Inhaltsverzeichnis

1. Geometrie und komplexe Arithmetik 1

1.1 Einführung 1

1.1.1 Historischer Abriß 1

1.1.2 Bombellis „wilder Gedanke" 4

1.1.3 Einiges zur Terminologie und Schreibweise 6

1.1.4 Übungen 8

1.1.5 Äquivalenz der algebraischen und geometrischen Arithmetik .. 9

1.2 Die Eulersche Formel 11

1.2.1 Einleitung 11

1.2.2 Das Argument des bewegten Teilchens 12

1.2.3 Das Potenzreihen-Argument 14

1.2.4 Sinus und Cosinus und die Eulersche Formel 16

1.3 Einige Anwendungen 17

1.3.1 Einleitung 17

1.3.2 Trigonometrie 17

1.3.3 Geometrie 19

1.3.4 Analysis 23

1.3.5 Algebra 26

1.3.6 Vektorrechnung 32

1.4 Transformationen und euklidische Geometrie* 35

1.4.1 Geometrie mit den Augen von Felix Klein 35

1.4.2 Klassifikation von Bewegungen 40

1.4.3 Drei-Spiegelungen-Satz 44

1.4.4 Ähnlichkeit und komplexe Arithmetik 46

1.4.5 Räumliche komplexe Zahlen? 51

Aufgaben 53

2. Komplexe Funktionen als Transformationen 65
2.1 Einführung 65
2.2 Polynome 68
2.2.1 Positive ganzzahlige Potenzen 68
2.2.2 Verbesserte Lösung kubischer Gleichungen* 69
2.2.3 Cassinische Kurven* 71
2.3 Potenzreihen 75
2.3.1 Das Geheimnis der reellen Potenzreihen 75
2.3.2 Konvergenzkreis 78
2.3.3 Approximation einer Potenzreihe durch ein Polynom 82
2.3.4 Einzigkeit 83
2.3.5 Rechnen mit Potenzreihen 84
2.3.6 Berechnung des Konvergenzradius 87
2.3.7 Fourier-Reihen* 90
2.4 Die Exponentialfunktion 93
2.4.1 Zugang über Potenzreihen 93
2.4.2 Die Geometrie der Abbildung 94
2.4.3 Ein anderer Zugang 95
2.5 Cosinus und Sinus 98
2.5.1 Definitionen und Identitäten 98
2.5.2 Beziehungen zu hyperbolischen Funktionen 99
2.5.3 Die Geometrie der Abbildung 102
2.6 Mehrdeutige Funktionen 104
2.6.1 Beispiel: Rationale Potenzen 104
2.6.2 Einwertige Zweige einer mehrdeutigen Funktion 107
2.6.3 Bedeutung für Potenzreihen 110
2.6.4 Beispiel mit zwei Verzweigungspunkten 112
2.7 Die Logarithmusfunktion 114
2.7.1 Die Umkehrung der Exponentialfunktion 114
2.7.2 Die logarithmische Potenzreihe 116
2.7.3 Allgemeine Potenzen 117
2.8 Mittelwert über Kreisen* 119
2.8.1 Der Schwerpunkt 119
2.8.2 Mittelwert über regulären Polygonen 122
2.8.3 Mittelwert über Kreisen 125
Aufgaben 128

3. Die Möbiustransformationen und ihre Umkehrung 141
3.1 Einleitung 141
3.1.1 Definition und Bedeutung der Möbiustransformationen 141

