	Das Romberg-Verfahren . . . . .	328
40	Gauß-Quadratur . . . . .	336

41	Gauß-Legendre-Formeln . . . . .	341
42	Ein adaptives Quadraturverfahren . . . . .	348
<b>VIII</b>	<b>Splines</b>	<b>355</b>
43	Treppenfunktionen . . . . .	355
44	Lineare Splines . . . . .	357
45	Fehlerabschätzungen für lineare Splines . . . . .	360
46	Kubische Splines . . . . .	364
47	Fehlerabschätzung für kubische Splines . . . . .	372
48	Geglättete kubische Splines . . . . .	375
49	Numerische Differentiation . . . . .	380
<b>IX</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>389</b>
50	Trigonometrische Polynome . . . . .	389
51	Sobolevräume . . . . .	393
52	Trigonometrische Interpolation . . . . .	398
53	Schnelle Fouriertransformation . . . . .	405
54	Zirkulante Matrizen . . . . .	412
55	Symmetrische Transformationen . . . . .	417
<b>X</b>	<b>Multiskalenbasen</b>	<b>433</b>
56	Das Haar-Wavelet . . . . .	433
57	Semiorthogonale Spline-Wavelets . . . . .	442
58	Biorthogonale Spline-Wavelets . . . . .	449
59	Ein Anwendungsbeispiel . . . . .	453
	<b>Mathematische Modellierung</b>	<b>463</b>
<b>XI</b>	<b>Dynamik</b>	<b>465</b>
60	Populationsmodelle . . . . .	465
61	Ein Modell für Aids . . . . .	471
62	Chemische Reaktionskinetik . . . . .	475
63	Mehrkörpersysteme . . . . .	478

64	Elektrische Schaltkreise . . . . .	487
<b>XII</b>	<b>Erhaltungsgleichungen</b>	<b>495</b>
65	Integrale und differentielle Erhaltungsform . . . . .	495
66	Chromatographie . . . . .	499
67	Strömungsmechanik . . . . .	504
68	Schallwellen . . . . .	511
<b>XIII</b>	<b>Diffusionsprozesse</b>	<b>517</b>
69	Brownsche Bewegung und Diffusion . . . . .	517
70	Diffusion im Kraftfeld . . . . .	524
71	Kontinuumsmechanik . . . . .	531
72	Finanzmathematik . . . . .	537
	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>549</b>
<b>XIV</b>	<b>Anfangswertprobleme</b>	<b>551</b>
73	Lösungstheorie . . . . .	551
74	Das Euler-Verfahren . . . . .	557
75	Das implizite Euler-Verfahren . . . . .	560
76	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	565
77	Stabilitätstheorie . . . . .	578
78	Gauß-Verfahren . . . . .	587
79	Radau-IIA-Verfahren . . . . .	596
80	Rosenbrock-Typ-Verfahren . . . . .	601
81	Schrittweitensteuerung . . . . .	607
82	Differential-algebraische Gleichungen . . . . .	615
<b>XV</b>	<b>Randwertprobleme</b>	<b>629</b>
83	Differenzenverfahren . . . . .	629
84	Stabilitätsabschätzungen . . . . .	636
85	Singulär gestörte Probleme . . . . .	640
86	Adaptive Gitterverfeinerung . . . . .	645

87 Das Schießverfahren . . . . . 651  
 88 Optimierungsrandwertaufgaben . . . . . 657

**Partielle Differentialgleichungen 667**

**XVI Elliptische Differentialgleichungen 669**

89 Schwache Lösungen . . . . . 669  
 90 Das Galerkin-Verfahren . . . . . 678  
 91 Finite Elemente . . . . . 683  
 92 Fehlerschranken für die Finite-Elemente-Methode . . . . . 690  
 93 Die Steifigkeitsmatrix . . . . . 692  
 94 Schnelle direkte Löser . . . . . 702  
 95 Mehrgitterverfahren . . . . . 706  
 96 Ein Fehlerschätzer . . . . . 714

**XVII Parabolische Differentialgleichungen 723**

97 Schwache Lösungen und Regularität . . . . . 723  
 98 Die Linienmethode . . . . . 727  
 99 Das Crank-Nicolson-Verfahren . . . . . 733  
 100 Maximumprinzipien . . . . . 737  
 101 Verfahren höherer Ordnung . . . . . 743  
 102 Eine quasilineare Diffusionsgleichung . . . . . 754  
 103 Schrittweitensteuerung und adaptive Gitter . . . . . 761

**XVIII Hyperbolische Erhaltungsgleichungen 769**

104 Die Transportgleichung . . . . . 769  
 105 Die Methode der Charakteristiken . . . . . 776  
 106 Schwache Lösungen und der Begriff der Entropie . . . . . 780  
 107 Das Godunov-Verfahren . . . . . 787  
 108 Differenzenverfahren in Erhaltungsform . . . . . 794  
 109 Eine Ortsdiskretisierung höherer Ordnung . . . . . 799  
 110 Zeitintegration des MUSCL-Schemas . . . . . 805  
 111 Systeme von Erhaltungsgleichungen . . . . . 811

**Literaturverzeichnis**

**823**

**Sachverzeichnis**

**829**