

Hans Niels Jahnke (Hrsg.)

Geschichte der Analysis

unter Mitarbeit von Sibylle Ohly

mit Beiträgen von Thomas Archibald, Umberto Bottazzini,
Moritz Epple, Craig Fraser, Niccolò Guicciardini,
Thomas Hochkirchen, Hans Niels Jahnke, Jesper Lützen,
Jan van Maanen, Marco Panza,
Reinhard Siegmund-Schultze, Rüdiger Thiele

Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg • Berlin

Inhalt

tung	1
Antike	5
1.1 Der Anteil der griechischen Mathematik an der Herausbildung der Analysis	5
1.1.1 Der Gegenstand	5
1.1.2 Über Analysis und Synthesis	6
1.1.3 Zur Interpretation	7
1.2 Der griechische Zahl- und Größenbegriff	8
1.2.1 Die Zahl als mathematisches Objekt	8
1.2.2 Die Arten der Zahlen	9
1.2.3 Zahlverhältnisse („Brüche“)	10
1.2.4 Der Begriff der Größe	11
1.2.5 Verhältnisse von Größen („reelle Zahlen“)	13
1.2.6 Andere Auffassungen	18
1.3 Quadraturprobleme: Beispiel Kreis	19
1.3.1 Vorgeschichte	19
1.3.2 Die Mönchen des Hippokrates	20
1.3.3 Stetigkeitsüberlegungen	22
1.3.4 Exhaustionsmethode	23
1.3.5 Reismessung des Archimedes	25
1.4 Archimedes' Beiträge zur Infinitesimalmathematik	26
1.4.1 Das Leben	26
1.4.2 Das Werk	26
1.4.3 Die mechanische Methode	28
1.4.4 Die mathematische Rechtfertigung	31
1.4.5 Hatte Archimedes einen Integralbegriff?	33
1.4.6 Zur Wirkungsgeschichte	35
1.5 Der antike Kurvenbegriff	36

1.5.1	Einteilung	36
1.5.2	Beispiel: Quadratrix	36
1.5.3	Tangenten	39
1.6	Philosophische Reflexionen über das unendlich Kleine	3 [^]
Vorläufer der Differential- und Integralrechnung		43
2.1	Motivationen	43
2.2	Die Analyse von Kurven in der Geome?na-Ausgabe von 1659	44
2.2.1	Descartes verbindet Geometrie und Algebra (1637)	44
2.2.2	Desartes über die Normale der Ellipse	47
2.2.3	Van Schooten über die Normalen-Methode	51
2.2.4	Die Ellipse: Übersetzung ins Lateinische	52
2.2.5	Die Ellipse: Bedeutung des Textes	53
2.2.6	Die Ellipse: weitere Untersuchungen	53
2.2.7	Huddes Regel	55
2.2.8	Exkurs: Fermat	59
2.2.9	Extremwerte	62
2.2.10	Exkurs: die Zykloide und eine kinematische Methode zur Konstruktion von Tangenten	64
2.2.11	Vorläufer der Differentiation: Schlußbemerkungen und weitere Lektüre	66
2.3	Vorformen der Integration in den Briefwechseln von Huygens und Sluse (1658)	66
2.3.1	Die Kissoide von Diokles bis 1650	67
2.3.2	Exkurs: Torricellis Trompete	69
2.3.3	Sluse und Huygens. Sluse dreht die Kissoide	72
2.3.4	Exkurs: Keplers Apfel	74
2.3.5	Huygens quadriert die Kissoide	76
2.3.6	Exkurs: Wallis' <i>arithmetica infinitorum</i>	80
2.3.7	Sluses Überraschung	84
2.3.8	Schlußfolgerungen	85
2.4	Barrow ahnt den 'Hauptsatz'	86
Newtons <i>Methode</i> und Leibniz' <i>Kalkül</i>		89
3.1	Einleitung	89
3.2	Newtons Reihen- und Fluxionenmethode	90
3.2.1	Ein isoliert arbeitender Mathematiker	90
3.2.2	Die binomische Reihe (1664 bis 1665)	92
3.2.3	Der Hauptsatz (1665 bis 1669)	94

