

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Zielsetzung der Arbeit . . . . .	4
1.2 Mathematische Grundlagen . . . . .	5
1.2.1 Der Monotoniebegriff . . . . .	5
1.2.2 Der Grenzwertbegriff . . . . .	6
1.2.3 Der Ableitungsbegriff . . . . .	8
1.2.4 Der Extremwertbegriff . . . . .	9
1.3 Aufbau . . . . .	11
<b>2 Theoretischer Hintergrund</b>	<b>13</b>
2.1 Grundvorstellungen . . . . .	14
2.1.1 Die Entwicklung des Grundvorstellungskonstrukts . . . . .	14
2.1.2 Die bisherige Verwendung von Grundvorstellungen . . . . .	19
2.1.3 Die Unterscheidung von Aspekten und Grundvorstellungen	20
2.1.4 Partielle und allgemeine Aspekte und Grundvorstellungen	22
2.1.5 Zusammenfassung . . . . .	28
2.2 Fehler und Fehlvorstellungen aus Sicht der Mathematikdidaktik	29
2.2.1 Fehler . . . . .	29
2.2.2 Fehlvorstellungen . . . . .	31
2.3 Concept Image und Concept Definition . . . . .	35
2.3.1 Die Entwicklung des Concept Image/Concept Definition Konstrukt . . . . .	35
2.3.2 Die bisherige Verwendung von Concept Image/Concept Definition . . . . .	37
2.3.3 Zusammenhang von Concept Image/Concept Definition mit Aspekten/Grundvorstellungen . . . . .	42
2.4 Prototypen . . . . .	47
2.4.1 Eine allgemeine Diskussion des Prototypenbegriffs . . . . .	47
2.4.2 Die bisherigen Studien zu Prototypen in der Mathematik	50
2.5 Conceptual Change Theorie . . . . .	53
2.5.1 Die Entwicklung der Conceptual Change Theorie . . . . .	54
2.5.2 Die bisherige Verwendung der Conceptual Change Theorie	61
2.6 Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	63

---

<b>3 Der Übergang Schule-Universität</b>	<b>65</b>
3.1 Allgemeiner Überblick . . . . .	65
3.2 Schwierigkeiten mit dem Verständnis zentraler Begriffe der Analysis . . . . .	67
3.2.1 Der Grenzwertbegriff . . . . .	67
3.2.2 Der Monotoniebegriff und konstante Funktionen . . . . .	71
3.2.3 Der Ableitungsbegriff . . . . .	72
3.2.4 Der Extrempunktbegriff . . . . .	77
3.2.5 Zusammenfassung . . . . .	81
3.3 Schwierigkeiten mit der mathematischen Arbeitsweise . . . . .	81
3.3.1 Logische Probleme mit der mathematischen Sprache . . . . .	84
3.3.2 Algorithmen . . . . .	85
3.3.3 Schwierigkeiten mit Beweisen . . . . .	86
3.3.4 Schwierigkeiten mit Definitionen . . . . .	88
3.3.5 Beispiele und Gegenbeispiele . . . . .	91
3.3.6 Zusammenfassung . . . . .	92
3.4 Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	92
<b>4 Forschungsdesiderata und daraus resultierende Forschungsfragen</b>	<b>95</b>
4.1 Zusammenfassung der Ergebnisse aus Theorie und Literatur . . . . .	95
4.2 Forschungsfragen . . . . .	98
<b>5 Zur Forschungsfrage 1</b>	<b>101</b>
5.1 Vorüberlegungen . . . . .	101
5.2 Aspekte des Extrempunktbegriffs . . . . .	101
5.2.1 Größter/Kleinster-Wert-Aspekt . . . . .	101
5.2.2 Monotoniewechsel-Aspekt . . . . .	102
5.2.3 Ableitung-Null-Aspekt . . . . .	108
5.2.4 Diskussion der Aspekte . . . . .	109
5.3 Grundvorstellungen des Extrempunktbegriffs . . . . .	109
5.3.1 Höchster/Tiefster-Punkt-Grundvorstellung . . . . .	110
5.3.2 Monotoniewechsel-Grundvorstellung . . . . .	111
5.3.3 Horizontale-Tangente-Grundvorstellung . . . . .	112
5.3.4 Verstärkungsfaktor-Null-Grundvorstellung . . . . .	114
5.4 Überblick über Aspekte und Grundvorstellungen zum Extrempunktbegriff . . . . .	116
<b>6 Zur Methodik der Untersuchung</b>	<b>119</b>
6.1 Die Methode der qualitativen Inhaltsanalyse . . . . .	120
6.2 Voruntersuchung . . . . .	121
6.2.1 Aufbau der Voruntersuchung . . . . .	122

