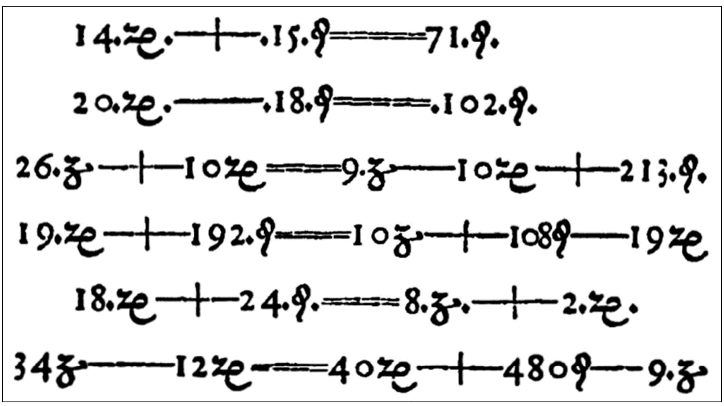
Horst Hischer

Studien zum Gleichungsbegriff



Veröffentlicht 2020 im Verlag Franzbecker, Hildesheim

ISBN 978-3-88120-519-1

www.franzbecker.de

Vorwort

Anlass zur Durchführung dieser Studien war ein in einer Online-Enzyklopädie entdeckter Eintrag zum Stichwort „Gleichung“, der einerseits im Sinne einer sauberen Definition nicht zufriedenstellen konnte, der dann aber vor allem inhaltlich unzureichend war.

Schnell zeigte sich jedoch, dass es keineswegs einfach ist, angemessen zu beschreiben oder gar zu definieren, *was eine Gleichung ist*. Auch die spontan von mir herangezogene Fachliteratur bot mir hierfür keine zufriedenstellenden Formulierungen an. Und die weitere Recherche zeigte, dass erstaunlicherweise auch der zu „Gleichung“ gehörende *Gleichheitsbegriff* ebenfalls selten hinreichend analysiert oder hinterfragt wird.

In dieser Situation wandte ich mich am 18. 4. 2018 an meinen Kollegen Prof. Dr. Ulrich Felgner, Univ. Tübingen, mit dem ich seit längerer Zeit mehrfach einen fruchtbaren mathematischen Gedankenaustausch geführt hatte. Ich schilderte ihm das von mir diagnostizierte Problem und schrieb dazu am Ende (was ich allerdings nunmehr teilweise anders sehen und auch formulieren würde):

> In meinen Unterlagen habe ich nirgends eine allgemeine Definition von „Gleichung“ im mathematischen Kontext gefunden. Immerhin wird im „Lexikon der Mathematik“ (Spektrum Akademischer Verlag 2000) „Gleichung“ definiert, leider nur wie in Wikipedia als eine „Gleichheit“ zwischen zwei Termen.[1] Jedoch ist das für die Mathematik viel zu eng, denn „Gleichungen“ finden wir überall, so auch in der Geometrie oder gar in der Mengenlehre. Doch wo wird das allgemein definiert?
>
> Und auch im Mathematikunterricht treten Gleichungen nicht nur bei Termen auf, sondern z. B. auch in der Geometrie. Also wenn schon, dann sollte und müsste man das allgemeiner definieren (wenn's denn überhaupt geht, oder geht es gar nicht?) – so war zumindest mein erster Anspruch.
>
> Die weitere Durchdringung dieser Fragestellung in den letzten Tagen führte dann bei mir zu folgender Vermutung:[2]

---

[1] Diesen damals spontanen Einwand halte ich nach ausführlicher Durchführung dieser „Studien“ nunmehr nicht mehr aufrecht, sodass der erwähnte Eintrag im „Lexikon der Mathematik“ als korrekt anzusehen ist, wenngleich er in der vorliegenden Form einer Erläuterung bedarf, damit der dort herangezogene Termbegriff hinreichend weit verstanden werden kann. (Siehe hierzu entsprechende Ausführungen in Abschnitt 5.2.)

[2] Auch diese Vermutung konnte erfreulicherweise *konstruktiv revidiert* werden.

- Wir können (nicht nur!) in der Mathematik überhaupt nicht allgemein definieren, was eine Gleichung ist (bzw. worauf es wohl hinaus läuft: was denn „Gleichheit“ bedeutet).
- Vielmehr müssen wir (locker formuliert) für jeden „Objektbereich“ neu definieren, was hier „Gleichheit“ bedeuten soll, und was dann also hier „Gleichungen“ sein sollen (oder sind?).