3.1.2 Die Verbindung mit der Relativitätstheorie von Einstein* 142
3.1.3 Zerlegung in einfache Abbildungen 143
3.2 Die Inversion 144
3.2.1 Einleitende Definitionen und Tatsachen 144
3.2.2 Erhaltung von Kreisen 147
3.2.3 Konstruktion inverser Punkte mit Hilfe orthogonaler Kreise 149
3.2.4 Erhaltung von Winkeln 151
3.2.5 Symmetrieerhaltung 154
3.2.6 Inversion an einer Kugel 154
3.3 Drei anschauliche Anwendungen der Inversion 157
3.3.1 Ein Problem der sich berührenden Kreise 157
3.3.2 Eine seltsame Eigenschaft von Vierecken mit orthogonalen Diagonalen 158
3.3.3 Satz von Ptolemäus 160
3.4 Die Riemannsche Zahlenkugel 161
3.4.1 Der Punkt Unendlich 161
3.4.2 Die stereographische Projektion 162
3.4.3 Übertragung komplexer Funktionen auf die Zahlenkugel 165
3.4.4 Das Verhalten von Funktionen im Unendlichen 166
3.4.5 Stereographische Gleichungen* 169
3.5 Möbiustransformationen: Grundlegende Ergebnisse 171
3.5.1 Erhaltung von Kreisen, Winkeln und der Symmetrie 171
3.5.2 Nicht-Einzigkeit der Koeffizienten 173
3.5.3 Die Gruppen-Eigenschaft 174
3.5.4 Fixpunkte 175
3.5.5 Fixpunkte im Unendlichen 176
3.5.6 Das Doppelverhältnis 178
3.6 Möbiustransformationen als Matrizen* 180
3.6.1 Zusammenhang mit Linearer Algebra einleuchtende Erfahrung 180
3.6.2 Die Erklärung: Homogene Koordinaten 182
3.6.3 Eigenvektoren und Eigenwerte* 183
3.6.4 Drehungen der Kugel als Möbiustransformationen* 186
3.7 Veranschaulichung und Klassifizierung* 188
3.7.1 Die Grundidee 188
3.7.2 Elliptische, hyperbolische und loxodromische Transformationen 190
3.7.3 Lokale geometrische Interpretation des Multiplikators 192
3.7.4 Parabolische Transformationen 194
3.7.5 Berechnung des Multiplikators* 196

3.7.6 Eigenwert-Interpretation der Multiplikatoren* ... 197
3.8 Zerlegung in 2 oder 4 Spiegelungen* ... 199
3.8.1 Einführung ... 199
3.8.2 Elliptischer Fall ... 199
3.8.3 Hyperbolischer Fall ... 200
3.8.4 Parabolischer Fall ... 202
3.8.5 Zusammenfassung ... 202
3.9 Automorphismen der Einheitsscheibe* ... 203
3.9.1 Anzahl der Freiheitsgrade ... 203
3.9.2 Aufstellung der Formel mit dem Symmetrieprinzip ... 205
3.9.3 Geometrische Interpretation der einfachsten Formel* ... 206
3.9.4 Vorstellung des Riemannschen Abbildungssatzes ... 208
Aufgaben ... 209

4. Differentiation: Das Konzept der Drehstreckung ... 219
4.1 Einleitung ... 219
4.2 Ein verwirrendes Phänomen ... 219
4.3 Lokale Beschreibung von Abbildungen in der Ebene ... 221
4.3.1 Einleitung ... 221
4.3.2 Die Jacobi-Matrix ... 222
4.3.3 Das Konzept der Drehstreckung ... 224
4.4 Die komplexe Ableitung als Drehstreckung ... 225
4.4.1 Rückblick auf die reelle Ableitung ... 225
4.4.2 Die komplexe Ableitung ... 226
4.4.3 Analytische Funktionen ... 228
4.4.4 Eine kurze Zusammenfassung ... 229
4.5 Einige einfache Beispiele ... 230
4.6 Konform = Analytisch ... 232
4.6.1 Einführung ... 232
4.6.2 Konform in einem Gebiet ... 233
4.6.3 Konforme Abbildungen auf der Riemannschen Zahlenkugel ... 235
4.7 Kritische Punkte ... 236
4.7.1 Schrumpfungsgrad ... 236
4.7.2 Zusammenbruch der Konformität ... 237
4.7.3 Verzweigungspunkte ... 238
4.8 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ... 239
4.8.1 Einleitung ... 239
4.8.2 Die Geometrie linearer Transformationen ... 241
4.8.3 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ... 242
Aufgaben ... 244

