

# Inhalt

<b>0</b>	<b>Lineare Geometrie im <math>n</math>-dimensionalen reellen Raum</b>	<b>1</b>
0.1	Der $n$ -dimensionale reelle Raum	1
0.1.1	Zahlen	1
0.1.2	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$	7
0.1.3	Multiplikation von Vektoren	11
0.2	Geraden	12
0.2.1	Ausblick	12
0.2.2	Geraden im $\mathbb{R}^n$	12
0.2.3	Geraden in der Ebene	16
0.3	Abstände und Winkel	20
0.3.1	Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$	20
0.3.2	Anwendungen in der Elementargeometrie	22
0.3.3	Winkel im $\mathbb{R}^n$	26
0.3.4	Senkrechte Vektoren und Abstände	33
0.3.5	Die HESSEsche Normalform einer Geradengleichung	35
0.3.6	Lineare Unabhängigkeit	38
0.3.7	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$	41
0.3.8	Abstand von Geraden	46
0.4	Ebenen	51
0.4.1	Ebenen im $\mathbb{R}^n$	51
0.4.2	Ebenen im $\mathbb{R}^3$	55
0.4.3	Abstand eines Punktes von einer Ebene	59
0.4.4	Das Spatprodukt	61
0.5	Lineare Gleichungssysteme	64
0.5.1	Zwei Geraden in der Ebene	64
0.5.2	Beschreibung durch Matrizen	66
0.5.3	Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform	67
0.5.4	Das GAUSSsche Eliminationsverfahren	73
0.5.5	Wahl der Pivots und Rundungsfehler	77

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>81</b>
1.1	Mengen, Relationen, Abbildungen . . . . .	81
1.1.1	Mengen und Teilmengen . . . . .	81
1.1.2	Operationen mit Mengen . . . . .	83
1.1.3	Abbildungen . . . . .	85
1.1.4	Abzählbare Mengen* . . . . .	89
1.1.5	Äquivalenzrelationen* . . . . .	93
1.2	Halbgruppen und Gruppen . . . . .	98
1.2.1	Die natürlichen Zahlen* . . . . .	98
1.2.2	Verknüpfungen und Halbgruppen . . . . .	103
1.2.3	Gruppen . . . . .	105
1.2.4	Die ganzen Zahlen als additive Gruppe* . . . . .	108
1.2.5	Untergruppen und Homomorphismen . . . . .	112
1.3	Ringe und Körper . . . . .	114
1.3.1	Die ganzen Zahlen als Ring* . . . . .	114
1.3.2	Der Körper der rationalen Zahlen . . . . .	119
1.3.3	Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen* . . . . .	126
1.3.4	Konstruktion der reellen Zahlen* . . . . .	130
1.3.5	Reelle Zahlen als Dezimalbrüche* . . . . .	138
1.3.6	Komplexe Zahlen . . . . .	143
1.3.7	Endliche Körper* . . . . .	149
1.3.8	Rückblick und Ausblick . . . . .	155
1.4	Polynome* . . . . .	157
1.4.1	Polynome und Polynomfunktionen . . . . .	157
1.4.2	Der Ring der Polynome . . . . .	158
1.4.3	Division mit Rest . . . . .	160
1.4.4	Nullstellen von Polynomen . . . . .	161
1.4.5	Eine Vorzeichenregel für reelle Polynome . . . . .	165
1.4.6	Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	167
<b>2</b>	<b>Vektorräume und lineare Abbildungen</b>	<b>173</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	174
2.1.1	Vektorräume . . . . .	174
2.1.2	Untervektorräume . . . . .	177
2.1.3	Operationen mit Untervektorräumen . . . . .	178
2.1.4	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	181
2.2	Basis und Dimension . . . . .	188
2.2.1	Erzeugendensysteme und Basen . . . . .	188
2.2.2	Dimension eines Vektorraums . . . . .	191
2.2.3	Charakterisierungen einer Basis . . . . .	196
2.2.4	Praktische Verfahren zur Bestimmung einer Basis . . . . .	199
2.2.5	Summen und direkte Summen . . . . .	203
2.2.6	Der Rang einer Matrix . . . . .	210