Wenn es um Zahlen (und damit verbunden: um Terme) geht, kann man das über „Gleichheit von Zahlen“ machen (was zur Frage führt, wann zwei Zahlen „gleich“ sind, ferner: was ist denn überhaupt eine „Zahl“ – im Unterschied zum Zahlzeichen?) – damit sind wir schon im Bereich der Philosophie der Mathematik! Und wenn es um geometrische Objekte wie etwa Strecken oder Geraden geht, dann bedarf es jeweils eigener Definitionen von „Gleichheit“! Und auch z. B. die „Gleichheit von Mengen“ wird ja definiert.

Nun wäre es schön, wenn das schon jemand irgendwo so oder ähnlich untersucht und geschrieben hat. Können Sie mir hier evtl. mit Literaturhinweisen weiterhelfen? Oder was meinen Sie dazu? Ist meine Vermutung richtig, dass „Gleichheit“ stets kontextbezogen einer Definition bedarf, oder kann es ein kontextfreies Verständnis von „Gleichheit“ geben?

Damit war ein anscheinend „kleines“ Forschungsprojekt umrissen – und hieraus ergab sich zu meiner Überraschung und der von Ulrich Felgner eine *lang anhaltende gemeinsame Arbeit* an dieser Fragestellung. Insbesondere konnte die letztgenannte Frage positiv beantwortet werden.

Gegen Ende des Jahres 2018, nachdem wir beide viel Material gesammelt und analysiert hatten, entschieden wir uns dann, statt einer zunächst geplanten gemeinsamen Publikation zwei getrennte Abhandlungen zu verfassen: eine rein mathematisch-logische durch Ulrich Felgner (die dann 2020 in Heft 2 der ‘*Jahresberichte der DMV*’ erschienen ist) und eine darauf bezogene, mathematikdidaktisch orientierte von mir, die in der Neubearbeitung der ‘*Grundlegenden Begriffe der Mathematik*’ in verkürzter Fassung als ein weiteres Kapitel erscheint.

In der *Schlussphase* der Konzeption dieser „Studien“ blickte ich erneut und eher zufällig in das mir seit Langem wohlbekannte Buch *‘Was sind und was sollen die Zahlen?’* von RICHARD DEDEKIND, das er 1887 im Manuskript fertiggestellt hat und das 1888 bei Vieweg erschien.

Im ersten Paragraphen mit dem Titel *„Systeme von Elementen“* schreibt er dort zu Beginn sowohl feinsinnig als auch leicht verständlich:

> Im folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b) und b dasselbe wie a, wenn alles, was von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$ und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls, wie a, ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Übereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a, b verschieden, a ist ein anderes Ding wie b, b ein anderes Ding wie a; es gibt irgendeine Eigenschaft, die dem einen zukommt, dem anderen nicht zukommt.

Man beachte, dass DEDEKIND an dieser Stelle noch nicht explizite von „Mathematik“ spricht, auch weder von „Gleichung“ noch von „gleich“ oder „Gleichheit“, sondern nur von der Bedeutung des hier benutzten *Zeichens* „=“ im Sinne von *„dasselbe“*. Dieser so inhaltlich (von ihm selbst in der siebenten Zeile) erstaunlicherweise als *„identisch“* gedeuteten Beziehung zwischen zwei derartigen „Dingen“ stellt er kontradiktorisch den Terminus „verschieden“ als „nicht identisch“ gegenüber.

Die Tragweite dieser brillanten, in Bezug auf diese Studien zunächst überraschenden Darstellung DEDEKINDs wurde mir nun schlagartig bewusst: DEDEKIND kennzeichnet hier also das – für „Gleichungen“ in der Mathematik typische und nicht nur hier auftretende – „Gleichheitszeichen“ im Sinne von „identisch mit“ und nicht etwa als „ist gleich“!

Diese einschränkende Deutung passt zu dem Sachverhalt, dass man in der Mathematik das *Gleichheitszeichen* seit etwa Mitte des 19. Jahrhunderts nicht mehr im Kontext anderer mathematischer Relationen verstehen wollte, sondern nur noch als eine *logische Konstante*. Auf diesen Aspekt der Gleichheit wies mich zuvor schon Ulrich Felgner während unserer Kommunikation bei der Recherche zum vorliegenden Thema hin.

