

Inhaltsverzeichnis

Teil I Brüche

1	Zahlen, Operationen und Strategien „verstehen“ – einige Grundlagen	3
1.1	„Verstehen“ und Grundvorstellungen	3
1.2	Verstehen untersuchen	4
1.3	Aufbau von Grundvorstellungen	6
1.4	Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen	7
1.5	Bedeutung der Prozessorientierung	7
2	Ist die Bruchrechnung heute noch nötig?	9
2.1	Die Bruchrechnung ist überflüssig – einige häufiger genannte Argumente	9
2.2	Die Bruchrechnung ist keineswegs überflüssig – einige ausgewählte Argumente	10
2.2.1	Anschauliche Fundierung des Dezimalbruchbegriffs mittels Brüchen	11
2.2.2	Einsichtige Fundierung des Rechnens mit Dezimalbrüchen mittels Brüchen	12
2.2.3	Prävention und Intervention bei Problembereichen der Dezimalbruchrechnung mittels Brüchen	13
2.2.4	Leichtere Begründung algebraischer Eigenschaften von \mathbb{Q}^+ mittels Brüchen	13
2.2.5	Wahrscheinlichkeitsrechnung	15
2.2.6	Gleichungslehre	16
2.2.7	Algebra	17
2.2.8	Reichhaltige und vielseitige Möglichkeiten zur Prozessorientierung	18
2.3	Resümee	18

3	Zur Einführung von Brüchen	19
3.1	Zentrale Grundvorstellungen	19
3.1.1	Einige Verwendungssituationen von Brüchen	19
3.1.2	Zwei zentrale Grundvorstellungen	23
3.1.3	Alternative Zugänge	25
3.2	Bruch als Anteil – zwei Teilaspekte	26
3.2.1	Teilaspekt 1 – Anteil eines Ganzen	26
3.2.2	Teilaspekt 2 – Anteil mehrerer Ganzer	31
3.3	Bruch als Anteil – zwei sachorientierte Bemerkungen	33
3.4	Tablets als Hilfe zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs	34
3.5	Schreibweisen und Repräsentanten	35
3.6	Bruchalbum und Stationenlernen	36
3.7	Drei Grundaufgaben	37
3.8	Anschauliche Vorkenntnisse zu Brüchen	39
3.9	Ein unterrichtlicher Zugang zu den Bruchzahlen	40
3.10	Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und Bruchzahlen	41
4	Erweitern/Kürzen von Brüchen	43
4.1	Anschauliche Vorkenntnisse	43
4.2	Gleichwertige Brüche – anschauliche Zugangswege	44
4.3	Erweitern – systematische Behandlung	49
4.4	Kürzen – systematische Behandlung	50
4.5	Variationsreiches Üben	52
4.6	Mögliche Problembereiche und Hürden/Prävention und Intervention	54
4.7	Vertiefung	56
5	Größenvergleich von Brüchen	57
5.1	Anschauliche Vorkenntnisse	57
5.2	Anschauliche Wege zum Größenvergleich	59
5.3	Systematische Behandlung	64
5.4	Variationsreiches Üben	64
5.5	Mögliche Problembereiche und Hürden	66
5.6	Prävention und Intervention	69
5.7	Vertiefung	71
6	Addition und Subtraktion von Brüchen	75
6.1	Anschauliche Vorkenntnisse	75
6.2	Grundvorstellungen und anschauliche Wege zur Addition und Subtraktion von Brüchen	76
6.3	Addition und Subtraktion – systematische Behandlung	80
6.4	Gemischte Zahlen	81
6.5	Variationsreiches Üben	82

