IN DIESEM KAPITEL

Geradengleichung und Logarithmusgesetze

Dreiecke und Trigonometrie

Skalare und Vektoren

Schwingungen

Ableitungen und Integrale

Rechnen mit komplexen Zahlen

Kapitel 1

Stets zuerst die mathematischen Grundlagen

Sie müssen kein Mathematiker sein, um die Herleitungen der Gesetze in der Wechselstromtechnik zu verstehen und die zugehörigen Übungsaufgaben berechnen zu können. Sie werden sich jedoch beim Austüfteln der Lösungen leichter tun, wenn Sie sich die wenigen erforderlichen mathematischen Grundlagen in Erinnerung rufen und diese wieder aktualisieren. Einzig die Rechnung mit komplexen Zahlen ist vielleicht neu für Sie, da diese nicht Bestandteil der gymnasialen Oberstufe ist, sondern erst im Studium vermittelt wird. Nachfolgend sind die wichtigsten mathematischen Grundlagen zusammengefasst, die Sie zum Verstehen der Herleitungen und zum Lösen der Aufgaben in der Wechselstromtechnik benötigen. Also los, auf geht's in die erste Runde!

Geradengleichungen, wohin das Auge blickt

In der Wechselstromtechnik wird nicht nur mit Zahlen gerechnet. Manchmal ist es auch entscheidend, dass Sie sich mithilfe einer geeigneten Grafik ein erstes Bild der möglichen Lösungen machen. Dabei stehen Beziehungen zwischen physikalischen Größen im Vordergrund, die sich durch Kurven darstellen lassen. Die *Gerade* ist eine besonders einfache Kurve. In Abbildung 1.1 ist die Hauptform einer Geraden für Sie dargestellt.

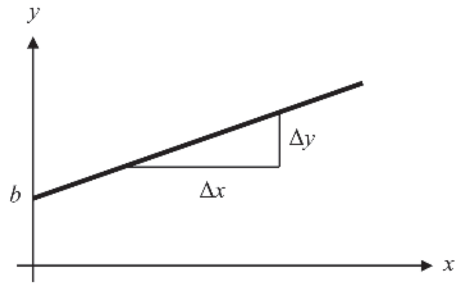

Abbildung 1.1: Hauptform der Geraden

Für die in Abbildung 1.1 skizzierte Gerade gilt die Gleichung

$$y = m \cdot x + b$$

Die Variablen x und y sind die Koordinaten eines beliebigen Geradenpunkts. Die Größe m ist die *Steigung* der Geraden, während b angibt, an welcher Stelle die Gerade die y-Achse schneidet. Für die Steigung m der Geraden gilt der Zusammenhang

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ohne den Logarithmus geht es nicht

Auch der *Logarithmus* ist eine wichtige mathematische Grundlage für die Wechselstromtechnik – vor allem, wenn es um die Verstärkung elektrischer Signale geht, bei Frequenzgängen und deren Ortskurven. Eine Zahl der Form »$\log_a b$« heißt Logarithmus und wird als »Logarithmus b zur Basis a« ausgesprochen. Der Logarithmus ist als eindeutige Lösung x der Gleichung $b = a^x$ definiert. Damit gilt

$$b = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a b$$

Weiterhin gilt für den Logarithmus eines Produkts die Regel

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

Der Logarithmus eines Produkts ist also gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. Für den Logarithmus eines Bruchs gilt eine entsprechende Regel:

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Exponenten multiplizierten Logarithmus der Basis:

$$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a u$$

Daraus folgt direkt, wie es um den Logarithmus einer Wurzel bestellt ist:

$$\log_{\mathrm{a}} \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_{\mathrm{a}} u$$

Denken Sie daran, dass unter dem Wurzelzeichen keine negative Zahl stehen darf!

Den Logarithmus zur Basis e bezeichnen wir als *natürlichen Logarithmus*. Er hat ein eigenes mathematisches Symbol:

$$\log_{\mathrm{e}} b = \ln b$$

Auch die Exponentialfunktion spielt mit

Die *Exponentialfunktion* spielt eine Rolle beim Rechnen mit komplexen Zahlen, bei der Darstellung von Abkling- und Sättigungsprozessen und bei Schwingungen. Die wichtigste Exponentialfunktion, die sogenannte *e-Funktion*

$$y = e^x$$

ist von besonderer Bedeutung. Dabei ist die Basis $e = 2{,}781\ldots$ die Euler'sche Zahl. Während die Basis e fest ist, ist der Exponent x variabel. Allgemein leitet sich die Exponentialfunktion aus der Verallgemeinerung des Begriffs Potenz ab, das heißt aus der Form

$$a^{\mathrm{x}}$$

mit positiver Basis $a > 0$ und $a \neq 1$ und beliebig reellen Werten x für den Exponenten. Für die Berechnung gelten folgende Gesetze:

$$a^{\mathrm{m}} \cdot a^{\mathrm{n}} = a^{\mathrm{m+n}}$$

Werden die Basen multipliziert, werden die Exponenten addiert.

$$\frac{a^{\mathrm{m}}}{a^{\mathrm{n}}} = a^{\mathrm{m-n}}$$

Werden die Basen dividiert, werden die Exponenten subtrahiert.

$$(a^{\mathrm{m}})^{\mathrm{n}} = a^{\mathrm{m \cdot n}}$$

Werden die Basen potenziert, werden die Exponenten multipliziert.

Übrigens, die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Dreiecke und deren Winkel braucht das Land

In einigen Aufgaben zur Wechselstromtechnik, wenn beispielsweise Zeigerdiagramme, Spannungs- oder Widerstandsdreiecke zum Einsatz kommen, müssen Sie Strecken berechnen, deren Längen und Winkel in Beziehung zueinander stehen, oder die Winkel selbst – beispielsweise um die Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungszeigern zu ermitteln. Dann spielen Dreiecke eine wichtige Rolle. Abbildung 1.2 zeigt ein beliebiges *Dreieck* mit den Seitenlängen a, b und c sowie den Winkeln α, β und γ.

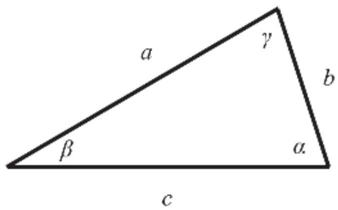

Abbildung 1.2: Beliebiges Dreieck mit Seitenlängen und Winkeln

Die *Winkelsumme* in einem beliebigen Dreieck ist 180°:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Kennen Sie zwei Winkel des Dreiecks, können Sie den dritten Winkel berechnen.

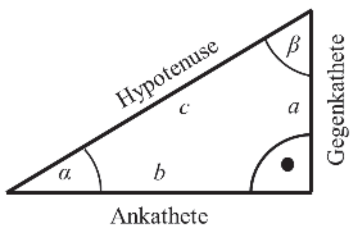

Abbildung 1.3: Rechtwinkliges Dreieck

Rechtwinklige Dreiecke wie in Abbildung 1.3 sind ganz besondere Dreiecke. Neben dem *rechten Winkel* von 90° besitzt ein rechtwinkliges Dreieck zwei weitere Winkel, die mit α und β gekennzeichnet sind. Nehmen Sie den Winkel α als Ausgangspunkt, so gelten folgende Bezeichnungen:

- ✔ Die *Gegenkathete a* ist die Seite, die dem Winkel α gegenüberliegt.
- ✔ Die *Ankathete b* ist die Seite, die an den Winkel α angrenzt.
- ✔ Die *Hypotenuse c* ist die lange Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt.

Für das rechtwinklige Dreieck sind die *trigonometrischen Funktionen* definiert:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}\,;\ \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}\,;\ \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Weiterhin gilt der berühmte *Satz des Pythagoras* (um 570 v. Chr.) für das rechtwinklige Dreieck: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate $a^2 + b^2$ gleich dem Quadrat der Hypotenuse c^2. Es gilt also:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Diesen Satz werden Sie brauchen, um aus den Zeigerdiagrammen und Spannungs- sowie Widerstandsdreiecken (allesamt rechtwinklige Dreiecke) die Gleichungen zur Berechnung der Größen einer Wechselstromschaltung abzuleiten.

Ein weiterer wichtiger Lehrsatz aus der Geometrie geht auf einen von Thales von Milet (625–547 v. Chr.) konstruierten Kreis, den *Thaleskreis*, zurück. Der zugehörige *Satz des Thales* dient zur Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke. Der Lehrsatz besagt, dass alle Winkel in einem Halbkreisbogen, dem Thaleskreis, rechtwinklig sind. Demnach können Sie ein Dreieck aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises und einem weiteren Punkt des Halbkreises zur Konstruktion des gewünschten rechtwinkligen Dreiecks heranziehen. Auch dieser Satz hilft Ihnen, unbekannte Größen in einer Wechselstromschaltung zu bestimmen.

Und dann noch Skalare und Vektoren

In der Wechselstromtechnik vorkommende Größen wie Spannungen oder Ströme werden in Zeigerdiagrammen mit ihrer Stärke (das heißt ihrem Betrag) und ihrer Richtung dargestellt. Deshalb benötigen Sie Kenntnisse zu Skalaren und Vektoren.

