
Inhaltsverzeichnis

Teil I Einführung und Grundlagen

1	Mathematik – Wissenschaft und Werkzeug	3
1.1	Über dieses Lehrbuch, Mathematiker und Mathematik	4
1.2	Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler	8
1.3	Die didaktischen Elemente dieses Buches	11
1.4	Ratschläge zum Studium der Höheren Mathematik	14
2	Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik	15
2.1	Eine beweisende Wissenschaft	16
2.2	Grundbegriffe der Aussagenlogik	17
2.3	Definition, Satz, Beweis	24
2.4	Elementare Mengenlehre	28
2.5	Zahlenmengen	31
2.6	Abbildungen	35
2.7	Mächtigkeit von Mengen	39
	Zusammenfassung	42
	Aufgaben	44
	Antworten der Selbstfragen	47
3	Rechentechniken – die Werkzeuge der Mathematik	49
3.1	Terme, Brüche und Potenzen	50
3.2	Gleichungen und Ungleichungen	57
3.3	Von Betrag und Abschätzungen	66
3.4	Summen und Produkte	70
3.5	Die vollständige Induktion	81
	Zusammenfassung	86
	Aufgaben	89
	Antworten der Selbstfragen	93
4	Elementare Funktionen – Bausteine der Analysis	95
4.1	Reellwertige Funktionen einer Veränderlichen	96
4.2	Polynome	103

IX

Inhaltsverzeichnis

4.3	Die Exponentialfunktion	115
4.4	Trigonometrische Funktionen	122
	Zusammenfassung	130
	Aufgaben	132
	Antworten der Selbstfragen	134
5	Komplexe Zahlen – Rechnen mit imaginären Größen	135
5.1	Die Menge der komplexen Zahlen	136
5.2	Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen	142
5.3	Mengen und Transformationen in der komplexen Ebene	153
	Zusammenfassung	158
	Aufgaben	159
	Antworten der Selbstfragen	161
 Teil II Analysis einer reellen Variablen		
6	Folgen – der Weg ins Unendliche	165
6.1	Der Begriff einer Folge	166
6.2	Elementare Eigenschaften von Zahlenfolgen	169
6.3	Konvergenz	174
6.4	* Teilfolgen und Häufungspunkte	182
6.5	Konvergenzkriterien	185
	Zusammenfassung	190
	Aufgaben	192
	Antworten der Selbstfragen	194
7	Stetige Funktionen – kleine Ursachen haben kleine Wirkungen	195
7.1	Zur Definition von Funktionen	196
7.2	Beschränkte und monotone Funktionen	201
7.3	Die Umkehrfunktion	203
7.4	Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit	207
7.5	Kompakte Mengen	213
7.6	Sätze über reellwertige, stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich	218
	Zusammenfassung	228
	Aufgaben	230
	Antworten der Selbstfragen	232
8	Reihen – Summieren bis zum Letzten	233
8.1	Die Idee der Reihen	234
8.2	Kriterien für Konvergenz	243

8.3	Absolute Konvergenz	252
8.4	Kriterien für absolute Konvergenz	256
	Zusammenfassung	263
	Aufgaben	265
	Antworten der Selbstfragen	267
9	Potenzreihen – Alleskönner unter den Funktionen	269
9.1	Definition und Grundlagen	270
9.2	Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen	278
9.3	Die Exponentialfunktion	285
9.4	Trigonometrische Funktionen	290
9.5	Der Logarithmus für komplexe Argumente	297
	Zusammenfassung	301
	Aufgaben	303
	Antworten der Selbstfragen	305
10	Differenzialrechnung – Veränderungen kalkulieren	307
10.1	Die Ableitung	308
10.2	Differenziationsregeln	319
10.3	Verhalten differenzierbarer Funktionen	327
10.4	Taylorreihen	339
10.5	Spline-Interpolation	354
	Zusammenfassung	359
	Aufgaben	361
	Antworten der Selbstfragen	364
11	Integrale – vom Sammeln und Bilanzieren	365
11.1	Das Lebesgue-Integral	366
11.2	Stammfunktionen	377
11.3	Integrale über unbeschränkte Intervalle oder Funktionen	383
11.4	Geometrische Anwendungen des Integrals	394
11.5	Parameterintegrale	401
	Zusammenfassung	407
	Aufgaben	409
	Antworten der Selbstfragen	412
12	Integrationstechniken – Tipps, Tricks und Näherungsverfahren	413
12.1	Grundtechniken	414
12.2	Partielle Integration	417
12.3	Substitutionsmethode	421