DEDEKIND verwendet übrigens *nirgendwo* in seinem Buch über den Zahlbegriff die o. g. Termini „gleich“, „Gleichheit“ oder „Gleichung“, er kommt hier ohne sie aus. Nur im Vorwort schon der ersten Auflage spricht er je einmal von „Gleichheit“ und „Gleichung“, und zwar nur im Zusammenhang mit dem Verweis auf andere Werke.

Das Ausgangsziel der hier vorliegenden Studien bestand darin, zu klären, was man im Kontext der *Mathematik* unter „Gleichung“ verstehen *will* bzw. *sollte*. Das erfordert jedoch zugleich, zu klären, was unter „Gleichheit“ und damit dann auch unter „gleich“ verstanden werden kann bzw. sollte. All dies hätte gewiss knapp als Aufsatz, im Wesentlichen nur kurz begründend Ergebnisse nennend, abgefasst werden können. Stattdessen habe ich bewusst ausführlich und oft quasi dialogisch, wenn auch nicht chronologisch, all diejenigen Wege aufgezeichnet, die nun zu den aktuellen Ergebnissen geführt haben.

Für mich sind dies deshalb „Studien“, weil didaktische Fragen und Implikationen, die möglicherweise daraus resultieren, keineswegs als für abschließend beantwortet gelten können. Vielmehr soll dies nur ein Anstoß für weitere Untersuchungen, insbesondere für mögliche didaktische Konsequenzen sein.

Meinem Kollegen Prof. Dr. Ulrich Felgner gilt an dieser Stelle mein großer Dank, denn seine mathematisch-logisch-historische Expertise hat diese Studien seit ihrem Beginn im April 2018 bereichert und vorangetrieben. Vor allem danke ich ihm für viele interessante Literaturhinweise und für den stets anregenden wechselseitigen kritischen Gedankenaustausch während des gesamten Entstehungsprozesses. Zugleich möchte ich Prof. Dr. Wilfried Herget (Universität Halle-Wittenberg) für vielfältige konstruktive Korrespondenzen während der Entstehung dieser Studien danken. Und schließlich danke ich Dr. Walter Franzbecker vom Verlag Franzbecker für die spontane Bereitschaft, diese „Studien“ als ein kleines Büchlein separat zu verlegen.

Horst Hischer, im November 2020

Inhalt

1 Einleitung

Eine Abhandlung über den Gleichungsbegriff? – Vermutlich wird für alle, die sich in irgendeiner Weise mit Mathematik befassen, *intuitiv* klar sein, was eine *Gleichung ist*, ohne dass sie dafür eine „Definition“ parat haben, gehen sie doch seit ihrer Schulzeit mit dem Wort „Gleichung“ wohl so um, wie es LUDWIG WITTGENSTEIN in seinen ‘*Philosophischen Abhandlungen*’, Nr. 43, formulierte:

> Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache.

So definiert FLORIAN CAJORI in seinem 1919 erschienenen Werk *‘Theorie der Gleichungen’* (239 Seiten) an keiner Stelle „Gleichung“. Und auch in dem 1990 von GERHARD KOWOL erschienenen Buch *‘Gleichungen: eine historisch-phänomenologische Darstellung’* (294 Seiten) sucht man vergeblich eine entsprechende Definition. Stattdessen betrachten beide Autoren eine Fülle unterschiedlicher Gleichungs*typen* – wenn auch mit je eigenem Anliegen.

Ebenso findet man im 2015 von REGINA BRUDER et al. herausgegebenen ‘*Handbuch der Mathematikdidaktik’* – wie bei CAJORI und KOWOL – nirgendwo eine *Definition* von „Gleichung“, obwohl doch die sog. „Gleichungslehre“ ein klassischer Gegenstand des Mathematikunterrichts ist. Zwar werden Gleichungen hier in einem mit „Algebraunterricht“ überschriebenen Abschnitt in ihrer dort typischen Vielfalt *betrachtet*, womit aber nicht die „Algebra“ genannte moderne Strukturtheorie gemeint ist, sondern die *Schulalgebra*, die im Sinne der „klassischen“ Algebra (mit Bezug z. B. auf die *‘Vollständige Anleitung zur Algebra’* von LEONHARD EULER, 1771) jedoch letztlich nur eine *Gleichungslehre* ist. – Eine Definition von „Gleichung“ wird also mit Blick auf die Unterrichtsgestaltung auch in diesem Handbuch offensichtlich für nicht erforderlich gehalten.