6.6	Mögliche Problembereiche und Hürden	85
6.6.1	Grundvorstellungen und Rechenkalkül	86
6.6.2	Anschauliche Vorstellungen – oft Fehlanzeige	87
6.6.3	Schwierigkeitsfaktoren.	88
6.6.4	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	88
6.6.5	Bruch plus Bruch/Bruch minus Bruch.	89
6.6.6	Kombinierter Fall (Bruch und natürliche Zahl).	91
6.7	Prävention und Intervention.	92
6.8	Vertiefung.	95
7	Multiplikation von Brüchen	101
7.1	Anschauliche Vorkenntnisse	101
7.2	Anschauliche Wege zur Multiplikation	103
7.3	Natürliche Zahl mal Bruch – Grundvorstellung und systematische Behandlung	107
7.4	Bruch mal natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung	108
7.5	Bruch mal Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung	110
7.5.1	Grundvorstellung: Anteil vom Anteil.	110
7.5.2	Grundvorstellung: Flächeninhalt	112
7.5.3	Vergleich beider Wege	113
7.6	Variationsreiches Üben	114
7.7	Mögliche Problembereiche und Hürden	116
7.7.1	Multiplizieren vergrößert immer	116
7.7.2	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	117
7.7.3	Multiplikation gleichnamiger Brüche	117
7.7.4	Multiplikation ungleichnamiger Brüche	118
7.7.5	Natürliche Zahl mal Bruch/Bruch mal natürliche Zahl	119
7.7.6	Multiplikation gemischter Zahlen	120
7.7.7	Regelformulierung und Begründung	121
7.8	Prävention und Intervention.	121
7.9	Vertiefung.	123
8	Division von Brüchen	127
8.1	Anschauliche Vorkenntnisse	127
8.2	Anschauliche Wege zur Division	129
8.3	Bruch durch natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung	135

8.4	Bruch durch Bruch/Natürliche Zahl durch Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung	136
8.4.1	Grundvorstellung Messen	136
8.4.2	Grundvorstellung Umkehroperation	137
8.4.3	Vergleich der beiden Wege.	140
8.5	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl.	140
8.6	Variationsreiches Üben	141
8.7	Mögliche Problembereiche und Hürden	143
8.7.1	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	143
8.7.2	Bruch durch Bruch.	143
8.7.3	Bruch durch natürliche Zahl/Natürliche Zahl durch Bruch	144
8.7.4	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl.	145
8.7.5	Grundvorstellungsumbrüche bei der Division	146
8.7.6	Division von Brüchen und praktische Anwendungen	147
8.7.7	Regelformulierung und Begründung	148
8.8	Prävention und Intervention.	148
8.9	Vertiefung.	150
9	Brüche und natürliche Zahlen – viele Gemeinsamkeiten, aber auch starke Umbrüche in den Grundvorstellungen	155
10	Resümee Brüche	159
10.1	Vorkenntnisse über Brüche überraschend gering.	159
10.2	Gründliche Fundierung des Bruchbegriffs erforderlich.	159
10.3	Grundvorstellungen sorgfältig erarbeiten	160
10.4	Mögliche Problembereiche und Hürden geschickt thematisieren	162
10.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	163
 Teil II Dezimalbrüche		
11	Prozessorientierter Zugang zu Dezimalbrüchen	167
11.1	Zur Bedeutung von Dezimalbrüchen.	167
11.2	Vorteile der Schreibweise als Dezimalbruch	168
11.3	Zielsetzung des Dezimalbruchlehrgangs	169
11.4	Bedeutung der Prozessorientierung und Vernetzung	170
11.5	Grundvorstellungen aufbauen	171
11.6	Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen	172
12	Veranschaulichungen zu Dezimalbrüchen	173
12.1	Rolle von Anschauungsmitteln	173
12.2	Kriterien zur Auswahl von Arbeitsmitteln	174
12.3	Konkrete Arbeitsmittel für Dezimalbrüche	175
12.3.1	Zehnersystemblöcke/Dienes-Material	175
12.3.2	Lineare Arithmetikblöcke	175

12.3.3	Decimats.	176
12.3.4	Millimeterpapierquadrate.	176
12.3.5	Stellenwerttafeln	177
12.3.6	Zahlengerade	177
12.4	Arbeitsmittel sind nicht selbsterklärend.	178
12.5	Vom konkreten Material zur Grundvorstellung	179
12.6	Übersetzen in Sachsituationen.	179
13	Erweiterung des Stellenwertsystems	183
13.1	Stellenwerte und deren Zusammenhänge	183
13.2	Mögliche Problembereiche und Hürden	185
13.3	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	186
14	Darstellen, Lesen und Schreiben von Dezimalbrüchen	187
14.1	Brüche in Stellenwertschreibweise darstellen	187
14.2	Schreib- und Sprechweisen	188
14.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	189
14.3.1	Probleme beim Übersetzen in eine nichtsymbolische Darstellung	189
14.3.2	Probleme beim Lesen und Schreiben.	190
14.4	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	192
14.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	193
15	Erweitern und Kürzen bei Dezimalbrüchen	197
15.1	Verfeinern und Vergrößern einer Unterteilung.	197
15.2	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	198
16	Größenvergleich und Anordnung bei Dezimalbrüchen	201
16.1	Wege zum Größenvergleich.	201
16.1.1	Über die Stellenwerte an flächigen Veranschaulichungen	201
16.1.2	Über die Zahlengerade.	202
16.1.3	Über Größen.	202
16.1.4	Über Stellenwerttafeln	202
16.1.5	Beispiel.	202
16.1.6	Vergleich der verschiedenen Wege.	203
16.2	Anordnung von Dezimalbrüchen.	204
16.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	204
16.3.1	Probleme beim Vergleichen von Dezimalbrüchen	205
16.3.2	Probleme bei der Anordnung von Dezimalbrüchen.	207
16.4	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	208
16.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	210

