

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Symmetrien und Gruppen.	1
1.2	Gruppentheorie in Mathematik und Physik	3
1.3	Literatur, Software	5
2	Elemente der Gruppentheorie	7
2.1	Gruppen und Gruppentafeln.	7
2.2	Matrixgruppen	10
2.3	Diedergruppen	12
2.4	Anhang A: Matrizen mit Elementen in einem Ring	13
2.5	Anhang B: Präsentation einer Gruppe	17
2.6	Aufgaben zu Kap. 2	19
3	Homomorphismen, Untergruppen und Klassen	21
3.1	Homomorphismen und isomorphe Gruppen	21
3.2	Untergruppen	23
3.2.1	Kern und Bild eines Homomorphismus.	23
3.2.2	Zyklische Untergruppen.	24
3.2.3	Eigenschaften von wichtigen Untergruppen	25
3.3	Nebenklassen und Faktorgruppen.	27
3.4	Konjugationsklassen.	32
3.5	Direktes und semidirektes Produkt.	34
3.6	Aufgaben zu Kap. 3	35
4	Endliche Gruppen.	39
4.1	Untergruppen der Permutationsgruppen.	39
4.2	Symmetrische und alternierende Gruppen	40
4.2.1	Zyklen	44
4.2.2	Konjugationsklassen	45
4.3	Kleine Gruppen	47
4.4	Aufgaben zu Kap. 4	49
5	Raumzeit-Symmetrien	51
5.1	Gruppenwirkungen.	51
5.2	Drehungen im Raum.	55
5.3	Die euklidischen Gruppen E_n .	59

5.4	Die Galilei-Gruppe	61
5.5	Lorentz- und Poincaré Transformationen	64
5.6	Anhang A: Normalform der Drehungen und Bewegungen	71
5.6.1	Normalformen für Drehungen im $\mathbb{R}^n$	71
5.6.2	Normalformen für Bewegungen im $\mathbb{R}^n$	72
5.7	Aufgaben zu Kap. 5	74
6	Punktgruppen	77
6.1	Eigentliche Punktgruppen	78
6.1.1	Platonische Gruppen	78
6.1.2	Klassifikation der eigentlichen Punktgruppen	82
6.1.3	Uneigentliche Punktgruppen	86
6.1.4	Trägheitstensor symmetrischer Körper	91
6.2	Molekülsymmetrien	93
6.2.1	Das Massenpunktsystem Allen C_3H_4	93
6.2.2	Trans-Dichlorethylen	95
6.3	Aufgaben zu Kap. 6	96
7	Raumgruppen und Kristalle	99
7.1	Gittervektoren und primitive Elementarzelle	100
7.1.1	Das reziproke Gitter	102
7.1.2	Kristallsysteme in der Ebene	103
7.1.3	Kristallsysteme im Raum	104
7.2	Elementarzellen, Einheitszellen und Bravais-Gitter	105
7.3	Raum- und Flächengruppen von Kristallen	109
7.3.1	Normalformen von Bewegungen	110
7.3.2	Flächen- und Raumgruppen und zugehörige Punktgruppen	111
7.4	Zweidimensionale Kristalle	117
7.5	Dreidimensionale Kristalle	120
7.6	Die 7 Kristallsysteme	122
7.7	Aufgaben zu Kap. 7	125
8	Lie-Gruppen	129
8.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	130
8.1.1	Lie-Gruppen	134
8.1.2	(Weg-)Zusammenhängende Lie-Gruppen	134
8.1.3	Lie-Untergruppen	135
8.2	Die Lie-Gruppen $U(2)$ und $SU(2)$	136
8.3	Matrixgruppen $GL(n, \mathbb{K})$ und Untergruppen	142
8.4	Globale Eigenschaften von Lie-Gruppen	146
8.4.1	Homotopiegruppen	147
8.4.2	Universelle Überlagerungsgruppen	150
8.5	Aufgaben zu Kap. 8	152