Und dabei ist man doch in der Mathematik stets bemüht, alle verwendeten Termini möglichst *explizit* zu definieren, zumindest aber *implizit* – wie solche anscheinend selbstredenden wie „Zahl“ bei DEDEKIND in *‘Was sind und was sollen die Zahlen?’* (1888). Warum nicht also auch bei „Gleichung“?

So entsteht bereits aufgrund des oben skizzierten ersten Blicks in die Fachliteratur bezüglich „Gleichung“ der Eindruck, dass es in der Mathematik und auch in der Didaktik der Mathematik wahrlich andere Sorgen gibt, als der Frage nachzugehen, was denn eine Gleichung eigentlich ist.

Das scheint schon die Betrachtung so simpler Gebilde wie „$3+5=8$“ zu bestätigen. Denn hier ist doch wohl (bereits seit der Grundschule) gewiss klar, was diese „Gleichung“ *bedeutet!* – Wirklich? Schauen wir mal genauer hin:

Das Gebilde „$3+5=8$“ kann als das *Ergebnis der Rechenaufgabe* „$3+5$“ angesehen werden, was man auch ohne das Gleichheitszeichen hätte schreiben können, nämlich als „$3+5$ *ergibt* 8“. Das Gleichheitszeichen wäre in dieser Interpretation also nur eine Kurzfassung für „ergibt“, es wäre *dann* komplett verzichtbar!

Aber was bedeutet *dann* „$8=3+5$“? Hier müsste das Gleichheitszeichen wohl in ganz anderer Lesart auftreten: „8 *ist zerlegbar in die Summe* $3+5$“.

Wir stehen hier also vor der Situation, dass ein („anscheinend“ oder gar „scheinbar“?) mathematisches Symbol situativ unterschiedlich interpretierbar ist. – Für Kenner ist so etwas im Sinne flexibler Situationsanpassung gewiss nichts Ungewöhnliches, für andere hingegen mag es eher problematisch sein.

Dem steht nun aber entgegen, dass man sowohl „8“ als auch „$3+5$“ als *„Zeichen für Zahlen“* auffassen kann, und zwar hier für *dieselbe Zahl*, was dann zur *Gleichwertigkeit* der Schreibweisen „$3+5=8$“ und „$8=3+5$“ führen würde. Hingegen zeigen die ersten Beispiele, dass dort „3“, „5“ und „8“ bereits selber als *Zahlen* aufgefasst werden, nicht aber als *Zeichen für Zahlen*. Doch was ist „richtig“?

Und wenn nun auf zumindest einer Seite des Gleichheitszeichens Variablen hinzukommen, entsteht ein weiterer, völlig neuer Deutungsbedarf zur Klärung der Frage dessen, was denn eine „Gleichung“ ist. Denn was ist z. B. bei „$3+x=8$“ eigentlich „gleich“?

Diesen Fragen soll im Folgenden auf unterschiedlichen Wegen nachgegangen werden, beginnend mit einem kurzen Blick in ausgewählte Quellen.

Losgelöst davon wird danach zunächst phänomenologisch untersucht, wie uns Gleichungen

1. *innerhalb der Mathematik* und
2. *sprachlich jenseits der Mathematik*

begegnen. Nach solchen Vorbetrachtungen wird ein durch „Gleichheit“ und „Identität“ angedeuteter Themenbereich vielschichtig betrachtet. Und schließlich wird darauf aufbauend eine *Definition* für „Gleichung“ entwickelt.

Auf eine Merkwürdigkeit, die im Rahmen dieser Studien hervortrat, sei bereits an dieser Stelle hingewiesen: Die *Verfahren zum Lösen von Gleichungen* bilden den historischen Ursprung der „Algebra“, im Wesentlichen angefangen bei dem arabisch-persischen Mathematiker „ALCHWARISMI“ (ca. 780 bis 850), aufgegriffen und weiter entwickelt um 1500 herum durch die *Cossisten* (z. B. ADAM RIES) und danach – bis noch ins 19. Jahrhundert hinein – durch LEONHARD EULER (1771, in seiner ‘*Anleitung zur Algebra*’). Und dann kam die wesentliche *Wende* – weg von der ursprünglichen Algebra, nämlich der bloßen Untersuchung der *Lösungsverfahren,* und hin zur *modernen*, mit den Namen ABEL und GALOIS verbundenen Algebra: nämlich der Untersuchung derjenigen *Strukturen,* in denen zu lösende Gleichungen auftreten können. Jedoch stand der Gleichungs-*Begriff* anscheinend nie im Fokus des Interesses.