XII Inhaltsverzeichnis

12.4	Integration rationaler Funktionen	428
12.5	Numerische Integration	438
	Zusammenfassung	448
	Aufgaben	450
	Antworten der Selbstfragen	452
13	Differenzialgleichungen – Zusammenspiel von Funktionen und ihren Ableitungen	453
13.1	Begriffsbildungen	454
13.2	Numerische Lösungsmethoden	467
13.3	Analytische Lösungsmethoden	472
13.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	480
	Zusammenfassung	494
	Aufgaben	496
	Antworten der Selbstfragen	499
 Teil III Lineare Algebra		
14	Lineare Gleichungssysteme – Grundlage der linearen Algebra	503
14.1	Erste Lösungsversuche	504
14.2	Das Lösungsverfahren von Gauß und Jordan	509
14.3	Das Lösungskriterium und Anwendungen	516
14.4	Numerische Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme	522
	Zusammenfassung	525
	Aufgaben	527
	Antworten der Selbstfragen	529
15	Vektorräume – Schauplätze der linearen Algebra	531
15.1	Der Vektorraumbegriff	532
15.2	Beispiele von Vektorräumen	539
15.3	Untervektorräume	541
15.4	Basis und Dimension	543
15.5	Affine Teilräume	552
	Zusammenfassung	557
	Aufgaben	559
	Antworten der Selbstfragen	561
16	Matrizen und Determinanten – Zahlen in Reihen und Spalten	563
16.1	Addition und Multiplikation von Matrizen	564
16.2	Das Invertieren von Matrizen	570
16.3	Symmetrische und orthogonale Matrizen	576

16.4 Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	585
16.5 Einführung in die Determinanten	588
16.6 Definition und Eigenschaften der Determinante	592
16.7 Anwendungen der Determinante	597
Zusammenfassung	601
Aufgaben	603
Antworten der Selbstfragen	605
17 Lineare Abbildungen und Matrizen – abstrakte Sachverhalte in Zahlen ausgedrückt	607
17.1 Ein einführendes Beispiel	608
17.2 Definition einer linearen Abbildung und Beispiele	610
17.3 Kern, Bild und die Dimensionsformel	616
17.4 Darstellungsmatrizen	620
17.5 Basistransformation	626
17.6 Determinanten von Endomorphismen	628
Zusammenfassung	631
Aufgaben	633
Antworten der Selbstfragen	635
18 Eigenwerte und Eigenvektoren – oder wie man Matrizen diagonalisiert . . .	637
18.1 Das Diagonalisieren von Matrizen	638
18.2 Eigenwerte und Eigenvektoren	642
18.3 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren	645
18.4 Diagonalisierbarkeit von Matrizen	651
18.5 Diagonalisierung symmetrischer und hermitescher Matrizen	656
18.6 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	659
18.7 Die Exponentialfunktion für Matrizen	665
18.8 * Die Jordan-Normalform einer Matrix	668
Zusammenfassung	680
Aufgaben	682
Antworten der Selbstfragen	684
19 Analytische Geometrie – Rechnen statt Zeichnen	687
19.1 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum	688
19.2 Das Skalarprodukt im Anschauungsraum	692
19.3 Weitere Vektorverknüpfungen im Anschauungsraum	699
19.4 Wechsel zwischen kartesischen Koordinatensystemen	713
Zusammenfassung	725
Aufgaben	726
Antworten der Selbstfragen	728