5. Weitere geometrische Eigenschaften der Differentiation ... 251
5.1 Neuformulierung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ... 251
5.1.1 Einleitung ... 251
5.1.2 Die kartesische Form ... 251
5.1.3 Die Polar-Koordinaten-Form ... 253
5.2 Was bedeutet Starrheit? ... 254
5.3 Anschauliche Differentiation von $\log(z)$ ... 258
5.4 Differentiationsregeln ... 259
5.4.1 Komposition ... 260
5.4.2 Inverse Funktionen ... 260
5.4.3 Addition und Multiplikation ... 261
5.5 Polynome, Potenzreihen und rationale Funktionen ... 263
5.5.1 Polynome ... 263
5.5.2 Potenzreihen ... 264
5.5.3 Rationale Funktionen ... 266
5.6 Visuelles Differenzieren der Potenzfunktion ... 266
5.7 Anschauliche Differentiation von exp(z) ... 268
5.8 Geometrische Lösung von $E' = E$ ... 270
5.9 Eine Anwendung höherer Ableitungen: Krümmung* ... 272
5.9.1 Einleitung ... 272
5.9.2 Analytische Transformation der Krümmung ... 274
5.9.3 Komplexe Krümmung ... 276
5.10 Himmelsmechanik* ... 280
5.10.1 Zentralkraft-Felder ... 280
5.10.2 Zwei Arten elliptischer Umlaufbahnen ... 280
5.10.3 Überführung der ersten in die zweite Art ... 283
5.10.4 Die Geometrie der Kraft ... 284
5.10.5 Eine Erklärung ... 285
5.10.6 Der Satz von Kasner-Arnol'd ... 286
5.11 Analytische Fortsetzung* ... 287
5.11.1 Einleitung ... 287
5.11.2 Starrheit ... 289
5.11.3 Einzigkeit ... 290
5.11.4 Erhaltung von Identitäten ... 292
5.11.5 Analytische Fortsetzung mittels Spiegelungen ... 293
Aufgaben ... 299

6. Nicht-euklidische Geometrie* 309
6.1 Einleitung 309
6.1.1 Das Parallelenaxiom 309
6.1.2 Einige Tatsachen aus der nicht-euklidischen Geometrie 311
6.1.3 Geometrie auf einer gekrümmten Fläche 313
6.1.4 Innere und äußere Geometrie 316
6.1.5 Gaußsche Krümmung 317
6.1.6 Flächen konstanter Krümmung 319
6.1.7 Die Verbindung mit den Möbiustransformationen 321
6.2 Kugelgeometrie 322
6.2.1 Die Winkelabweichung eines sphärischen Dreiecks 322
6.2.2 Bewegungen der Kugel:
Räumliche Drehungen und Spiegelungen 323
6.2.3 Eine konforme Karte der Kugel 328
6.2.4 Räumliche Drehungen als Möbiustransformationen 331
6.2.5 Räumliche Drehungen und Quaternionen 336
6.3 Hyperbolische Geometrie 340
6.3.1 Die Traktrix und die Pseudosphäre 340
6.3.2 Die konstante negative Krümmung der Pseudosphäre* 341
6.3.3 Eine konforme Karte der Pseudosphäre 343
6.3.4 Beltramis hyperbolische Ebene 345
6.3.5 Hyperbolische Geraden und Spiegelungen 349
6.3.6 Die Bolyai-Lobachevsky-Gleichung* 354
6.3.7 Die drei Typen direkter Bewegung 355
6.3.8 Zerlegung einer beliebigen direkten Bewegung
in zwei Spiegelungen 360
6.3.9 Die Winkelabweichung eines hyperbolischen Dreiecks 363
6.3.10 Die Poincarésche Kreisscheibe 366
6.3.11 Bewegungen der Poincaréschen Kreisscheibe 369
6.3.12 Das Halbkugel-Modell und der hyperbolische Raum 374
Aufgaben 379

7. Windungszahlen und Topologie 391
7.1 Windungszahl 391
7.1.1 Die Definition 391
7.1.2 Was bedeutet „innen“? 392
7.1.3 Schnelles Bestimmen der Windungszahl 393
7.2 Gradsatz von Hopf 395
7.2.1 Das Ergebnis 395