---

6.2.2	Durchführung, Auswertung und Folgerungen aus der Vor- untersuchung	125
6.3	Planung der empirischen Studie	129
6.3.1	Spezifizierung fokussierter Leitfadeninterviews	132
6.3.2	Aufbau der Studie	133
6.3.3	Konstruktion der schriftlichen Befragung	134
6.3.4	Der Leitfaden der Interviews	140
6.4	Durchführung der empirischen Studie	143
6.4.1	Durchführung der schriftlichen Befragung	143
6.4.2	Durchführung der Interviews	144
6.4.3	Nebenstudie	147
6.5	Auswertung der Interviews	148
6.5.1	Die strukturierende qualitative Inhaltsanalyse	148
6.5.2	Auswertung mit dem Computer	150
6.5.3	Ablauf(modell) der inhaltlich strukturierenden Inhalts- analyse	152
6.5.4	Gütekriterien für qualitative Verfahren	165
6.6	Zusammenfassung	167
<b>7</b>	<b>Zu den Forschungsfragen 2 und 3</b>	<b>169</b>
7.1	Konstante Funktionen	170
7.1.1	Beispiele	170
7.1.2	Zusammenfassung	174
7.2	Randextrema	176
7.2.1	Beispiele	176
7.2.2	Zusammenfassung	177
7.3	Lokale Linearität	178
7.3.1	Beispiele	178
7.3.2	Zusammenfassung	186
7.4	Differenzierbarkeit als Voraussetzung	188
7.4.1	Beispiele	188
7.4.2	Zusammenfassung	189
7.5	$x_0$ Extremstelle impliziert $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geq 0$	189
7.5.1	Beispiele	189
7.5.2	Zusammenfassung	193
7.6	$f'(x_0) = 0$ impliziert $x_0$ ist Extremstelle	194
7.6.1	Beispiel	194
7.6.2	Zusammenfassung	196
7.7	Begriffsaufspaltung: Extremum, Maximum/Minimum, Hochpunkt/ Tiefpunkt	196
7.7.1	Beispiele	196

---

7.7.2	Zusammenfassung . . . . .	203
7.8	Allgemeiner Überblick und kurze Diskussion . . . . .	204
7.9	Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	208
<b>8</b>	<b>Diskussion</b>	<b>211</b>
8.1	Alltagserfahrungen . . . . .	211
8.2	Schulerfahrungen . . . . .	214
8.2.1	Kurze Analyse des bayerischen Lehrplans im Hinblick auf den Extrempunktbegriff . . . . .	216
8.2.2	Kurze Analyse der vier bayerischen Schulbücher hinsichtlich des Extrempunktbegriffs . . . . .	218
8.2.3	Die Rolle der Schule (Hauptuntersuchung) . . . . .	230
8.3	Vorstellungswandel im Übergang . . . . .	236
8.4	Fallanalyse der Nebenuntersuchung . . . . .	239
8.4.1	Lisa . . . . .	240
8.4.2	Florian . . . . .	243
8.4.3	Zusammenfassung der Nebenuntersuchung . . . . .	247
8.5	Zusammenfassung des Kapitels . . . . .	247
<b>9</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>249</b>
9.1	Rückblickende Reflexion . . . . .	249
9.2	Diskussion und Schlussfolgerungen . . . . .	250
9.2.1	Allgemeine Schlussfolgerungen . . . . .	251
9.2.2	Schlussfolgerungen zur theoretischen Rahmung . . . . .	252
9.2.3	Schlussfolgerungen für die Schule . . . . .	258
9.2.4	Schlussfolgerungen für die Hochschule . . . . .	261
9.2.5	Zusammenfassung und Folgerungen . . . . .	264
9.3	Ausblick . . . . .	267
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>271</b>