9	Invariante Integration	157
9.1	Haar-Maße auf $U(1)$ und $SU(2)$	159
9.2	Haar-Maße für beliebige Lie-Gruppen	162
9.3	Haar-Maße für kompakte Matrixgruppen	165
9.4	Haar-Maße für unitäre Gruppen	165
9.5	Invariante Integration auf $SU(1, 1)$ und $SL(2, \mathbb{R})$	169
9.6	Modulare Funktion	171
9.7	Aufgaben zu Kap. 9	173
10	Darstellungen von Gruppen	175
10.1	Darstellungen	175
10.2	Reguläre Darstellung	178
10.3	Reduzible und irreduzible Darstellungen	181
10.4	Darstellungen von Gruppen mit Mittelwertbildung	184
10.5	Tensorprodukt von Darstellungen	186
10.6	Symmetrische Gruppen	187
10.7	Anwendung: Benzolring in der Hückel-Näherung	188
10.8	Darstellungen und spezielle Funktionen	191
10.8.1	Kugelflächenfunktionen und $SO(3)$ -Darstellungen	193
10.8.2	Darstellungen von $SU(2)$ auf $L_2(\mathbb{C}^2, \rho)$	196
10.9	Aufgaben zu Kap. 10	199
11	Charaktere und Lemma von Schur	203
11.1	Charakter einer Darstellung	203
11.2	Das Lemma von Schur	205
11.2.1	Systeme mit invariantem Hamilton-Operator	207
11.2.2	Orthogonalitätsrelationen	209
11.2.3	Ausreduktion einer beliebigen Darstellung	211
11.2.4	Methode der Projektionsoperatoren	212
11.3	Alle Darstellungen einer endlichen Gruppe	214
11.4	Darstellungen der symmetrischen Gruppen	217
11.4.1	Young-Diagramme und Young-Tableaus	219
11.4.2	Young-Symmetrisierer	222
11.5	Anhang A: Charaktertafeln der Punktgruppen	227
11.6	Aufgaben zu Kap. 11	230
12	Irreduzible Darstellungen von Lie-Gruppen	233
12.1	Charaktere von $U(1)$ und Satz von Peter und Weyl	233
12.2	Irreduzible Darstellungen von $SU(2)$	234
12.2.1	Die dreidimensionale Darstellung $SO(3)$	235
12.2.2	Höherdimensionale Darstellungen	237
12.3	Darstellungen von $SU(3)$	239
12.4	Aufgaben zu Kap. 12	241

13 Theorie der Lie-Algebren	243
13.1 Einführung in Lie-Algebren	244
13.2 Lie-Unteralgebren	245
13.3 Lie-Algebra-Homomorphismen und Darstellungen	248
13.3.1 Darstellungen einer Lie-Algebra	249
13.3.2 Irreduzible Darstellungen	249
13.3.3 Adjungierte Darstellung	250
13.4 Invariante Killing-Form	251
13.4.1 Cartan-Killing-Metrik und Strukturkonstanten	253
13.4.2 Killing-Formen für Matrix-Lie-Algebren	254
13.5 Universelle Einhüllende einer Lie-Algebra	256
13.5.1 Quadratische Casimir-Invarianten	258
13.5.2 Höhere Casimir-Invarianten	259
13.6 Anhang A: Nilpotente und auflösbare Lie-Algebren	260
13.7 Aufgaben zu Kap. 13	267
14 Lie-Algebren von Lie-Gruppen	271
14.1 Lie-Algebra der infinitesimalen Erzeugenden	272
14.1.1 Adjungierte Darstellung der Gruppe und Zentrum	275
14.1.2 Darstellungen von G induzieren Darstellungen von $\mathfrak{g}$	277
14.1.3 Tensorprodukt von Darstellungen	280
14.2 Lie-Algebren der klassischen Matrixgruppen	281
14.3 Die Exponentialabbildung	283
14.4 Weyl-Gruppe und maximale Tori	286
14.5 Lorentz-Gruppe und Lorentz-Algebra	289
14.6 Die Poincaré-Algebra	293
14.7 Allgemeine Lie-Gruppen	295
14.8 Anhang A: Linksinvariante Vektorfelder	296
14.8.1 Vektoren und Tangentialraum	296
14.8.2 Die Abbildungen Pullback und Pushforward	300
14.9 Aufgaben zu Kap. 14	301
15 Wurzelsysteme und Cartan-Klassifikation	303
15.1 Auf- und Absteigeoperatoren in $\mathfrak{su}(2)$	304
15.2 Wurzeln einer einfachen Lie-Algebra	307
15.3 Quantisierung der Wurzeln	310
15.3.1 Weyl-Spiegelungen	313
15.3.2 Weyl-Gruppe	313
15.4 Wurzeln von Lie-Algebren mit $\text{Rang} \leq 2$	316
15.5 Eigenschaften von Wurzelsystemen	319
15.6 Cartan-Matrix und Dynkin-Diagramme	327
15.7 Cartan-Klassifikation	334
15.8 Anhang: Explizite irreduzible Wurzelsysteme	336
15.9 Aufgaben zu Kap. 15	338