7.2.2 Geschlossene Kurven als Abbildungen von Kreisen* 396
7.2.3 Die Erklärung* 398
7.3 Polynome und das Argumentprinzip 399
7.4 Ein topologisches Argumentprinzip* 400
7.4.1 Algebraische Abzählung der Urbilder 400
7.4.2 Geometrische Abzählung der Urbilder 402
7.4.3 Welche topologische Besonderheit ergibt sich bei analytischen Funktionen? 404
7.4.4 Ein topologisches Argumentprinzip 406
7.4.5 Zwei Beispiele 407
7.5 Satz von Rouché 409
7.5.1 Das Ergebnis 409
7.5.2 Der Fundamentalsatz der Algebra 410
7.5.3 Fixpunktsatz von Brouwer* 410
7.6 Maxima und Minima 411
7.6.1 Maximumprinzip 411
7.6.2 Weitere Ergebnisse 413
7.7 Das Lemma von Schwarz-Pick* 414
7.7.1 Lemma von Schwarz 414
7.7.2 Satz von Liouville 416
7.7.3 Resultat von Pick 418
7.8 Das verallgemeinerte Argumentprinzip 421
7.8.1 Rationale Funktionen 421
7.8.2 Pole und wesentliche Singularitäten 423
7.8.3 Die Erklärung* 426
Aufgaben 427

8. Komplexe Integration: Der Satz von Cauchy 437
8.1 Einführung 437
8.2 Das reelle Integral 438
8.2.1 Die Riemannsche Summe 438
8.2.2 Die Trapezregel 440
8.2.3 Geometrische Fehlerabschätzung 441
8.3 Das komplexe Integral 444
8.3.1 Komplexe Riemannsche Summen 444
8.3.2 Eine anschauliche Technik 446
8.3.3 Eine nützliche Ungleichung 448
8.3.4 Integrationsregeln 448
8.4 Komplexe Inversion 450
8.4.1 Ein Kreisbogen 450

8.4.2 Allgemeine geschlossene Wege 451
8.4.3 Windungszahl 453
8.5 Konjugation 454
8.5.1 Einführung 454
8.5.2 Flächendeutung 455
8.5.3 Allgemeine Wege 457
8.6 Potenzfunktionen 458
8.6.1 Integration entlang eines Kreisbogens 458
8.6.2 Komplexe Inversion als Grenzfall* 460
8.6.3 Allgemeine Wege und der Deformationssatz 461
8.6.4 Eine Erweiterung des Satzes 462
8.6.5 Residuen 463
8.7 Die Exponentialabbildung 465
8.8 Der Fundamentalsatz 466
8.8.1 Einführung 466
8.8.2 Ein Beispiel 467
8.8.3 Der Fundamentalsatz 468
8.8.4 Das Integral als Stammfunktion 470
8.8.5 Logarithmus als Integral 473
8.9 Parametrische Berechnung 474
8.10 Der Satz von Cauchy 476
8.10.1 Einige Vorbemerkungen 476
8.10.2 Die Erklärung 478
8.11 Der allgemeine Satz von Cauchy 480
8.11.1 Das Ergebnis 480
8.11.2 Die Erklärung 481
8.11.3 Eine einfachere Erklärung 483
8.12 Die allgemeine Formel für Wegintegrale 484
Aufgaben 486

9. Cauchysche Integralformel und ihre Anwendungen 495
9.1 Cauchysche Integralformel 495
9.1.1 Einleitung 495
9.1.2 Erste Erklärung 496
9.1.3 Gaußscher Mittelwertsatz 497
9.1.4 Eine zweite Erklärung
und die allgemeine Cauchysche Integralformel 498
9.2 Unendliche Differenzierbarkeit und Taylorreihen 500
9.2.1 Unendliche Differenzierbarkeit 500
9.2.2 Taylorreihen 501

9.3 Rechnen mit Residuen ... 504
9.3.1 Laurentreihe um einen Pol ... 504
9.3.2 Eine Formel zur Berechnung von Residuen ... 505
9.3.3 Anwendung auf reelle Integrale ... 506
9.3.4 Berechnung von Residuen mit Taylorreihen ... 508
9.3.5 Anwendung auf die Summation von Reihen ... 510
9.4 Laurentreihen im Kreisring ... 513
9.4.1 Ein Beispiel ... 513
9.4.2 Satz von Laurent ... 514
Aufgaben ... 517