Ein *Skalar* ist eine Größe, die allein durch einen Zahlenwert (Betrag) charakterisiert ist. So ist der physikalische Druck eine skalare Größe mit einem Wert (zum Beispiel 1 bar). Auch die Zeit ist eine skalare Größe. Ein *Vektor* hingegen ist eine Größe, die einen Betrag und eine Richtung besitzt. So ist die Geschwindigkeit ein Vektor, weil ihr Betrag alleine nicht ausreicht, um ihre Wirkung zu beschreiben.

Eine skalare Größe wird mit kursivem Buchstaben gekennzeichnet (zum Beispiel p für den Druck). Vektorielle Größen werden wir in diesem Buch stets mit einem Pfeil über dem Buchstaben kennzeichnen (zum Beispiel $\vec{E}$ für das elektrische Feld).

Der Vektor $\vec{E}$, in Abbildung 1.4 als dicker Strich mit Pfeilspitze gezeichnet, ist durch seinen Betrag (Länge des Pfeils) und seine Richtung charakterisiert. Um den Richtungssinn anzuzeigen, geben Sie an, wie weit Sie in die x-Richtung (E_x), wie weit in die y-Richtung (E_y) und wie weit in die z-Richtung (E_z) gehen müssen, um vom Anfang des Vektors bis zu dessen Spitze zu gelangen. Die *komponentenweise Darstellung* eines Vektors lautet damit

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

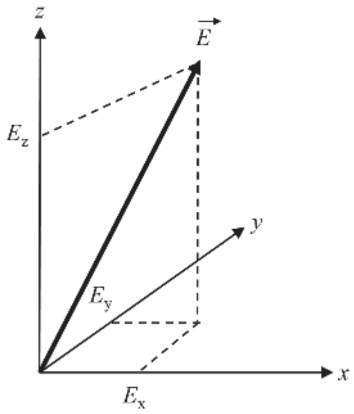

Abbildung 1.4: Vektor im kartesischen Koordinatensystem

Die Länge eines Vektors wird als sein *Betrag* bezeichnet. Diesen kennzeichnen Sie durch zwei senkrechte Striche (Betragszeichen) und schreiben $|\vec{E}|$. Häufig schreiben Mathematiker dafür vereinfacht nur E, also ohne Pfeil über dem Formelzeichen und damit folglich auch ohne die zwei senkrechten Striche. Um den Betrag des Vektors $\vec{E}$ aus seinen Komponenten zu bestimmen, gilt die Beziehung

$$E = |\vec{E}| = \left\| \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{{E_x}^2 + {E_y}^2 + {E_z}^2}$$

Die *Addition von Vektoren* erfolgt rechnerisch, indem Sie die einzelnen Komponenten der Vektoren addieren:

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} E_{ges,x} \\ E_{ges,y} \\ E_{ges,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1,x} + E_{2,x} \\ E_{1,y} + E_{2,y} \\ E_{1,z} + E_{2,z} \end{pmatrix}$$

Die additive Überlagerung beispielsweise zweier elektrischer Felder $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ verursacht durch die Ladungen Q_1 und Q_2 können Sie auch grafisch durchführen, wie es in der linken Darstellung in Abbildung 1.5 gezeigt wird.

Um den resultierenden Summenvektor $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ grafisch zu bestimmen, wird der Vektor $\vec{E}_1$ parallel vom Punkt P aus entlang des Vektors $\vec{E}_2$ verschoben, bis er mit seinem Anfang an der Spitze des Vektors $\vec{E}_2$ angelangt ist, wie dies die linke Darstellung in Abbildung 1.5 zeigt. Dort wird er durch eine gestrichelte Linie eingezeichnet. Der Summenvektor $\vec{E}$ verläuft dann vom Anfangspunkt des Vektors $\vec{E}_2$ zur Spitze des parallel verschobenen Vektors $\vec{E}_1$.

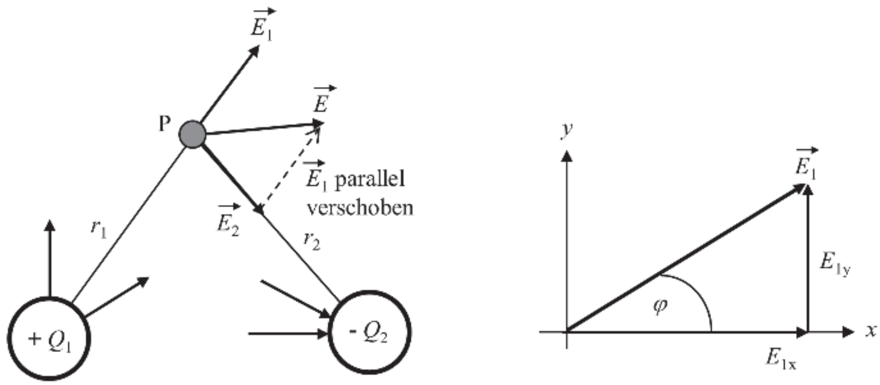

Abbildung 1.5: Addition und Länge von Vektoren

Die Bestimmung des Vektorbetrags, also die Länge beispielsweise des Vektors $\vec{E}_1$, ist ein Spezialfall der Vektoraddition, wie rechts in Abbildung 1.5 gezeigt. Sie können sich die Komponenten $E_{1,x}$ und $E_{1,y}$ als Vektoren $\vec{E}_{1x}$ und $\vec{E}_{1y}$ entlang der x- beziehungsweise y-Achse vorstellen. Der Vektor $\vec{E}_1$ wird dann aus den beiden Komponenten zusammengesetzt, ist also die Summe dieser beiden senkrecht zueinander stehenden Teilvektoren $\vec{E}_{1x}$ und $\vec{E}_{1y}$.

Schwingungen gehören zur Wechselstromtechnik

Die wichtigsten in der Wechselstromtechnik verwendeten trigonometrischen Funktionen sind die *Sinusfunktion* und die *Kosinusfunktion*. Mit ihrer Hilfe können Sie wiederkehrende beziehungsweise periodische Ereignisse – wie den zeitlichen Verlauf einer Spannungs- oder Stromschwingung in einem elektrischen Schwingkreis – beschreiben. Die allgemeine Form für eine (harmonische) Schwingung ist definiert als

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Darin ist A die *Amplitude* der Schwingungsfunktion $s(t)$. $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ ist die *Kreisfrequenz* (in Winkeleinheiten pro Sekunde). Sie wird benutzt, um nicht in jeder Gleichung die umständliche Schreibweise mit der Schwingungsdauer T im Nenner verwenden zu müssen. Diese Bezeichnung kommt daher, weil sich jede Schwingung als eine Projektion einer Kreisbewegung auf einer Achse darstellen lässt (wie Sie dies später bei den Kreis- und Liniendiagrammen sehen werden). Sie gibt also auch an, wie schnell sich etwas dreht.

Verwechseln Sie nicht die Kreisfrequenz ω mit der *Frequenz* f! Die Kreisfrequenz ω gibt den von einem sich drehenden Zeiger der Länge eins überstrichenen Winkel pro Sekunde an und wird deshalb in der Mechanik auch als Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Frequenz f hingegen gibt die Anzahl der Schwingungsperioden pro Sekunde an. Dabei gilt der Zusammenhang

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

In praktischen Anwendungen werden die Sinus- und Kosinusfunktion hauptsächlich als Funktion eines mit dem Bogenmaß x bezeichneten Winkels und in der Schreibweise $y = \sin x$ beziehungsweise $y = \cos x$ dargestellt.

In Abbildung 1.6 sind sowohl eine Sinusfunktion (durchgezogene Linie) als auch eine Kosinusfunktion (gestrichelte Linie) in dieser Weise aufgezeigt. Neben dem typischen Verlauf ist für Sie wichtig, charakteristische Funktionswerte zu diesen beiden trigonometrischen Funktionen bei unterschiedlichen Winkeln zu kennen, wie diese Tabelle 1.1 zeigt.

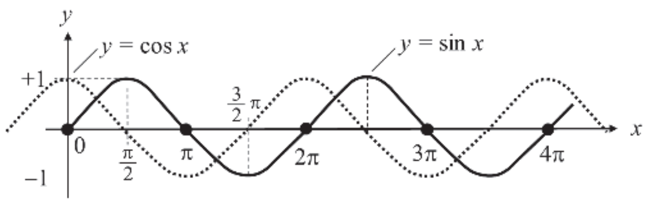

Abbildung 1.6: Sinus- und Kosinusfunktion

x	**0**	$\frac{\pi}{2}$	**π**	$\frac{3}{2}\pi$	**2π**	**4π**
$y_{\sin}$	0	+1	0	−1	0	0
$y_{\cos}$	+1	0	−1	0	+1	+1

Tabelle 1.1: Funktionswerte der Sinus- und Kosinusfunktion

Auch werden Ihnen folgende trigonometrische Beziehungen von Nutzen sein:

$$\cos\ x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\ x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos\ 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos\ 2x) \qquad -\sin\ x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \qquad \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x - y) - \cos(x + y)\}$$

Auch Ableitungen werden gebraucht

Ableitungen nach der Zeit t (auch *Differenziationen* genannt) tauchen in der Elektrotechnik immer wieder auf, so auch in der Wechselstromtechnik. Doch keine Angst! Am Beispiel des Kondensators können Sie ganz leicht verstehen, wie Ihnen die zeitliche Änderung einer Größe Auskunft zu wichtigen Fragestellungen gibt. In Abbildung 1.7 erkennen Sie an einem Beispiel, wie die Kondensatorspannung $u_C(t)$ mit der Zeit zunimmt.