16	Darstellungen von Lie-Algebren	341
16.1	Gewichte einer Darstellung	342
16.1.1	Stufenoperatoren	343
16.1.2	Weyl-Gruppe, Gewichtsgitter und fundamentale Gewichte	344
16.1.3	Höchstes Gewicht	347
16.1.4	Tensorprodukt von Darstellungen	351
16.2	Charaktere und Dimensionen von Darstellungen	353
16.2.1	Weylsche Integralformel	354
16.2.2	Charaktere	360
16.2.3	Weylsche Dimensionsformel	362
16.2.4	Multiplizität der Gewichte	364
16.3	Young-Diagramme	366
16.3.1	Dimensionen der Darstellungen von $GL(n)$	370
16.3.2	Irreduzible Darstellungen von $U(n)$ und $SU(n)$	370
16.3.3	Tensorprodukte mit Young-Diagrammen	372
16.4	Aufgaben zu Kap. 16	373
17	Symmetrien in der Quantenmechanik	379
17.1	Mehrteilchensysteme	381
17.2	Translationen	383
17.3	Periodische Potenziale und Bloch-Wellen	385
17.4	Drehimpuls in der Quantenmechanik	388
17.5	Addition von Drehimpulsen	389
17.5.1	Ausreduktion von Tensorprodukten	390
17.5.2	Clebsch-Gordan(CG)-Koeffizienten	393
17.5.3	Wigner-Eckart-Theorem	396
17.6	Algebraische Lösung des Wasserstoffatoms	401
17.7	Aufgaben zu Kap. 17	405
18	Symmetrien in der relativistischen Quantenmechanik	409
18.1	Darstellungen der Lorentz-Gruppe	410
18.2	Darstellungen der Poincaré-Algebra	412
18.2.1	Massive Darstellungen	413
18.2.2	Masselose Darstellungen	413
18.3	Clifford-Algebren in d Dimensionen	414
18.3.1	Irreduzible Darstellungen der Clifford-Algebra	416
18.3.2	Spingruppe als Überlagerung der Lorentz-Gruppe	417
18.3.3	Transformationen der Spinorfelder	421
18.4	Kovarianz der Dirac-Gleichung	421
18.4.1	Dirac-Gleichung für freie Teilchen	422
18.4.2	Raumspiegelungen	423

18.4.3	Zeitumkehr	424
18.4.4	Kopplung ans elektromagnetische Feld und Ladungskonjugation	424
18.5	Aufgaben zu Kap. 18	427
19	Relativistische Feldtheorien	431
19.1	Langrangescher Formalismus	432
19.2	Hamiltonscher Formalismus	435
19.3	Noether-Theorem für innere Symmetrien	437
19.4	Noether-Theorem für Translationen	440
19.4.1	Energie-Impuls des elektromagnetischen Feldes	443
19.4.2	Verbesserung von Noether-Strömen	444
19.5	Lorentz-Transformationen und Drehimpuls	446
19.6	Symmetrien in Quantenfeldtheorien	450
19.7	Aufgaben zu Kap. 19	453
20	Eichtheorien	459
20.1	Eichtransformationen und minimale Kopplung	460
20.2	Eichkovariante Ableitung	461
20.3	Nichtabelsche Eichtheorien	466
20.3.1	Lokale Eichinvarianz	467
20.3.2	Infinitesimale Eichtransformationen	469
20.3.3	Feldgleichungen	471
20.4	Quantenchromodynamik (QCD)	472
20.4.1	Die QCD ist eine SU(3)-Eichtheorie	475
20.4.2	Infinitesimale Flavor-Symmetrien und spontane Symmetriebrechung	476
20.5	Weinberg-Salam-Modell	477
20.6	Aufgaben zu Kap. 20	481
21	Konform-invariante Feldtheorien	483
21.1	Konforme Abbildungen	484
21.1.1	Konforme Abbildungen in $d \geq 3$ Dimensionen	487
21.1.2	Konforme Abbildungen in $d = 2$ Dimensionen	490
21.2	Konform invariante Feldtheorien (CFT)	491
21.2.1	Weyl-invariante Feldtheorien	491
21.2.2	Konsequenzen der konformen Invarianz	494
21.2.3	Konforme Algebra in d Dimensionen	496
21.2.4	Energie-Impuls-Tensor und Bessel-Hagen Ströme	498
21.3	Konforme Feldtheorien in $1 + 1$ Dimensionen	500
21.3.1	Witt-Algebra	500
21.3.2	Virasoro-Algebra	502
21.3.3	Zur Bedeutung der zentralen Ladung	506
21.3.4	Virasoro-Algebra für Entwicklungskoeffizienten	508
21.3.5	Darstellungen der Virasoro-Algebra	510

21.4	Anhang A: Zentrale Erweiterung der Virasoro-Algebra.	511
21.5	Aufgaben zu Kap. 21	513
Literatur.		515
Stichwortverzeichnis.		521