3.2.4	Die Methode der Fludenten, Fluxionen und Momente (1670 bis 1671)	96
3.2.5	Die Geometrie der ersten und letzten Verhältnisse (1671 bis 1704)	102
3.2.6	Fluxionen höherer Ordnung und die Taylor-Reihe (1687 bis 1692)	105
3.3	Leibniz' Differential- und Integralrechnung	106
3.3.1	Ein Mathematiker und Diplomat	106
3.3.2	Unendliche Reihen (1672 bis 1673)	107
3.3.3	Die Geometrie der unendlich kleinen Größen (1673 bis 1674)	109
3.3.4	Der Kalkül der Infinitesimalen (1675 bis 1686)	112
3.4	Die Mathematisierung des Kraftbegriffs	117
3.5	Newton <i>versus</i> Leibniz	122
3.5.1	„Nicht äquivalent in der Praxis“	122
3.5.2	Das Problem der Grundlagen	124
3.5.3	Die zwei Algorithmen: Methode <i>versus</i> Kalkül	127
3.5.4	Die Rolle der Geometrie	129
4	Die algebraische Analysis des 18. Jahrhunderts	131
4.1	Grundbegriffe, Probleme, Personen	131
4.2	Das Beispiel der Kettenlinie	136
4.3	Taylors Satz	139
4.4	Der analytische Funktionsbegriff	142
4.4.1	Eulers <i>Introductio</i> (1748)	142
4.4.2	Die elementaren transzendenten Funktionen	144
4.4.3	Die Kontroverse um die Logarithmen negativer Zahlen	147
4.5	Das Rechnen mit Reihen	149
4.5.1	Die Reihe der reziproken Quadratzahlen	150
4.5.2	Das Problem der Reihenumkehr	152
4.5.3	Konvergenz und Divergenz	153
4.6	Die Grenzen des analytischen Funktionsbegriffs	157
4.7	Lagranges algebraische Begründung der Analysis	163
4.8	Die Allgemeinheit der Algebra	168
5	Die Entstehung der analytischen Mechanik im 18. Jahrhundert	171
5.1	Das Prinzip der kleinsten Wirkung: Maupertuis, Euler und Lagrange (1740 - 1761)	172

5.2	Lagranges <i>Mecanique analytique</i>	183
5.2.1	Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten	183
5.2.2	Die Mechanik in Lagranges <i>Theorie des fonctions analytiques</i>	186

Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert 191

6.1	Einleitung	191
6.2	Der Funktionsbegriff	193
6.3	Cauchy und der <i>Cours d'Analyse</i>	198
6.3.1	Variablen und Grenzwerte	201
6.3.2	Unendlich kleine Zahlgrößen	203
6.3.3	Stetigkeit	205
6.3.4	Summe einer Reihe	208
6.3.5	Ableitung	211
6.3.6	Integral	212
6.3.7	Funktionalgleichungen und der binomische Lehrsatz	216
6.4	Gauß, Bolzano und Abel	218
6.4.1	Gauß	218
6.4.2	Bolzano	219
6.4.3	Abel	222
6.5	Konvergenz von Fourier-Reihen	225
6.6	Cauchys Theorem und die gleichmäßige Konvergenz	230
6.7	Weierstraß	234
6.8	Pathologische Funktionen und der neue Stil in der Analysis	238
6.9	Verbreitung und Akzeptanz der Strenge in der Analysis	240
6.10	Die Befreiung von den Fesseln der Strenge	242

Randwertprobleme der mathematischen Physik 245

7.1	Analysis und Physik um 1800	245
7.1.1	Fernwirkungskräfte und Potentiale	246
7.1.2	Fourier: Wärmeleitung und Trennung der Variablen	248
7.1.3	Von Laplace und Fourier beeinflusst: Poisson und Ohm	251
7.2	Green, Gauß und Dirichlet: Fortschritte bei den Randwertproblemen	252
7.2.1	Greens Abhandlung	253
7.2.1.1	Biographische Notiz: George Green	253
7.2.1.2	Die Entdeckung der Greenschen Funktionen	254

7.2.2	Die <i>Allgemeinen Lehrsätze</i> von Gauß und der Divergenzsatz	258
7.2.2.1	Biographische Notiz: Carl Friedrich Gauß	258
7.2.2.2	Die <i>Allgemeinen Lehrsätze</i>	259
7.2.3	Der Satz von Stokes	261
7.2.4	Diiichlets Vorlesungen: Existenztheorie und die Klassifikation der Probleme	262
7.3	Einige spätere Entwicklungen	264
7.3.1	Riemann und die Methode der Greenschen Funktionen	264
7.3.2	O. Holder, C. Neumann und H. A. Schwarz	265
7.4	Schlußbemerkung	266
8	Die Theorie der komplexen Funktionen, 1780 - 1900	267
8.1	Einführung	267
8.2	„Der Übergang vom Realen zum Imaginären“	269
8.3	Komplexe Funktionen und Integralsatz	276
8.4	Integralformel und <i>calcul des limites</i>	284
8.5	Die Entstehung der <i>Französischen Schule</i>	288
8.6	Riemanns Theorie der komplexen Funktionen	295
8.7	Riemanns weitere Forschungen	303
8.8	Der Einfluß von Riemanns Ideen	312
8.9	Weierstraß' frühe Aufsätze	315
8.10	Weierstraß' Funktionenlehre	319
9	Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesgue	329
9.1	Zur Vorgeschichte des Riemann-Integrals	330
9.2	Riemanns Integral	332
9.3	Auseinandersetzungen	337
9.3.1	Hermann Hankel und Gaston Darboux	337
9.3.2	Das Problem der gleichmäßigen Konvergenz	345
9.3.3	Mehrdimensionale Integration	348
9.4	Integration im Umbruch: C. Jordan	350
9.5	Die Entwicklung der Maßtheorie	353
9.5.1	Verwirrungen	353
9.5.2	Die Entdeckung nirgends dichter Mengen mit „Inhalt“ und erste Ansätze zu einer Theorie der (äußeren) Maße	354