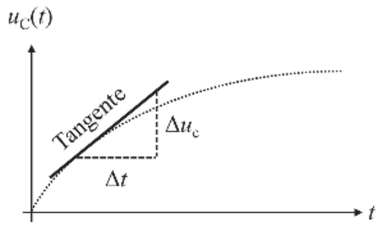

Abbildung 1.7: Ableitungen und die Tangente am Beispiel einer Kondensatoraufladung

Nun können Sie die Änderung der Kondensatorspannung $\varDelta u_C$ gegenüber der Zeitänderung $\varDelta t$ angeben, also das Verhältnis $\frac{\varDelta u_C}{\varDelta t}$. Ist die Änderung der Zeit größer als die Änderung der Spannung, also es gilt $\varDelta t > \varDelta u_C$, so wird der Verlauf der Spannung mit der Zeit flacher. Gilt umgekehrt $\varDelta u_C > \varDelta t$, so wird der Verlauf der Kennlinie steiler. Ein mathematisches Maß für die Steilheit einer Kurve ist die Steigung der *Tangente* m_T. Sie ist gegeben durch

$$m_T \approx \frac{\varDelta u_C}{\varDelta t} \xrightarrow{\varDelta t \to 0} \frac{du_C(t)}{dt} = \dot{u}_C(t)$$

Je größer diese Steigung m_T ist, desto schneller wächst also die Kondensatorspannung $u_C(t)$ mit der Zeit t an. Im Grenzfall sehr kleiner Zeiträume $\varDelta t$ ($\to 0$) entspricht die Tangentensteigung m_T der Ableitung $\dot{u}_C(t)$ nach der Zeit t.

Ableitungen nach der Zeit werden mit einem Punkt über der betreffenden Funktion geschrieben, zum Beispiel $\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}$. Ableitungen nach anderen Variablen werden häufig durch einen Apostroph gekennzeichnet, zum Beispiel $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Ein weiteres Beispiel für Ableitungen zeigen auch die Bewegungsvorgänge eines Körpers. Die Beschleunigung a eines Körpers erweist sich als die erste Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t. Sie schreiben also

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Und erinnern Sie sich noch aus der Schule, dass die Geschwindigkeit v die zeitliche Änderung des Orts x nach der Zeit t ist? Auch hier gilt also

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Setzen Sie diese Gleichung in die Beschleunigung a ein, so erhalten Sie

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

Die Beschleunigung a ist also die zweite Ableitung des Orts x nach der Zeit t.

Wichtige Ableitungsregeln für die Wechselstromtechnik:

- ✔ $\frac{d}{dx}c = 0$ (Konstanten fallen bei der Differenziation weg)
- ✔ $\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$
- ✔ $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- ✔ $\frac{d}{dx}\cos\ x = -\sin x$

Folgende Ableitungsregeln sollten Sie stets im Kopf behalten:

- ✔ **Kettenregel:**

$\dot{f}[g(t)] = f'(g) \cdot \dot{g}(t)$ oder $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$

Wenn Sie eine aus den beiden Funktionen $f(g)$ und $g(t)$ zusammengesetzte (verkettete) Funktion ableiten wollen, müssen Sie zuerst die äußere Funktion $f(g)$ ableiten und erhalten die äußere Ableitung $\frac{df}{dg} = f'(g)$. Anschließend leiten Sie die innere Funktion $g(t)$ ab und erhalten die innere Ableitung $\frac{dg}{dt} = \dot{g}(t)$. Die abgeleitete verkettete Funktion ist dann das Produkt von äußerer und innerer Ableitung, sodass Sie letztlich $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$ erhalten.

- ✔ **Produktregel:**

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Die irre tolle Integration

Mithilfe der Integration können Sie die Fläche unter einer beliebigen Funktion berechnen. In Abbildung 1.8 ist der Verlauf einer Spannung $u(t)$ aufgezeigt. Um die Fläche im Intervall $[a,b]$ zwischen der Funktion und der t-Achse zu berechnen, benötigen Sie das *Flächenintegral*

$$A = \int_a^b f(t) \cdot dt$$

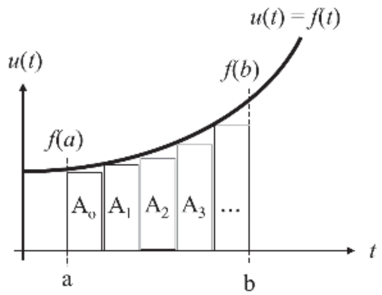

Abbildung 1.8: Integration und Flächenintegral

Anschaulich ist die Integration nichts anderes, als würden Sie gleichmäßige Kästchen zwischen dem Funktionsverlauf $u(t)$ und der t-Achse einzeichnen – wie die Kästchen A_0, A_1, A_2 ... in Abbildung 1.8. Summieren Sie die Flächen aller Kästchen auf, so erhalten Sie annähernd die Fläche zwischen der Funktion und der t-Achse. Je kleiner Sie nun die Breite der Kästchen machen, desto genauer wird Ihre Flächenberechnung. Sie erkennen daran, dass die Integration eigentlich nichts anderes als eine verallgemeinerte Summation darstellt.

$F(x)$ ist eine *Stammfunktion* von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Dieser Zusammenhang zwischen der Ableitung und der Integration wird wie folgt dargestellt:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

Das dargestellte Integrationszeichen zeigt ein sogenanntes *unbestimmtes Integral*.

Beim *unbestimmten Integral* werden keine Integrationsgrenzen angegeben. Die Integrationskonstante C müssen Sie über Anfangs- oder Randbedingungen bestimmen.

Das *bestimmte Integral* ist gegeben durch

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

Es ergibt sich aus der zugehörigen Stammfunktion, die am Integrationsanfang (gekennzeichnet durch die untere Integrationsgrenze a) beziehungsweise am Integrationsende (gekennzeichnet durch die obere Integrationsgrenze b) ausgewertet wird.

Einige nützliche Funktionen und ihre Stammfunktionen:

- ✔ $\int c \cdot dx = c \cdot x + C$
- ✔ $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- ✔ $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$
- ✔ $\int \sin(ax) \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax) + C$
- ✔ $\int \cos(ax) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) + C$

Das Wunder der komplexen Rechnung

Komplexe Zahlen verwenden Sie, um Aufgaben in der Wechselstromtechnik komfortabler berechnen zu können. Indem Sie sinusförmige Wechselspannungen als komplexe Größen darstellen, lässt sich beispielsweise die Berechnung des elektrischen Stroms oder der Wirk- und Blindleistung erheblich vereinfachen. Insbesondere das Zusammenwirken mehrerer sinusförmiger Spannungen und Ströme, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten ihre Nulldurchgänge haben – also gegeneinander phasenverschoben sind – lässt sich durch komplexe Zahlen wesentlich einfacher darstellen, als wenn Sie diese mithilfe trigonometrischer Funktionen berechnen würden. Lassen Sie sich überraschen, wie einfach das geht!

Die Historie der komplexen Zahl

Der Begriff der komplexen Zahl geht auf Leonhard Euler (1707–1783) und Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855) zurück. Gauß war ein an der Universität in Göttingen weltberühmt gewordener Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Aufgrund seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er zu Lebzeiten als »Princeps Mathematicorum« – also als »Chef unter den Mathematikern«. In seiner Doktorarbeit kam er 1799 zur Erkenntnis, dass jede algebraische Gleichung mindestens eine (reelle oder komplexe) Lösung besitzt. Gauß ist übrigens auch der Namensgeber für die geometrische Darstellung komplexer Zahlen: In der *Gauß'schen Zahlenebene* werden der reelle Anteil der komplexen Zahl auf der x-Achse und der imaginäre Anteil auf der y-Achse aufgetragen.

Einen weiteren Meilenstein bei den komplexen Zahlen verdanken wir dem deutschen Gelehrten Carl August Rudolph Steinmetz (1865–1923). Dieser war früh nach Amerika ausgewandert und wurde dort Leiter der Berechnungsabteilung bei der neu gegründeten Firma »General Electric«. Im Jahre 1894 führe er erstmals die *komplexe Rechnung* in die Wechselstromtechnik ein. Auf Carl Steinmetz geht übrigens die in der Elektrotechnik übliche Bezeichnung »j« statt »i« für die *imaginäre Einheit* zurück – weil er eine Verwechslung mit der Bezeichnung des Wechselstroms $i(t)$ vermeiden wollte. Die imaginäre Einheit i hingegen wird Leonhard Euler (1707–1783) zugeschrieben, der die bekannte Euler'sche Formel im Jahre 1748 veröffentlichte.