2.3	Lineare Abbildungen . . . . .	216
2.3.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	216
2.3.2	Elementare Eigenschaften linearer Abbildungen . . . . .	220
2.3.3	Spezielle lineare Abbildungen . . . . .	223
2.3.4	Eine Dimensionsformel für lineare Abbildungen . . . . .	227
2.3.5	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	229
2.3.6	Quotientenvektorräume* . . . . .	234
2.4	Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	240
2.4.1	Erzeugung linearer Abbildungen . . . . .	240
2.4.2	Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung . . . . .	242
2.4.3	Multiplikation von Matrizen . . . . .	247
2.4.4	Rechenregeln für Matrizen . . . . .	251
2.4.5	Die allgemeine lineare Gruppe . . . . .	255
2.4.6	Elementarmatrizen . . . . .	257
2.4.7	Lineare Gleichungssysteme und Elementarmatrizen* . . . . .	264
2.4.8	Die LR-Zerlegung* . . . . .	265
2.4.9	Dualität* . . . . .	268
2.5	Transformationen . . . . .	271
2.5.1	Basistransformationen und Koordinatentransformationen . . . . .	271
2.5.2	Transformationsformel für lineare Abbildungen . . . . .	274
2.5.3	Eine Normalform für darstellende Matrizen . . . . .	276
<b>3</b>	<b>Determinanten</b> . . . . .	<b>281</b>
3.1	Motivation . . . . .	281
3.1.1	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	281
3.1.2	Flächeninhalt und Orientierung . . . . .	282
3.2	Berechnung von Determinanten . . . . .	287
3.2.1	Axiome für Determinanten . . . . .	287
3.2.2	Weitere Eigenschaften der Determinante . . . . .	290
3.2.3	Permutationen . . . . .	298
3.2.4	Die alternierende Gruppe . . . . .	304
3.2.5	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	305
3.3	Minoren . . . . .	311
3.3.1	Die komplementäre Matrix . . . . .	311
3.3.2	LAPLACE-Entwicklung . . . . .	313
3.3.3	Die CRAMERSche Regel . . . . .	314
<b>4</b>	<b>Eigenwerte</b> . . . . .	<b>315</b>
4.1	Grundbegriffe . . . . .	315
4.1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	315
4.1.2	Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$ . . . . .	318
4.1.3	Differentialgleichungen* . . . . .	320
4.1.4	Das charakteristische Polynom . . . . .	325

4.2	Diagonalisierung und Trigonalisierung . . . . .	329
4.2.1	Diagonalisierbarkeit . . . . .	329
4.2.2	Geometrische und algebraische Vielfachheit . . . . .	331
4.2.3	Rechenverfahren zur Diagonalisierung . . . . .	335
4.2.4	Trigonalisierung* . . . . .	337
4.2.5	Zerlegung in Haupträume* . . . . .	343
4.2.6	Nilpotente Endomorphismen* . . . . .	349
4.2.7	Die JORDANSche Normalform* . . . . .	356
4.2.8	Gedämpfte Schwingungen* . . . . .	358
<b>5</b>	<b>Bilineare Algebra und Geometrie</b>	<b>363</b>
5.1	Kegelschnitte* . . . . .	363
5.1.1	Die Gleichungen der ebenen Schnitte eines Kreiskegels . . . . .	363
5.1.2	Geometrische Eigenschaften der Kegelschnitte* . . . . .	366
5.1.3	Kegelschnitte durch vorgegebene Punkte* . . . . .	370
5.1.4	Pol und Polare* . . . . .	377
5.2	Bilinearformen . . . . .	380
5.2.1	Definitionen und beschreibende Matrix . . . . .	380
5.2.2	Transformationsformel für darstellende Matrizen . . . . .	383
5.2.3	Entartung und Rang einer Bilinearform . . . . .	384
5.2.4	Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform . . . . .	385
5.2.5	Das Trägheitsgesetz von SYLVESTER* . . . . .	390
5.2.6	Exkurs über affine Geometrie* . . . . .	393
5.2.7	Quadriken* . . . . .	396
5.3	Euklidische und unitäre Vektorräume . . . . .	409
5.3.1	Hermiteische Formen . . . . .	409
5.3.2	Definitheit . . . . .	410
5.3.3	Orthogonalität . . . . .	418
5.3.4	QR-Zerlegung und Methode der kleinsten Quadrate* . . . . .	424
5.3.5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . . .	429
5.3.6	Die Gruppe $SO(3)$ * . . . . .	435
5.3.7	Selbstadjungierte Endomorphismen . . . . .	442
5.3.8	Hauptachsentransformation von Quadriken* . . . . .	447
5.3.9	Der Trägheitstensor* . . . . .	458
5.3.10	Ausblick . . . . .	466
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>469</b>
	<b>Index</b>	<b>471</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>473</b>