17	Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalbrüchen	213
17.1	Umwandlung von Bruch- in Dezimalbruchschreibweise	213
17.2	Umwandlung von Dezimalbruch- in Bruchschreibweise	216
17.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	217
17.4	Typische Fehlerstrategien bei der Umwandlung zwischen Dezimalbruch- und Bruchschreibweise	218
17.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	219
18	Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen	221
18.1	Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion	221
18.2	Rechenstrategien und -methoden zur Addition und Subtraktion	222
18.3	Operative Additions- und Subtraktionsstrategien	223
18.4	Stellenweises Rechnen und schriftlicher Algorithmus	224
18.5	Weitere Strategien	226
18.5.1	Rechnen im kleinsten Stellenwert	226
18.5.2	Zehnerbrüche	226
18.5.3	Größen	227
18.6	Zusammenfassung und Bewertung	227
18.7	Lösungsquoten und -wege	228
18.8	Mögliche Problembereiche und Hürden	230
18.8.1	Stellenwertprobleme	230
18.8.2	Komma-trennt-Strategie	231
18.9	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	232
18.10	Variationsreiches Üben und Vertiefen	233
19	Multiplikation von Dezimalbrüchen	237
19.1	Grundvorstellungen zur Multiplikation	237
19.2	Multiplizieren von Stellenwerten	240
19.2.1	Multiplikation mit Zehnerpotenzen	240
19.2.2	Multiplikation mit Stellenwerten kleiner 1	241
19.3	Strategien zur Berechnung von Multiplikationstermen	242
19.3.1	Nutzen des Flächeninhalts am Rechteckmodell	242
19.3.2	Malkreuz	243
19.3.3	Größen	243
19.3.4	Rechnen mit Zehnerbrüchen	245
19.3.5	Rechnen mit kleinsten Stellenwerten	245
19.3.6	Regel zur Multiplikation von Dezimalbrüchen	245
19.3.7	Sonderfall: Multiplikation mit natürlichen Zahlen	246
19.4	Mögliche Problembereiche und Hürden	246
19.4.1	Gering ausgeprägte Grundvorstellungen	246
19.4.2	Fehlvorstellungen	247
19.4.3	Probleme bei Rechenstrategien	248

19.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	251
19.5.1	Diagnostische Aufgaben und Beobachtungsschwerpunkte.	251
19.5.2	Fördervorschläge: Grundvorstellung und Grundvorstellungsumbruch Multiplikation	252
19.5.3	Fördervorschläge: Rechenstrategien	253
19.6	Variationsreiches Üben und Vertiefen	254
20	Division von Dezimalbrüchen	259
20.1	Grundvorstellungen zur Division.	259
20.2	Strategien zur Division durch Dezimalbrüche.	261
20.2.1	Anschauliche Division am Modell.	261
20.2.2	Division über Zehnerbrüche.	261
20.2.3	Rückgriff auf Größen	261
20.2.4	Umkehroperation	262
20.2.5	Gleichsinniges Verändern.	262
20.3	Sonderfall: Division durch Zehnerpotenzen	265
20.4	Sonderfall: Divisionsstrategien Dezimalbruch geteilt durch natürliche Zahl	265
20.5	Mögliche Problembereiche und Hürden	267
20.5.1	Fehlende Grundvorstellungen	267
20.5.2	Fehlerstrategien	268
20.6	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	271
20.6.1	Diagnostische Aufgaben	271
20.6.2	Fördervorschläge	272
20.7	Variationsreiches Üben und Vertiefen	273
20.7.1	Wahl der Rechenoperation	273
20.7.2	Divisionsstrategien.	274
21	Runden, Überschlagen und Schätzen	277
21.1	Runden.	278
21.2	Überschlagen von Rechenausdrücken	279
21.3	Schätzen von Zahlen und Größen	280
21.4	Mögliche Problembereiche und Hürden	282
21.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	282
21.6	Variationsreiches Üben und Vertiefen	283
22	Resümee und Konsequenzen	285
22.1	Zielsetzung: Verstehen und Prozesse	285
22.2	Modelle: Tragfähigkeit statt Vielfalt	286
22.3	Inhalte: Zahlen statt Ziffern	287
22.4	Zahlvorstellungen im Stellenwertsystem.	287
22.5	Vorwissen aufgreifen, gegenüberstellen, Umbrüche vollziehen	288