Zeigerdarstellung in der Gauß'schen Zahlenebene

In der Mathematik ist die einfache Gleichung

$$x^2 = +1$$

im Bereich der reellen Zahlen lösbar und führt zu den Lösungen

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Doch die ebenso einfache Gleichung

$$x^2 = -1$$

ist im reellen Zahlenbereich nicht lösbar, da das Quadrat einer positiven oder negativen reellen Zahl stets größer oder gleich null wird. Die Lösung dieser Gleichung würde zum Ziehen der Wurzel aus der Zahl −1 führen, also:

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Im reellen Zahlenbereich ist diese Operation nicht erlaubt, wie Sie sich vielleicht noch aus Schulzeiten her erinnern. Damit die Gleichung trotzdem lösbar wird, musste der reelle Zahlenbereich um weitere Zahlen erweitert werden. Dies führt Sie in die Welt der *komplexen Zahlen*. Die komplexen Zahlen erweitern den Zahlenbereich der reellen Zahlen so, dass die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar wird. Dies gelingt durch die Einführung der *imaginären Einheit* i mit der Eigenschaft: $\mathrm{i}^2 = -1$. Eine komplexe Zahl $\underline{Z}$ ist damit die additive Verknüpfung einer reellen Zahl R mit der »imaginären« Zahl $\mathrm{i} \cdot X$ (Produkt aus der reellen Zahl X und der imaginären Einheit i):

$$\underline{Z} = R + \mathrm{i} \cdot X$$

Dies ist die sogenannte *Normalform* der komplexen Zahl, mit ihren beiden kartesischen Koordinaten R und X. Wie Sie sehen, wird die komplexe Zahl $\underline{Z}$ durch Unterstreichen gekennzeichnet. R ist der *Realteil* und X der *Imaginärteil*.

Aus mathematischen Lehrbüchern kennen Sie den Realteil mit X und den Imaginärteil mit Y gekennzeichnet, sodass für die komplexe Zahl allgemein gilt: $\underline{Z} = X + \mathrm{i} \cdot Y$.

In den Anwendungen der Wechselstromtechnik wird die komplexe Zahl $\underline{Z}$ jedoch für den komplexen Wechselstromwiderstand verwendet, wodurch der Realteil als Wirkwiderstand R und der Imaginärteil als Blindwiderstand X definiert wird. Wird also in der

Wechselstromtechnik der Wechselstromwiderstand mit $\underline{Z}$ bezeichnet, gilt für den Leitwert die Bezeichnung $\underline{Y}$. Passen Sie also auf, dass Sie dies nicht verwechseln und sich an die Bezeichnungen der Wechselstromtechnik anpassen!

Die komplexe Zahl kann groß- oder kleingeschrieben sein. Ist die komplexe Zahl zeitabhängig – wie in der Wechselstromtechnik im Falle sinusförmiger Wechselgrößen –, so wird sie kleingeschrieben, andernfalls wird sie großgeschrieben. Wegen der Verwechslungsgefahr mit dem Strom $i(t)$ wird in der Elektrotechnik für die imaginäre Einheit ein j statt eines i verwendet. Eine *komplexe Zahl* in der Wechselstromtechnik sieht dann so aus:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$$

Für die *imaginäre Einheit* j gelten folgende wichtige Zusammenhänge, die Sie für die Rechnung mit komplexen Zahlen benötigen:

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1} \qquad \mathrm{j}^2 = -1 \qquad -\mathrm{j}^2 = +1$$

Die komplexe Zahl $\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$ wird in der *Gauß'schen Zahlenebene* durch einen »Punkt« repräsentiert und lässt sich grafisch darstellen wie in Abbildung 1.9 zu sehen. Demnach können Sie die komplexe Zahl auch als Zeiger auffassen, der durch den Koordinatenursprung gehend auf den Punkt $\underline{Z}$ zeigt. Der Realteil R der komplexen Zahl wird auf der Abszisse (x-Achse) und der Imaginärteil X auf der Ordinate (y-Achse) aufgetragen.

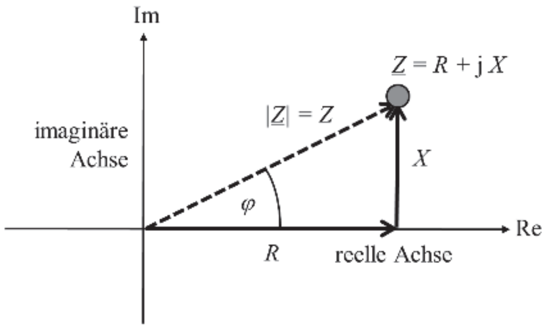

Abbildung 1.9: Darstellung einer komplexen Zahl

Für komplexe Zahlen in *Normalform* gelten folgende Regeln:

- ✔ $\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$ — Komplexe Zahl (mit kartesischen Koordinaten)
- ✔ $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ — Betrag der komplexen Zahl
- ✔ $\underline{Z}^* = R - \mathrm{j} \cdot X$ — Konjugiert komplexe Zahl
- ✔ $R = Z \cdot \cos\varphi$ — Realteil
- ✔ $X = Z \cdot \sin\varphi$ — Imaginärteil
- ✔ $\varphi = \arctan\dfrac{X}{R}$ — Winkel oder Phase

Zum Verständnis der Regel zur Bestimmung des Winkels $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$ müssen Sie sich lediglich die Lage des Winkels in Abbildung 1.9 anschauen. Dort sind die Ankathete mit R und die Gegenkathete mit X gegeben. Damit lässt sich der Winkel φ im gegebenen rechtwinkligen Dreieck mithilfe der trigonometrischen Funktion

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{X}{R}$$

definieren. Stellen Sie nach dem gesuchten Winkel φ um, so erhalten Sie

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}$$

Die *konjugiert komplexe Zahl* $\underline{Z}^*$ ist ein Zeiger, der durch Spiegelung des Zeigers $\underline{Z}$ an der x-Achse entsteht, wie dies Abbildung 1.10 zeigt.

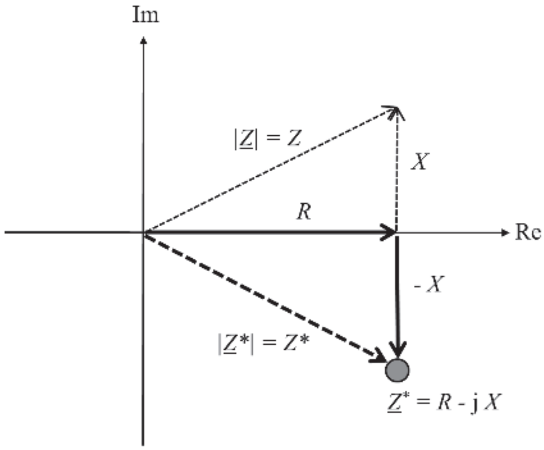

Abbildung 1.10: Konjugiert komplexe Zahl

Aus der Normalform der komplexen Zahl lässt sich die *trigonometrische Form* ableiten:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X = Z \cdot \cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot Z \cdot \sin\ \varphi = Z \cdot (\cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi)$$

Die entsprechende *Exponentialform* erhalten Sie mithilfe der berühmten *Euler'schen Gleichung*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi} = \cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi$$

Demnach lässt sich eine komplexe Zahl $\underline{Z}$ mittels Betrag und Winkel in *Polarkoordinaten* darstellen als

$$\underline{Z} = Z \cdot (\cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi) = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi}$$

Wegen

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot \varphi} = \cos\ \varphi - \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi$$

lautet die zugehörige konjugiert komplexe Zahl

$$\underline{Z}^* = Z \cdot (\cos\ \varphi - \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi) = Z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\varphi}$$

Darin ist $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ der Betrag und $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$ der Winkel der komplexen Zahl $\underline{Z}$. Abbildung 1.11 zeigt diese Zusammenhänge in der Gauß'schen Zahlenebene.

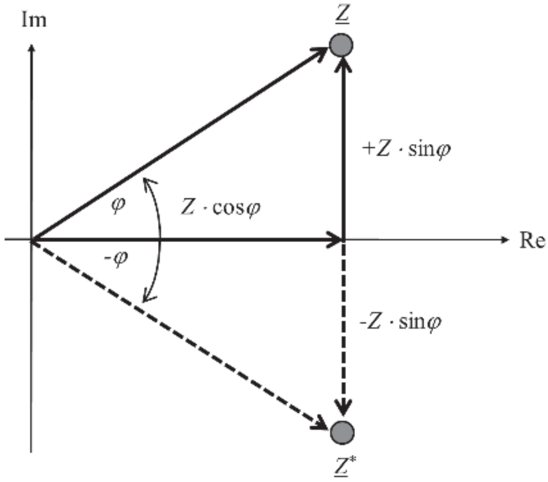

Abbildung 1.11: Komplexe Zahl in Polarkoordinaten

Alle komplexen Zahlen $\underline{Z}$ mit $|\underline{Z}| = 1$ liegen auf einem Kreis mit dem Radius $r = 1$, dem *Einheitskreis* um den Ursprung.

Abbildung 1.12 zeigt Ihnen, was geschieht, wenn ein komplexer Zeiger mit dem Betrag 1 um verschiedene Winkel φ gedreht wird. Sie erhalten hierfür die folgenden Ergebnisse:

- ✔ $\varphi = 0°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 0° + \mathrm{j} \cdot \sin\ 0°) = 1 + 0 = +1$
- ✔ $\varphi = 90°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 90° + \mathrm{j} \cdot \sin\ 90°) = 0 + \mathrm{j} \cdot 1 = +\mathrm{j}$
- ✔ $\varphi = 180°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 180° + \mathrm{j} \cdot \sin\ 180°) = -1 + 0 = -1$
- ✔ $\varphi = 270°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 270° + \mathrm{j} \cdot \sin\ 270°) = 0 - \mathrm{j} = -\mathrm{j}$

Sie erkennen daran, dass die Multiplikation der komplexen Zahl $\underline{Z}$ mit dem Faktor $+\mathrm{j}$ eine Drehung des Zeigers um $+90°$ (oder entsprechend um $+\frac{\pi}{2}$) im mathematisch positiven Sinne, also im Gegenuhrzeigersinn, bewirkt.