9.5.3	Boreis Maße	359
9.6	Quergedacht: Lebesgues Integral	362
10	Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860-1910	371
10.1	Konstruktionen der reellen Zahlen	372
10.1.1	Hankels Zahlen	374
10.1.2	Weierstraß' Zahlen	376
10.1.3	Dedekinds Zahlen	378
10.1.4	Heines und Cantors Zahlen	381
10.1.5	Thomaes Zahlen	384
10.1.6	Freges Zahlen	385
10.1.7	Zusammenfassung	387
10.2	Die Entstehung der Mengenlehre	388
10.2.1	Von trigonometrischen Reihen zu Punktmengen	389
10.2.2	Von Punktmengen zu transfiniten Zahlen	393
10.2.3	Philosophie des Unendlichen	395
10.2.4	Der Begriff des Kontinuums	397
10.2.5	Die Wissenschaft von e	398
10.3	Die axiomatische Methode	400
10.3.1	Huberts Zahlen	401
10.3.2	Die Axiomatisierung der Mengenlehre	404
10.3.3	Konsens oder Dissens?	407
11	Differentialgleichungen: Ein historischer Überblick bis etwa 1900	411
11.1	Einführung	411
11.2	Von den Ursprüngen des Kalküls bis zum späten 18. Jahrhundert	412
11.2.1	Newton	412
11.2.2	Leibniz und die Brüder Bernoulli: Inverse Tangentenaufgaben und frühe Lösungsmethoden	413
11.2.3	Weitere Lösungsverfahren	420
11.2.4	Lineare Gleichungen im 18. Jahrhundert: Integrierende Faktoren, Exaktheitskriterien und singuläre Lösungen	421
11.2.5	Mechanik, Physik und partielle Differentialgleichungen	426
11.3	Von der Französischen Revolution bis etwa 1900	431
11.3.1	Differentialgleichungen im 19. Jahrhundert	431
11.3.2	Cauchy: Existenzsätze und der <i>calcul des limites</i>	432

11.3.3	Die Sturm-Liouville-Theorie und die Integration in endlichen Ausdrücken	436
11.3.4	Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung: Pfaff und Jacobi	439
11.3.5	Die Anwendung der Weierstraßschen Methoden auf Differentialgleichungen	440
11.3.6	Die Lipschitz-Bedingung	441
11.3.7	Sonja Kovalewskaja	442
11.3.8	Picards Existenztheorie	444
11.3.9	Neue Orientierung: Lie und Poincare	446
12	Die Genese der Variationsrechnung	449
12.1	Einleitung	449
12.2	Die Vorgeschichte	451
12.3	Die Bernoullis, Taylor und Euler	452
12.4	Lagrange	457
12.5	Legendre	460
12.6	Jacobi	462
12.6.1	Jacobi und seine „Schule“	462
12.6.2	Jacobis Abhandlung von 1837	463
12.7	Mayer	467
12.8	Erdmann	469
12.9	Weierstraß	471
12.9.1	Die Vorlesungen von Weierstraß	All
12.9.2	Die Weierstraßsche Exzeßfunktion	473
12.9.3	Der Feldbegriff	476
12.10	Die Verfeinerung der Weierstraßschen Methoden	477
12.10.1	Huberts invariantes Integral	477
12.10.2	Die moderne Sicht	481
12.11	Variationsmethoden in der Mechanik	482
12.12	Existenzfragen	484
13	Die Entstehung der Funktionalanalysis	487
13.1	Einführung	487
13.2	Die Wurzeln in der Theorie linearer Gleichungssysteme und Integralgleichungen	489
13.3	Die Wurzeln in der Variationsrechnung und der italieni sehe <i>calcolo funzionale</i>	490

13.4	Der mengentheoretische Impuls und Frechets <i>analyse generale</i>	491
13.5	Pioniertaten ohne Wirkung: G. Peanos und S. Pincherles Axiomatik unendlichdimensionaler Vektorräume	493
13.6	David Huberts Integralgleichungstheorie und ihre Vereinfachung durch E. Schmidt	493
13.7	Der verfehlte Versuch einer Synthese durch einen Außen-seiter: die <i>General Analysis</i> von E. H. Moore	497
13.8	F. Riesz' Synthese der Frechetschen <i>analyse generale</i> und der Hilbert-Schmidtschen Integralgleichungstheorie	499
13.9	Der Beginn der Operatorentheorie bei Riesz	501
13.10	Die Pohlische Schule um Stefan Banach	502
13.11	Schluß	502

Literatur	505
------------------	-----

Personenverzeichnis	543
----------------------------	-----

Sachverzeichnis	551
------------------------	-----

Zu den Autoren	563
-----------------------	-----