10. Vektorfelder: Physik und Topologie ... 523
10.1 Vektorfelder ... 523
10.1.1 Komplexe Funktionen als Vektorfelder ... 523
10.1.2 Physikalische Vektorfelder ... 525
10.1.3 Fluß und Kraftfelder ... 527
10.1.4 Quellen und Senken ... 528
10.2 Windungszahlen und Vektorfelder* ... 530
10.2.1 Der Index eines singulären Punktes ... 530
10.2.2 Der Poincarésche Index ... 534
10.2.3 Das Indextheorem ... 535
10.3 Flüsse auf geschlossenen Flächen* ... 537
10.3.1 Formulierung des Satzes von Poincaré-Hopf ... 537
10.3.2 Definition des Index auf einer Fläche ... 539
10.3.3 Eine Erklärung des Satzes von Poincaré-Hopf ... 540
Aufgaben ... 543

11. Vektorfelder und komplexe Integration ... 549
11.1 Fluß und Arbeit ... 549
11.1.1 Fluß ... 549
11.1.2 Arbeit ... 552
11.1.3 Lokaler Fluß und lokale Arbeit ... 554
11.1.4 Divergenz und Rotation in geometrischer Form* ... 556
11.1.5 Divergenzfreie und rotationsfreie Vektorfelder ... 558
11.2 Komplexe Integration und Vektorfelder ... 560
11.2.1 Das Pólya Vektorfeld ... 560
11.2.2 Der Satz von Cauchy ... 562
11.2.3 Beispiel: Fläche als Fluß ... 563
11.2.4 Beispiel: Windungszahl als Fluß ... 565
11.2.5 Lokales Verhalten von Vektorfeldern* ... 566

11.2.6 Cauchysche Formel 568
11.2.7 Positive Potenzen 569
11.2.8 Negative Potenzen und Multipole 570
11.2.9 Multipole im Unendlichen 573
11.2.10 Laurentreihen als eine Multipolentwicklung 574
11.3 Das komplexe Potential 575
11.3.1 Einleitung 575
11.3.2 Die Stromfunktion 576
11.3.3 Das Gradientenfeld 578
11.3.4 Die Potentialfunktion 580
11.3.5 Das komplexe Potential 582
11.3.6 Beispiele 585
Aufgaben 587

12. Ströme und harmonische Funktionen 591
12.1 Harmonische Duale 591
12.1.1 Duale Ströme 591
12.1.2 Harmonische Duale 594
12.2 Konforme Invarianz 597
12.2.1 Konforme Invarianz harmonischer Funktionen 597
12.2.2 Konforme Invarianz des Laplace-Operators 599
12.2.3 Die Bedeutung des Laplace-Operators 600
12.3 Ein mächtiges Berechnungshilfsmittel 602
12.4 Die komplexe Krümmung, neue Bearbeitung* 605
12.4.1 Etwas Geometrie der harmonischen Äquipotentiallinien 605
12.4.2 Die Krümmung harmonischer Äquipotentiallinien 606
12.4.3 Weitere Umformungen der komplexen Krümmung 609
12.4.4 Weitere geometrische Eigenschaften der komplexen Krümmung 611
12.5 Ströme um ein Hindernis 613
12.5.1 Einleitung 613
12.5.2 Ein Beispiel 614
12.5.3 Die Spiegelungsmethode 619
12.5.4 Abbildung einer Strömung auf eine andere 626
12.6 Die Physik des Riemannschen Abbildungssatzes 629
12.6.1 Einleitung 629
12.6.2 Äußere Abbildungen und Strömungen um Hindernisse 629
12.6.3 Innere Abbildungen und Dipole 633
12.6.4 Innere Abbildungen, Wirbel und Quellen 635

12.6.5 Ein Beispiel: Automorphismus der Kreisscheibe 639
12.6.6 Greensche Funktion 641
12.7 Problem von Dirichlet 645
12.7.1 Einführung 645
12.7.2 Schwarzsche Interpretation 647
12.7.3 Dirichletsches Problem für die Kreisscheibe 649
12.7.4 Die Interpretationen von Neumann und Bôcher 652
12.7.5 Allgemeine Greensche Formel 657
Aufgaben 662

Literaturverzeichnis 667

Sachverzeichnis 673