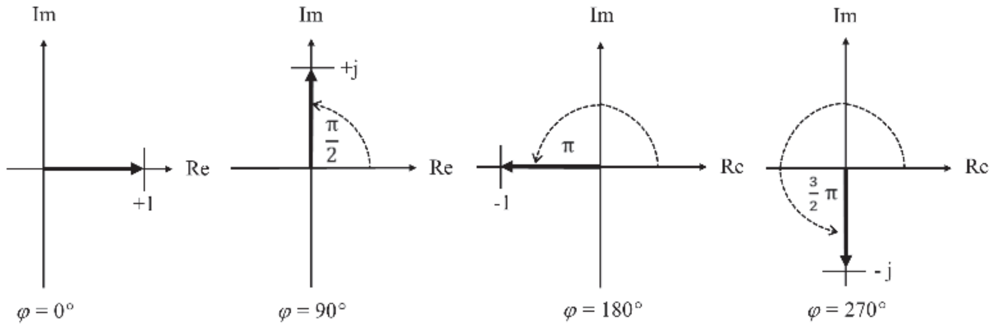

Abbildung 1.12: Wirkung der Drehung des Zeigers

Zusammenfassung der Darstellungsformen einer komplexen Zahl:

- ✔ $\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$ — Normalform (kartesische Koordinaten)
- ✔ $\underline{Z} = Z \cdot (\cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi)$ — Trigonometrische Form
- ✔ $\underline{Z} = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi}$ — Exponentialform
- ✔ $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ — Betrag der komplexen Zahl
- ✔ $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$ — Winkel oder Phase der komplexen Zahl

Während die Normalform der komplexen Zahl $\underline{Z}$ mit den kartesischen Koordinaten Realteil R und Imaginärteil X definiert ist, liegen sowohl der trigonometrischen Form wie der Exponentialform die Polarkoordinaten Betrag Z und Winkel φ zugrunde. Deshalb werden die trigonometrische Form wie auch die Exponentialform häufig als Polarform bezeichnet; die Exponentialform gilt als Kurzschreibweise der trigonometrischen Form.

Da die vorgestellten Darstellungsformen der komplexen Zahl häufig nebeneinander verwendet werden, folgt eine kurze Anleitung, wie Sie die eine in die jeweils andere Darstellungsform umrechnen können.

Umrechnung der Darstellungsformen komplexer Zahlen

Wenn Sie die trigonometrische oder die Exponentialform in die Normalform umrechnen wollen, geschieht dies durch die Gleichung

$$\underline{Z} = Z \cdot (\cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi) = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi} = R + \mathrm{j} \cdot X$$

Links in der Gleichung sehen Sie die trigonometrische Form, in der Mitte die Exponentialform und rechts die Normalform mit deren kartesischen Koordinaten. Zur Berechnung der ersten beiden Formen aus der Normalform benötigen Sie folgende Gleichungen zur Berechnung des zugehörigen Betrags und der Phase

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}$$

Bei der Winkelbestimmung verwenden Sie am besten stets eine Lageskizze oder die von den jeweiligen Quadraten abhängige Gleichung:

Für den I. Quadranten: $\varphi = \text{arc } \tan \frac{X}{R}$

Für den II.und III. Quadranten: $\varphi = \text{arc } \tan \frac{X}{R} + \pi$

Für den IV. Quadranten: $\varphi = \text{arc } \tan \frac{X}{R} + 2 \cdot \pi$

Hierbei müssen Sie beachten, dass die Tangensfunktion für Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ definiert ist. Demnach liegen die Werte der zugehörigen Umkehrfunktion, also des Arkustangens, für negative Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 und für positive Winkel zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$, wie dies Abbildung 1.13 zeigt.

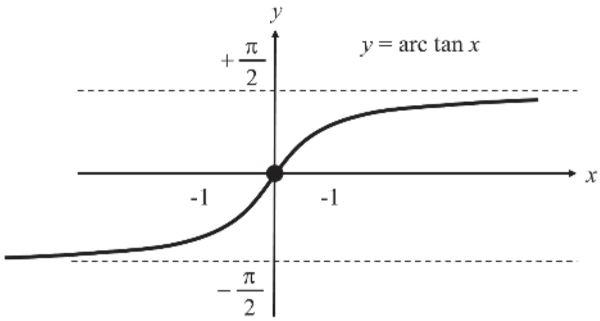

Abbildung 1.13: Arkustangensfunktion

Allerdings werden in vielen Anwendungen auch die Winkel im I. und II. Quadranten positiv gezählt, im III. und IV. Quadranten dagegen negativ, so wie es Abbildung 1.11 aufzeigt. Damit würde gelten:

Für den I. und IV. Quadranten: $\varphi = \text{arc } \tan \frac{X}{R}$

Für den II. Quadranten: $\varphi = \text{arc } \tan \frac{X}{R} + \pi$

Für den III. Quadranten: $\varphi = \text{arc } \tan \frac{X}{R} - \pi$

Umgekehrt können Sie aus der trigonometrischen Form stets die Normalform bestimmen, indem Sie $R = Z \cdot \cos\varphi$ und $X = Z \cdot \sin\varphi$ setzen.

Und nun weiter zu den wesentlichen Rechenregeln für komplexe Zahlen.

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Für zwei komplexe Zahlen

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j} \cdot X_1$$

und

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j} \cdot X_2$$

gelten die *Additions- und Subtraktionsregeln*:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (R_1 + R_2) + \mathrm{j} \cdot (X_1 + X_2)$$

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (R_1 - R_2) + \mathrm{j} \cdot (X_1 - X_2)$$

Addition und Subtraktion werden also komponentenweise durchgeführt. Mit anderen Worten, Sie addieren oder subtrahieren zwei komplexe Zahlen, indem Sie jeweils für sich getrennt zuerst die Real- und dann die Imaginärteile addieren beziehungsweise subtrahieren. Für die trigonometrische Form gilt analog:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_0 = \underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 &= Z_1 \cdot (\cos\ \varphi_1 + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi_1) \pm Z_2 \cdot (\cos\ \varphi_2 + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi_2)\\ &= (Z_1 \cdot \cos\ \varphi_1 \pm Z_2 \cdot \cos\ \varphi_2) + \mathrm{j} \cdot (Z_1 \cdot \sin\ \varphi_1 \pm Z_2 \cdot \sin\ \varphi_2)\end{aligned}$$

Die Addition komplexer Zahlen führen Sie also mit den gleichen Rechenregeln durch wie die Addition von Vektoren in der Ebene, nämlich komponentenweise.

Für die Summe aus einer komplexen Zahl und ihrer konjugiert komplexen Zahl gilt

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z} + \underline{Z}^* = (R + \mathrm{j} \cdot X) + (R - \mathrm{j} \cdot X) = 2 \cdot R + \mathrm{j} \cdot X - \mathrm{j} \cdot X = 2 \cdot R$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{Z} + \underline{Z}^*\right)$$

Aus der Differenz konjugiert komplexer Zahlen folgt entsprechend

$$\mathrm{Im}\left\{\underline{Z}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{Z} - \underline{Z}^*\right)$$

Aus den Euler'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi} &= \cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\varphi} &= \cos\ \varphi - \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi\end{aligned}$$

erhalten Sie durch Addition

$$e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi} = (\cos\ \varphi + j\cdot\sin\ \varphi) + (\cos\ \varphi - j\cdot\sin\ \varphi) = 2\cdot\cos\ \varphi$$

Durch Umstellen folgt hieraus

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot(e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi})$$

Analog ergibt sich aus der Subtraktion beider Gleichungen

$$e^{j\cdot\varphi} - e^{-j\cdot\varphi} = (\cos\ \varphi + j\cdot\sin\ \varphi) - (\cos\ \varphi - j\cdot\sin\ \varphi) = 2\cdot j\cdot\sin\varphi$$

Durch Umstellen folgt wiederum

$$\sin\varphi = \frac{1}{2\cdot j}\cdot(e^{j\cdot\varphi} - e^{-j\cdot\varphi})$$

Multiplikation und Division

In der Exponentialform ist die *Multiplikation* zweier komplexer Zahlen definiert als

$$\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2 = Z_1\cdot e^{j\cdot\varphi_1}\ \cdot Z_2\cdot e^{j\cdot\varphi_2} = Z_1\cdot Z_2\cdot e^{j\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Die Beträge werden also multipliziert und die Phasen werden addiert. In trigonometrischer Form sieht das wie folgt aus:

$$\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2 = Z_1\cdot Z_2\cdot\{\cos\ (\varphi_1+\varphi_2) + j\cdot\sin\ (\varphi_1+\varphi_2)\}$$

In Normalform gilt für die Multiplikation:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2 &= (R_1 + j\cdot X_1)\cdot(R_2 + j\cdot X_2)\\ &= (R_1\cdot R_2 + R_1\cdot j\cdot X_2 + R_2\cdot j\cdot X_1 + j^2\cdot X_1\cdot X_2)\\ &= (R_1\cdot R_2 + R_1\cdot j\cdot X_2 + R_2\cdot j\cdot X_1 - X_1\cdot X_2)\\ &= (R_1\cdot R_2 - X_1\cdot X_2) + j\cdot(R_1\cdot X_2 + R_2\cdot X_1)\end{aligned}$$

Wie im reellen Zahlenraum wird jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Dabei müssen Sie jedoch berücksichtigen, dass gilt: $j^2 = -1$.