22.6 Probleme bei mangelnden Grundvorstellungen..... 289

22.7 Fehlerstrategien beim syntaktischen Arbeiten..... 289

22.8 Fehlvorstellungen..... 291

22.9 Diagnose: Erfassung von Prozessen..... 291

22.10 Förderung und Förderkonzepte..... 292

22.10.1 Aktivieren von Grundvorstellungen..... 292

22.10.2 Überwinden von Fehlvorstellungen..... 293

22.10.3 Fehlerstrategien erkennen und überwinden..... 294

22.11 Vernetzung: eine Herausforderung..... 294

Teil III Prozente

23 Inhaltliches Verständnis des Prozentbegriffs..... 299

23.1 Prozente: Allgegenwärtig im Alltag, dennoch starke
Defizite bei jugendlichen und Erwachsenen..... 299

23.2 Anschauliche Erarbeitung des Prozentbegriffs..... 300

23.2.1 Grundvorstellungen..... 300

23.2.2 Anschauliche Erarbeitung..... 301

23.3 Prozente und Prozentpunkte..... 304

23.4 Promille..... 305

**24 Grundbegriffe der Prozentrechnung/Erste Bemerkungen
zum Prozentstreifen..... 307**

24.1 Grundbegriffe der Prozentrechnung..... 307

24.2 Erste Bemerkungen zum Prozentstreifen..... 309

25 Prozentwert berechnen..... 311

25.1 Verschiedene Lösungsstrategien..... 311

25.2 Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Lösungsstrategien..... 314

25.3 Erfolgsquoten bei verschiedenen Lösungsstrategien und
Aufgabentypen..... 315

25.4 Fehleranalyse..... 317

25.5 Prozentwerte flexibel und anschaulich berechnen..... 317

25.5.1 Im Kopf rechnen und überschlagen..... 318

25.5.2 Verschiedene Lösungswege verstehen und beurteilen..... 320

25.5.3 Fehleranalyse..... 321

25.5.4 Prozentstreifen..... 321

26 Prozentsatz berechnen..... 323

26.1 Verschiedene Lösungsstrategien..... 323

26.2 Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Lösungsstrategien..... 325

26.3 Erfolgsquoten bei verschiedenen Lösungsstrategien..... 326

26.4 Fehleranalyse..... 326

26.5	Prozentsätze flexibel und anschaulich berechnen	327
26.5.1	Im Kopf rechnen und überschlagen	327
26.5.2	Fehleranalyse	328
26.5.3	Prozentstreifen	328
27	Grundwert berechnen	331
27.1	Verschiedene Lösungsstrategien	331
27.2	Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Lösungsstrategien	333
27.3	Erfolgsquoten bei verschiedenen Lösungsstrategien	333
27.4	Fehleranalysen	335
27.5	Grundwerte flexibel und anschaulich berechnen	335
27.5.1	Im Kopf rechnen und überschlagen	335
27.5.2	Fehleranalyse	336
27.5.3	Grundwerte einfach berechnen	337
27.5.4	Prozentstreifen	337
27.6	Prozentformeln für alle 3 Grundaufgaben	338
27.7	Tabellenkalkulation und Prozentrechnung	338
28	Prozentuale Veränderungen	341
28.1	Prozentuale Erhöhung	341
28.2	Prozentuale Abnahme	342
28.3	Kombinationen prozentualer Veränderungen	342
28.4	Komplexere Aufgaben	344
29	Zinsen – ein kurzer Ausblick	345
29.1	Zusammenhang mit der Prozentrechnung	345
29.2	Drei Grundaufgaben der Zinsrechnung	345
29.3	Unterjährige Kapitalanlagen	346
29.4	Mehrjährige Kapitalanlagen, Zinseszins, Tabellenkalkulation	347
A	Diagnostische Tests	349
B	Zitierte Literatur	351
C	Zitierte Schulbücher	367
D	Vertiefende Literatur	371
Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II		379