20	Euklidische und unitäre Vektorräume – Geometrie in höheren Dimensionen	731
20.1	Euklidische Vektorräume	732
20.2	Norm, Abstand, Winkel, Orthogonalität	736
20.3	Orthonormalbasen und orthogonale Komplemente	741
20.4	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	750
20.5	Unitäre Vektorräume	751
	Zusammenfassung	756
	Aufgaben	758
	Antworten der Selbstfragen	760
21	Quadriken – ebenso nützlich wie dekorativ	761
21.1	Symmetrische Bilinearformen	762
21.2	Hermiteische Sesquilinearformen	769
21.3	Quadriken und ihre Hauptachsentransformation	773
21.4	Die Singulärwertzerlegung	786
21.5	* Die Pseudoinverse einer linearen Abbildung	788
	Zusammenfassung	798
	Aufgaben	800
	Antworten der Selbstfragen	802
22	Tensoren – geschicktes Hantieren mit Indizes	803
22.1	Einführung in die Tensoralgebra	804
22.2	Kartesische Tensoren	811
	Zusammenfassung	820
	Aufgaben	822
	Antworten der Selbstfragen	824
23	Lineare Optimierung – ideale Ausnutzung von Kapazitäten	825
23.1	Typische Problemstellungen	826
23.2	Sonderfälle von Optimierungsproblemen	830
23.3	Definitionen und Theorie	832
23.4	Wandern von Ecke zu Ecke	835
23.5	Das Simplexverfahren	840
	Zusammenfassung	846
	Aufgaben	848
	Antworten der Selbstfragen	851
Teil IV Analysis mehrerer reeller Variablen		
24	Funktionen mehrerer Variablen – Differenzieren im Raum	855
24.1	Wozu Funktionen von mehreren Variablen?	856

24.2	Stetigkeit	860
24.3	Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit	864
24.4	Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	878
24.5	Der Hauptsatz über implizite Funktionen	885
24.6	Extremwertaufgaben	891
	Zusammenfassung	897
	Aufgaben	900
	Antworten der Selbstfragen	903
25	Gebietsintegrale – das Ausmessen von Körpern	905
25.1	Definition und Eigenschaften	906
25.2	Volumen, Masse und Schwerpunkt	917
25.3	Die Transformationsformel	922
25.4	Wichtige Koordinatensysteme	927
	Zusammenfassung	936
	Aufgaben	938
	Antworten der Selbstfragen	941
26	Kurven und Flächen – von Krümmung, Torsion und Längenmessung	943
26.1	Ebene Kurven	944
26.2	Die Bogenlänge von Kurven	949
26.3	Die Krümmung ebener Kurven	952
26.4	Raumkurven	955
26.5	Darstellung von Flächen	962
26.6	Basissysteme krummliniger Koordinaten	966
	Zusammenfassung	974
	Aufgaben	976
	Antworten der Selbstfragen	979
27	Vektoranalysis – von Quellen und Wirbeln	981
27.1	Skalar- und Vektorfelder	982
27.2	Differenzialoperatoren	984
27.3	Kurvenintegrale	996
27.4	Oberflächenintegrale	1003
27.5	Integralsätze	1005
27.6	Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	1013
	Zusammenfassung	1018
	Aufgaben	1021
	Antworten der Selbstfragen	1025

28	Differenzialgleichungssysteme – ein allgemeiner Zugang zu Differenzialgleichungen	1027
28.1	Definition und qualitatives Lösungsverhalten	1028
28.2	Existenz von Lösungen	1033
28.3	* Die Herleitung des Satzes von Picard-Lindelöf	1039
28.4	Die Lösung linearer Differenzialgleichungssysteme	1044
28.5	Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme: Konvergenz, Konsistenz und Stabilität	1054
28.6	Randwertprobleme: Theorie und numerische Verfahren	1058
	Zusammenfassung	1068
	Aufgaben	1070
	Antworten der Selbstfragen	1073
29	Partielle Differenzialgleichungen – Modelle von Feldern und Wellen	1075
29.1	Klassifizierung partieller Differenzialgleichungen	1076
29.2	Separationsansätze	1084
29.3	Quasilineare partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung	1091
29.4	Potenzialtheorie	1097
29.5	Die Methode der finiten Elemente	1103
	Zusammenfassung	1111
	Aufgaben	1114
	Antworten der Selbstfragen	1117

Teil V Höhere Analysis

30	Fouriertheorie – von schwingenden Saiten	1121
30.1	Trigonometrische Polynome	1122
30.2	Approximation im quadratischen Mittel	1125
30.3	Fourierreihen	1132
30.4	Die diskrete Fouriertransformation	1143
	Zusammenfassung	1151
	Aufgaben	1153
	Antworten der Selbstfragen	1155
31	Funktionalanalysis – Operatoren wirken auf Funktionen	1157
31.1	Normierte Räume, Banachräume, Hilberträume	1158
31.2	Lineare, beschränkte Operatoren und Funktionale	1165
31.3	Funktionale und Distributionen	1171
31.4	Operatoren in Hilberträumen	1179
31.5	* Approximation von Operatoren	1185