Wie Sie sehen, ist für die Multiplikation komplexer Zahlen die Exponentialform besser geeignet.

Für die *Division* gilt analog in der Exponentialform

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1\cdot e^{j\cdot\varphi_1}}{Z_2\cdot e^{j\cdot\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2}\cdot e^{j\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Sie sehen: Beträge werden dividiert und Phasen werden subtrahiert.

In der Normalform werden zunächst der Zähler und der Nenner des Quotienten mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert, anschließend wird das Ergebnis in einen Real- und einen Imaginärteil aufgeteilt. Dabei müssen Sie wiederum berücksichtigen, dass $\mathrm{j}^2 = -1$ gilt. Als einfachstes Beispiel lernen Sie im nächsten Unterkapitel den Kehrwert einer komplexen Zahl kennen. Dort rechne ich diese Erweiterung einmal schrittweise für Sie durch. Also auch bei der Division: Wenn möglich nutzen Sie die hierfür einfacher anwendbare Exponentialform.

Kehrwert einer komplexen Zahl

Der *Kehrwert einer komplexen Zahl*

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$$

ist gegeben durch

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \mathrm{j} \cdot X}$$

Formal ist der Kehrwert also eine Division der komplexen Zahl $\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{j} \cdot 0$ durch $\underline{Z}_2 = Z = R + \mathrm{j} \cdot X$. Durch Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl $(R - \mathrm{j} \cdot X)$ des Nenners folgt

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{j} \cdot X} \cdot \frac{(R - \mathrm{j} \cdot X)}{(R - \mathrm{j} \cdot X)} = \frac{(R - \mathrm{j} \cdot X)}{(R + \mathrm{j} \cdot X\ ) \cdot (R - \mathrm{j} \cdot X)}$$

Multiplizieren Sie den Nennerterm aus, so erhalten Sie

$$\underline{Y} = \frac{(R - \mathrm{j} \cdot X)}{R^2 + R \cdot (-\mathrm{j} \cdot X) + R \cdot (+\mathrm{j} \cdot X) - \mathrm{j}^2 \cdot X^2}$$

Durch Auflösen der Klammern im Nenner und Ersetzen von $\mathrm{j}^2 = -1$ erhalten Sie

$$\underline{Y} = \frac{(R - \mathrm{j} \cdot X)}{R^2 - R \cdot \mathrm{j} \cdot X + R \cdot \mathrm{j} \cdot X + X^2}$$

Daraus folgt letztlich

$$\underline{Y} = \frac{(R - \mathrm{j} \cdot X)}{R^2 + X^2} = \frac{\underline{Z}^*}{Z^2}$$

Durch die konjugiert komplexe Erweiterung verschwindet also die lästige imaginäre Einheit j im Nenner. Diese Einsicht wird sehr hilfreich für Sie sein, wenn es später um die Aufteilung einer komplexen Zahl in deren Real- und Imaginärteil geht. Denn wenn Sie die vorherige Gleichung im Zähler in den Real- und Imaginärteil aufteilen, erhalten Sie die gesuchte Form

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + X^2} - \mathrm{j} \cdot \frac{X}{R^2 + X^2} = \mathrm{Re}\left\{\underline{Y}\right\} + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\left\{\underline{Y}\right\}$$

Links steht also der Realteil $\mathrm{Re}\{\underline{Y}\}$ und rechts der mit der imaginären Einheit j gekennzeichnete Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\underline{Y}\}$ der komplexen Zahl $\underline{Y}$, in diesem Falle der komplexe Leitwert.

Als alternative Lösung (und vielleicht sogar kürzer) könnten Sie den Nenner auch mithilfe der 3. Binomischen Formel $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ umwandeln. Hierauf angewandt bedeutet dies $(R+\mathrm{j}\cdot X)\cdot(R-\mathrm{j}\cdot X)=R^2-(\mathrm{j}\cdot X)^2=R^2-\mathrm{j}^2\cdot X^2=R^2+X^2$. Diese Gleichung liefert nun letztlich, anders als sonst gewohnt, ein Pluszeichen zwischen den beiden Quadraten. Dies ist die Folge der Umwandlung $\mathrm{j}^2=-1$, also $-\mathrm{j}^2=+1$.

In Exponentialform erhalten Sie analog aus

$$\underline{Z}=Z\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi}$$

den zugehörigen Kehrwert

$$\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{Z\cdot e^{\mathrm{j}\cdot\varphi}}=\frac{1}{Z}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\varphi}=Y\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\beta}$$

Für den Betrag Y und für den Winkel β gilt dann

$$|\underline{Y}|=Y=\frac{1}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

$$\beta=-\varphi=-\arctan\frac{X}{R}$$

Der Winkel β des Kehrwerts ist also gleich dem negativen Ausgangswinkel φ.

Potenzieren und Radizieren

Auch beim *Potenzieren* starten Sie am besten mit der Exponentialdarstellung:

$$\underline{Z}^n=(Z\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi})^n=Z^n\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot n\cdot\varphi}$$

In der trigonometrischen Darstellung lautet dieses Ergebnis analog

$$\underline{Z}^n=Z^n\cdot[\cos(n\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(n\cdot\varphi)]$$

Für das *Radizieren* (Wurzelziehen) gilt entsprechend

$$\underline{Z}^{1/n}=\sqrt[n]{\underline{Z}}=\sqrt[n]{Z}\cdot e^{\mathrm{j}\cdot\left(\frac{\varphi}{n}\right)}$$

Differenzieren und Integrieren von Schwingungsfunktionen

Komplexe Schwingungsfunktionen spielen eine besonders wichtige Rolle in der Wechselstromtechnik. Für die Ableitung einer komplexen zeitabhängigen Schwingungsfunktion der Form

$$\underline{u}(t)=\hat{u}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}$$

nach der Zeit t gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t} \cdot \mathrm{j} \cdot \omega = \mathrm{j} \cdot \omega \cdot \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t} = (\mathrm{j} \cdot \omega) \cdot \underline{u}(t)$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Amplitude $\hat{u}$ konstant bezüglich t ist. Die Differenziation einer »komplexen Schwingung« führt also zu einer Multiplikation mit dem Faktor $(\mathrm{j} \cdot \omega)$.

In der Gauß'schen Zahlenebene bedeutet dies, dass $\underline{u}$ mit der reellen Größe ω multipliziert und wegen $+\mathrm{j}$ um den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ oder um $+90°$ gedreht wird.

Für das unbestimmte Integrieren einer solchen komplexen Schwingungsfunktion gilt analog

$$\int \underline{u}(t) \cdot dt = -\mathrm{j} \cdot \frac{\underline{u}(t)}{\omega} = \frac{\underline{u}(t)}{\mathrm{j} \cdot \omega}$$

Die Integration führt also zu einer Division durch den Faktor $(\mathrm{j} \cdot \omega)$. Das ist doch mal wirklich toll, dass Sie sich auf diese Weise die meist mathematisch aufwendigere Differenziation und Integration ersparen können!

In der Gauß'schen Zahlenebene bedeutet dies, dass $\underline{u}(t)$ durch die reelle Größe ω dividiert und wegen $-\mathrm{j}$ um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ oder um $-90°$ gedreht wird.

Da solche Rechenoperationen sehr wichtig in der Wechselstromtechnik sind, werde ich Ihnen die Differenziation einer komplexen Schwingungsfunktion nachfolgend nochmals in einzelnen Rechenschritten aufzeigen. Zum einen, weil Sie damit Ihre mathematischen Kenntnisse auffrischen, zum anderen, weil Sie diese Herleitung benötigen werden, wenn wir die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der Spannung an einer Spule beziehungsweise einem Kondensator berechnen. Also los!

Wenn Sie die komplexe Größe

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}$$

nach der Zeit t ableiten, so gilt

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{\hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}\}$$

Da $\hat{u}$ konstant bezüglich der Zeit t ist, können Sie $\hat{u}$ als Konstante vor die Differenziation ziehen und erhalten

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \hat{u} \cdot \frac{d}{dt}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}\}$$

Über die Größe $\hat{u}$ (Amplitude) und deren anschauliche Bedeutung werden Sie später noch mehr erfahren.

Schauen Sie jetzt genauer auf die Funktion hinter den Differenziationszeichen:

$$\frac{d}{dt}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}\}$$

Erkennen Sie, dass $\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}\}$ auch als $\{\mathrm{e}^{x(t)}\}$ geschrieben werden kann? Es handelt sich also um eine zusammengesetzte beziehungsweise verkettete Funktion, bestehend aus der äußeren Funktion $\{f(x) = \mathrm{e}^{x(t)}\}$ und der inneren Funktion $\{x(t) = \mathrm{j}\cdot\omega\cdot t\}$. Eine solche zusammengesetzte Funktion müssen Sie mit der Kettenregel differenzieren, für die allgemein gilt:

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{dx(t)}{dt}$$

Bestimmen Sie zunächst für die äußere Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x(t)}$ die zugehörige äußere Ableitung mit $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$, so erhalten Sie im vorliegenden Fall

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x(t)} = \mathrm{e}^{x(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}$$

wenn Sie noch $x(t) = \mathrm{j}\cdot\omega\cdot t$ ersetzen. Anschließend leiten Sie die innere Funktion $x(t) = \mathrm{j}\cdot\omega\cdot t$ ab und erhalten

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t) = \mathrm{j}\cdot\omega$$

So, nun müssen Sie nach der Vorgabe der Kettenregel nur noch das Produkt von äußerer und innerer Ableitung berechnen:

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \hat{u}\cdot\frac{d}{dt}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}\} = \hat{u}\cdot\{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t})\cdot(\mathrm{j}\cdot\omega)\}$$

Ausmultiplizieren und Ordnen ergibt:

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \mathrm{j}\cdot\omega\cdot\hat{u}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}$$

Ersetzen Sie nun noch

$$\hat{u}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t} = \underline{u}(t)$$

so erhalten Sie letztlich

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \mathrm{j}\cdot\omega\cdot\underline{u}(t)$$

Voilà, jetzt haben Sie die Differenziation einer komplexen Schwingungsfunktion nochmals im Detail über die Kettenregel berechnet! Sie merken sich also: Die Differenziation führt zur Multiplikation mit $(\mathrm{j}\cdot\omega)$, das heißt, $\underline{u}(t)$ wird mit der reellen Größe ω multipliziert und um den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ gedreht.

Weil es so schön war und Sie auch diese Berechnung kennen müssen, machen wir dasselbe nochmals detailliert für die unbestimmte Integration. Wir beginnen wieder mit der komplexen Größe

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}$$

und wollen nun das unbestimmte Integral nach der Zeit t berechnen:

$$\int \underline{u}(t) \cdot dt = \int \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t} \cdot dt$$

Da $\hat{u}$ wieder als konstant bezüglich der Zeit t angenommen werden kann, können Sie diese Größe vor das Integralzeichen ziehen:

$$\int \underline{u}(t) \cdot dt = \hat{u} \cdot \int \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t} \cdot dt$$

Für die Integration einer e-Funktion gilt die allgemeine Regel

$$\int \mathrm{e}^{a\cdot x} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{a\cdot x}$$

Mit $a = \mathrm{j} \cdot \omega$ und $x = t$ erhalten Sie dann:

$$\int \underline{u}(t) \cdot dt = \hat{u} \cdot \frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}$$

Wegen $\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$ ergibt sich:

$$\int \underline{u}(t) \cdot dt = -\mathrm{j} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t}$$

Ersetzen Sie nun auch hier

$$\hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega\cdot t} = \underline{u}(t)$$

so erhalten Sie

$$\int \underline{u}(t) \cdot dt = -\mathrm{j} \cdot \frac{\underline{u}(t)}{\omega}$$

Sie sehen also, dass die Integration einer komplexen Schwingungsfunktion zu einer Division mit dem Faktor $(\mathrm{j} \cdot \omega)$ beziehungsweise einer Multiplikation mit $-\mathrm{j}$ und gleichzeitiger Division durch ω führt, das heißt, $\underline{u}(t)$ wird durch die reelle Größe ω geteilt und um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ gedreht.

Falls Sie sich an dieser Stelle fragen, wie die Umrechnung von $\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$ zustande kam, erweitern Sie einfach den Bruch $\frac{1}{\mathrm{j}}$ um j, das heißt, Sie multiplizieren den Zähler und Nenner jeweils mit j und erhalten

$$\frac{1}{\mathrm{j}} \cdot \frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}^2}$$

Damit haben Sie nur mit der 1 multipliziert, weil $\frac{j}{j} = 1$ ist. Sie wissen, dass gilt

$$j^2 = -1$$

wodurch folgt

$$\frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

weil Sie das Minuszeichen letztlich nach oben in den Zähler gezogen haben. Fertig!

An dieser Stelle möchte ich nochmals kurz erklären, was es bedeutet, wenn eine komplexe Zahl mit dem Faktor +j multipliziert wird – denn diese Operation werden Sie häufig brauchen, um Phasenverschiebungen zu berechnen.

Bereits in Abbildung 1.12 haben Sie gesehen, was geschieht, wenn ein komplexer Zeiger mit dem Betrag 1 um verschiedene Winkel φ gedreht wird. Für die Drehung um $\varphi = +90°$ haben Sie folgendes Ergebnis kennengelernt:

$$\varphi = +90° \qquad \text{ergibt } \underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 90° + j \cdot \sin\ 90°) = 0 + j \cdot 1 = +j$$

Diese Operation ist anschaulich in Abbildung 1.14 gezeigt. Das +j bedeutet, dass der Zeiger der komplexen Zahl um den Winkel +90° (oder $+\frac{\pi}{2}$) im mathematisch positiven Sinne (also links herum) gedreht wurde und nun auf der imaginären Achse der Gauß'schen Zahlenebene auf +j, also nach oben zeigt.

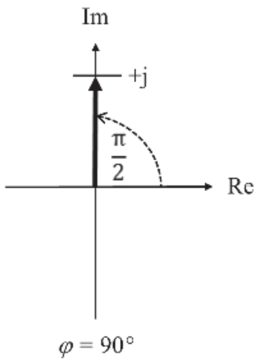

Abbildung 1.14: Drehung des Zeigers um +90°

Multiplizieren Sie eine komplexe Zahl mit dem Faktor +j, dann drehen Sie den Zeiger der komplexen Zahl bildlich um den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ (oder +90°). Analog gilt für das Multiplizieren mit −j, dass Sie den Zeiger um $-\frac{\pi}{2}$ (oder −90°) drehen.

Diese Zusammenhänge werden bei der späteren Berechnung von Schaltungen mit Widerständen, Spulen und Kondensatoren noch eine bedeutende Rolle spielen.

Eine weitere wichtige Operation ist die Bestimmung von Real- und Imaginärteil für kompliziertere komplexe Zahlen – also los zur nächsten mathematischen Einsicht!

Bestimmung von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl

Wenn die komplexe Größe $\underline{Z}$ in der Normalform

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$$

vorliegt, sind deren Realteil und Imaginärteil unmittelbar gegeben durch

$$\mathrm{Re}\,\{\underline{Z}\} = R \qquad \mathrm{Im}\,\{\underline{Z}\} = X$$

Bilden Sie den Kehrwert der komplexen Zahl $\underline{Z}$, so erhalten Sie

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \mathrm{j} \cdot X}$$

Die Aufspaltung in einen Real- und einen Imaginärteil für $\underline{Y}$ erhalten Sie, indem Sie mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners – hier mit $(R - \mathrm{j} \cdot X)$ – erweitern, sodass folgt:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{j} \cdot X} \cdot \frac{(R - \mathrm{j} \cdot X)}{(R - \mathrm{j} \cdot X)} = \frac{R - \mathrm{j} \cdot X}{(R + \mathrm{j} \cdot X) \cdot (R - \mathrm{j} \cdot X)}$$

Multiplizieren Sie jetzt noch den Nenner aus, so erhalten Sie:

$$\underline{Y} = \frac{R - \mathrm{j} \cdot X}{R^2 + R \cdot (-\mathrm{j} \cdot X) + R \cdot (+\mathrm{j} \cdot X) - \mathrm{j}^2 \cdot X^2}$$

Durch Auflösen der Klammern im Nenner und Ersetzen von $\mathrm{j}^2 = -1$ folgt:

$$\underline{Y} = \frac{R - \mathrm{j} \cdot X}{R^2 - R \cdot \mathrm{j} \cdot X + R \cdot \mathrm{j} \cdot X - (-1) \cdot X^2} = \frac{R - \mathrm{j} \cdot X}{R^2 - R \cdot \mathrm{j} \cdot X + R \cdot \mathrm{j} \cdot X + X^2}$$

Da sich die Terme mit j im Nenner wie vorgesehen gegenseitig aufheben, erhalten Sie

$$\underline{Y} = \frac{R - \mathrm{j} \cdot X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - \mathrm{j} \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Somit ergibt sich für den Real- und Imaginärteil des Kehrwerts $\underline{Y}$ der komplexen Zahl:

$$\mathrm{Re}\,\{\underline{Y}\} = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$\mathrm{Re}\,\{\underline{Y}\} = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Dieses Ergebnis beim Kehrwert können Sie auf alle Brüche mit komplexen Zahlen verallgemeinern.

Der Sinn der konjugiert komplexen Erweiterung besteht also darin, das j im Nenner eines komplexen Bruchs zu entfernen. Im Zähler können Sie dann die Terme ohne j zum Real- und die Terme mit j zum Imaginärteil zusammenfassen.

Real- und Imaginärteil einer Summe oder Differenz

Für den Realteil von $\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2$ gilt

$$\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_1\right\} \pm \mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_2\right\}$$

Für den Imaginärteil gilt analog

$$\mathrm{Im}\left\{\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2\right\} = \mathrm{Im}\left\{\underline{Z}_1\right\} \pm \mathrm{Im}\left\{\underline{Z}_2\right\}$$

Zur Vertiefung der vorgestellten Zusammenhänge und Regeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen zeige ich Ihnen nachfolgend ein Anwendungsbeispiel.