Zusammenfassung	1188
Aufgaben	1191
Antworten der Selbstfragen	1193
32 Funktionentheorie – von komplexen Zusammenhängen	1195
32.1 Komplexe Funktionen und Differenzierbarkeit	1196
32.2 Komplexe Kurvenintegrale	1208
32.3 Laurent-Reihen und Residuensatz	1220
Zusammenfassung	1232
Aufgaben	1235
Antworten der Selbstfragen	1238
33 Integraltransformationen – Multiplizieren statt Differenzieren	1239
33.1 Transformation von Funktionen	1240
33.2 Die Laplacetransformation	1243
33.3 Die Fouriertransformation	1257
Zusammenfassung	1271
Aufgaben	1273
Antworten der Selbstfragen	1275
34 Spezielle Funktionen – nützliche Helfer	1277
34.1 Die Gammafunktion	1278
34.2 Differenzialgleichungen aus Separationsansätzen	1280
34.3 Das Sturm-Liouville-Problem	1282
34.4 Orthogonalpolynome und Kugelfunktionen	1284
34.5 Zylinderfunktionen	1291
Zusammenfassung	1294
Aufgaben	1297
Antworten der Selbstfragen	1299
35 Optimierung und Variationsrechnung – Suche nach dem Besten	1301
35.1 Optimierungsaufgaben	1302
35.2 Optimierung unter Nebenbedingungen	1309
35.3 Variationsrechnung	1313
35.4 Numerische Verfahren zur Optimierung	1322
Zusammenfassung	1331
Aufgaben	1333
Antworten der Selbstfragen	1335
 Teil VI Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik	
36 Deskriptive Statistik – wie man Daten beschreibt	1339
36.1 Grundbegriffe	1340

36.2	Darstellungsformen	1342
36.3	Lageparameter	1349
36.4	Streuungsparameter	1358
36.5	Strukturparameter	1362
36.6	Mehrdimensionale Verteilungen	1364
	Zusammenfassung	1375
	Aufgaben	1378
	Antworten der Selbstfragen	1381
37	Wahrscheinlichkeit – die Gesetze des Zufalls	1383
37.1	Wahrscheinlichkeits-Axiomatik	1384
37.2	Die bedingte Wahrscheinlichkeit	1391
37.3	Die stochastische Unabhängigkeit	1396
37.4	Kombinatorik	1398
	Zusammenfassung	1403
	Aufgaben	1405
	Antworten der Selbstfragen	1409
38	Zufällige Variable – der Zufall betritt den $\mathbb{R}^1$	1411
38.1	Der Begriff der Zufallsvariablen	1412
38.2	Erwartungswert und Varianz einer zufälligen Variablen	1420
38.3	Das Gesetz der großen Zahlen und der Hauptsatz der Statistik	1426
38.4	Mehrdimensionale zufällige Variable	1432
	Zusammenfassung	1438
	Aufgaben	1441
	Antworten der Selbstfragen	1444
39	Spezielle Verteilungen – Modelle des Zufalls	1445
39.1	Spezielle diskrete Verteilungsmodelle	1446
39.2	Stetige Verteilungen	1456
39.3	Die Normalverteilungsfamilie	1465
	Zusammenfassung	1479
	Aufgaben	1482
	Antworten der Selbstfragen	1485
40	Schätz- und Testtheorie – Bewerten und Entscheiden	1487
40.1	Grundaufgaben der induktiven Statistik	1488
40.2	Die Likelihood und der Maximum-Likelihood-Schätzer	1490
40.3	Die Güte einer Schätzung	1498
40.4	Konfidenzintervalle	1502

40.5 Grundprinzipien der Testtheorie	1510
Zusammenfassung	1518
Aufgaben	1521
Antworten der Selbstfragen	1524
41 Lineare Regression – die Suche nach Abhängigkeiten	1525
41.1 Die Ausgleichsgeraden	1526
41.2 Das Regressionsmodell	1528
41.3 Schätzen und Testen im linearen Modell	1533
41.4 Die lineare Einfachregression	1540
41.5 Fallstricke im linearen Modell	1546
Zusammenfassung	1550
Aufgaben	1553
Antworten der Selbstfragen	1556
Hinweise zu den Aufgaben	1557
Lösungen zu den Aufgaben	1579
Bildnachweis	1605
Symbolglossar	1607
Sachverzeichnis	1617