Anwendungsbeispiel zum Rechnen mit komplexen Zahlen

Die Rechnung mit komplexen Zahlen wird nicht nur in der Wechselstromtechnik, sondern auch in der Regelungstechnik angewandt, wie es das folgende Beispiel zeigt.

Gegeben ist das in Abbildung 1.15 skizzierte *RC*-Netzwerk (bestehend also aus Widerstand *R* und Kondensator *C*). Die skizzierte Schaltung ist ein *RC*-Filter, wie er zur Signalverarbeitung zum Einsatz kommt. Gesucht ist für diese Schaltung der Frequenzgang $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$, für den ganz generell folgende Gleichung gilt:

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{u}_\mathrm{A}}{\underline{u}_\mathrm{E}}$$

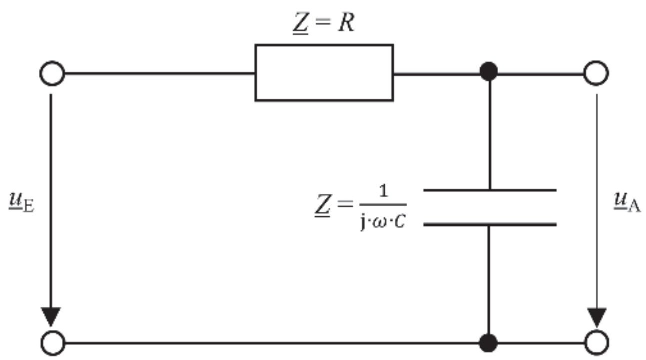

Abbildung 1.15: Anwendungsbeispiel zur komplexen Rechnung

Über den Frequenzgang $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ wird die zugehörige Ortskurve (Bode-Diagramm) abgeleitet, die wiederum Auskunft über die Stabilität der *RC*-Filterschaltung gibt.

Zur Aufstellung des Frequenzgangs $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ müssen Sie zunächst die Eingangsspannung $\underline{u}_\mathrm{E}$ und die Ausgangsspannung $\underline{u}_\mathrm{A}$ des *RC*-Filters bestimmen. Für die Eingangsspannung $\underline{u}_\mathrm{E}$ ergibt sich aus der gegebenen Schaltung mithilfe des Ohm'schen Gesetzes

$$\underline{u}_\mathrm{E} = \left(R + \frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}\right) \cdot \underline{i}$$

Dabei ist $\underline{i}$ der Strom, der durch die Schaltung fließt – jetzt natürlich auch als komplexer Zeiger dargestellt. Diese Gleichung entsteht dadurch, dass Sie von der Seite der Eingangsspannung $\underline{u}_\mathrm{E}$ her in die *RC*-Schaltung hineinschauen und eine *Reihenschaltung* von Widerstand R und Kondensator C sehen. Während sich der komplexe Widerstand für den Ohm'schen Widerstand R einfach zu $\underline{Z} = R$ ergibt, gilt für den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ eines Kondensators

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}$$

(Die Erklärung der Gleichung für den komplexen Widerstand $\underline{Z}$ des Kondensators ist im Teil II ersichtlich). Für den komplexen Gesamtwiderstand der Reihenschaltung müssen Sie beide Größen miteinander addieren. Für die Bestimmung der Ausgangsspannung $\underline{u}_\mathrm{A}$ des *RC*-Netzwerkes schauen Sie von der Seite der Ausgangsspannung $\underline{u}_\mathrm{A}$ her in die *RC*-Schaltung hinein. Dabei sehen Sie lediglich den Kondensator C. Mithilfe des zuvor dargestellten komplexen Widerstands $\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}$ für den Kondensator erhalten Sie für die Ausgangsspannung $\underline{u}_\mathrm{A}$ die Gleichung

$$\underline{u}_\mathrm{A} = \left(\frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}\right) \cdot \underline{i}$$

Nun setzen Sie die beiden ermittelten Gleichungen für die Ein- und Ausgangsspannung in die Gleichung für den Frequenzgang $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ ein und erhalten:

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{u}_\mathrm{A}}{\underline{u}_\mathrm{E}} = \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}\right) \cdot \underline{i}}{\left(R + \frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}\right) \cdot \underline{i}}$$

Und siehe da, der unbekannte Strom $\underline{i}$ kürzt sich elegant heraus! Diese Gleichung können Sie mathematisch noch vereinfachen. Lassen Sie uns das der besseren Verständlichkeit wegen in mehreren Einzelschritten tun. Erweitern Sie als Erstes den Zähler und Nenner mit $\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C$:

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{u}_\mathrm{A}}{\underline{u}_\mathrm{E}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}} \cdot \frac{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C}{\mathrm{j} \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

Sieht doch ganz gut aus, oder? Aber lassen Sie uns noch einen Schritt weitergehen. Auch in den Anwendungen der Regelungstechnik wird der Frequenzgang $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ meist in einen Real- und Imaginärteil aufgeteilt, um damit die zugehörige Ortskurve skizzieren zu können. Sie erhalten dann allgemein die Form

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Re}\,\{\underline{G}\} + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\,\{\underline{G}\}$$

Die Aufteilung des ermittelten Frequenzgangs $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ in einen Real- und einen Imaginärteil erfolgt durch die bereits bekannte konjugiert komplexe Erweiterung. Demnach rechnen Sie

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C} = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C} \cdot \frac{(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)}{(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)}$$

Zur konjugiert komplexen Erweiterung wird sowohl der Zähler als auch der Nenner mit dem konjugiert komplexen Term $(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)$ zum gegebenen Nennerfaktor $(1 + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)$ multipliziert. Dadurch verändern Sie mathematisch nichts an der Gleichung für den Frequenzgang – schließlich multiplizieren Sie eigentlich nur mit einer 1. Sie schaffen sich damit jedoch die Möglichkeit, das j im Nenner in den Zähler umzustellen. Hierzu multiplizieren Sie den Zähler und den Nenner aus und erhalten

$$\begin{aligned}\underline{G}(\mathrm{j}\omega) &= \frac{(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)}{(1 + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C) \cdot (1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)} \\ &= \frac{(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)}{1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C - (\mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)^2}\end{aligned}$$

Sie sehen nun, dass die beiden Terme mit j im Nenner verschwinden, was der Sinn der konjugiert komplexen Erweiterung ist! Damit erhalten Sie

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Re}\,\{\underline{G}\} + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\,\{\underline{G}\} = \frac{(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)}{1 - (\mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)^2}$$

Wenden Sie sich nun noch dem Klammerausdruck im Nenner zu. Dabei müssen Sie berücksichtigen, dass für die imaginäre Einheit $\mathrm{j}^2 = -1$ gilt. Damit erhalten Sie

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \frac{(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)}{1 - \mathrm{j}^2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2} = \frac{(1 - \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C)}{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}$$

Lösen Sie letztlich die Klammer im Zähler auf, so erhalten Sie wie gewünscht den Frequenzgang in dessen Real- und Imaginärteil:

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Re}\,\{\underline{G}\} + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\,\{\underline{G}\} = \frac{1}{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2} - \mathrm{j} \cdot \frac{\omega \cdot R \cdot C}{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}$$

Dies ist das gesuchte Ergebnis für den Frequenzgang $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ in Normalform mit seinen kartesischen Koordinaten $\mathrm{Re}\{\underline{G}\}$ und $\mathrm{Im}\{\underline{G}\}$! Sie haben sicherlich erkannt, dass dies die gleichen Rechenschritte waren, wie Sie diese bereits an früherer Stelle für die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil angewandt haben. Denken Sie an dieser Stelle daran, Übung macht den Meister!

So, mit den folgenden Aufgaben können Sie die zuvor erlernten Zusammenhänge zum Rechnen mit komplexen Zahlen festigen. Viel Spaß dabei! Übrigens: Die Lösung zu den Aufgaben finden Sie im Anhang hinten im Buch.

Aufgabe 1.1.

Gegegen sind die beiden komplexen Zahlen $\underline{Z}_1 = 5 - j \cdot 8$ und $\underline{Z}_2 = 4 + j \cdot 2$. Berechnen Sie damit

- ✔ die Summe $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$
- ✔ die Differenz $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2$
- ✔ das Produkt $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2$
- ✔ den Quotienten $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2$

(Ergebnisse: $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 9 - j \cdot 6$; $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = 1 - j \cdot 10$; $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = 36 - j \cdot 22$; $\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{4}{20} - j \cdot \frac{42}{20} = 0{,}2 - j \cdot 2{,}1$)

Aufgabe 1.2.

Wandeln Sie die in Normalform gegebenen komplexen Zahlen in deren jeweilige trigonometrische und Exponentialform um:

- ✔ $\underline{Z}_1 = -2 - j \cdot 2$
- ✔ $\underline{Z}_2 = -10$

(Ergebnisse: $\underline{Z}_1 = 2{,}83 \cdot \left(\cos\ \frac{5}{4} \cdot \pi + j \cdot \sin\ \frac{5}{4} \cdot \pi\right) = 2{,}83 \cdot e^{j \cdot \frac{5}{4} \cdot \pi}$;
$\underline{Z}_2 = 10 \cdot (\cos\ \pi + j \cdot \sin\ \pi) = 10 \cdot e^{j \cdot \pi}$)