- *Postskriptum*

Im Buch *‘Wie man mathematisch denkt’* von KEVIN HOUSTON (2012) ist auf S. 44 zu lesen:

> Eine **Gleichung** sagt aus, dass zwei Ausdrücke gleich sind, zum Beispiel $3x^2 - 7 = 4x$. Beachten Sie, dass eine **Ungleichung**, beispielsweise $x \leq 5$, keine Gleichung ist, da eine *Gleichung* eben auch *Gleichheit* beinhalten sollte. Gleichungen und Ungleichungen sind immer eine Aufforderung. Sie wollen gelöst werden, also die Werte der Unbekannten bestimmt werden, für die sie gültig sind.

Und zuvor auf S. 37 wird mitgeteilt:

> […] wenn wir das Gleichheitszeichen benutzen, behaupten [wir], die beiden Objekte auf den beiden Seiten seien *exakt dieselben* […]

Auch diese Fehleinschätzung rechtfertigt die hier vorgelegten Studien …

2 Eine erste Bestandsaufnahme zum Gleichungsbegriff

2.1 Ein kurzer Blick in die Literatur

HEINRICH WEBER und JOSEF WELLSTEIN schreiben in der '*Enzyklopädie der Elementarmathematik'* (1903) im „Ersten Buch" (*Grundlagen der Arithmetik*), und zwar dort im „Ersten Abschnitt" (*Natürliche Zahlen*) auf S. 17 (ebd.):

> Ein Satz, der ausspricht, daß ein Zeichen a dieselbe Bedeutung haben soll wie ein anderes Zeichen b, den wir in der mathematischen Zeichensprache auch so ausdrücken $a = b$, heißt eine G l e i c h u n g.

Die hier vorliegende inhaltliche Beschreibung von „Gleichung" wirkt auf den ersten Blick einleuchtend und akzeptabel, und sie wird Assoziationen an die 15 Jahre zuvor von RICHARD DEDEKIND gemachten Ausführungen zum Gleichheitszeichen wecken (vgl. S. III). Jedoch wirft sie auch Fragen auf, weil sich das o. g. Werk gemäß Untertitel an „Lehrer und Studierende" wendet und weil obiges Zitat dort bereits zu Beginn auftritt:

Denn was soll sich die Leserschaft unter der „Bedeutung eines Zeichens" vorstellen – unter welcher Voraussetzung haben zwei Zeichen „dieselbe Bedeutung"? Und weshalb schreiben die Autoren, *„daß ein Zeichen a dieselbe Bedeutung <u>haben soll</u> ..."* und nicht „*... dieselbe Bedeutung <u>hat</u> ...“?*

Ist all das Absicht mit einem tieferen Sinn? Und wenn das so sein sollte, darf man dann wirklich erwarten, dass solche Feinheiten von den avisierten Adressaten kritisch *erkannt werden können* oder gar *erkannt werden*? Welchen „Nutzen" hat also eine solche Mitteilung (bzw. Erläuterung?) an dieser Stelle für die Angesprochenen?

ULRICH FELGNER äußerte diesbezüglich mir gegenüber die Vermutung, dass WEBER und WELLSTEIN in obigem Zitat das Wort „Bedeutung" im Sinne von GOTTLOB FREGE verwendet hätten, wie er es kurz zuvor 1892 in seiner Schrift '*Über Sinn und Bedeutung*' erörtert hat. Das wird auch aus dem Vergleich zwischen dem obigen Zitat und dem deutlich, was FREGE dort eingangs in seinem Essay schreibt (ebd., S. 26 f.):[3]

---

[3] Unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original

> Es liegt nun nahe, mit einem Zeichen (Namen, Wortverbindung, Schriftzeichen) außer dem Bezeichneten, was die Bedeutung des Zeichens heißen möge, noch das verbunden zu denken, was ich den Sinn des Zeichens nennen möchte, worin die Art des Gegebenseins enthalten ist. […] Es würde die Bedeutung von „Abendstern" und „Morgenstern" dieselbe sein, aber nicht der Sinn.
>
> Aus dem Zusammenhange geht hervor, daß ich hier unter „Zeichen" und „Namen" irgendeine Bezeichnung verstanden habe, die einen Eigennamen vertritt, deren Bedeutung also ein bestimmter Gegenstand ist […].

Das 1961 von JOSEF NAAS und HERMANN LUDWIG SCHMID herausgegebene zweibändige '*Mathematische Wörterbuch'* enthält in Band 1 auf S. 640 einen recht umfangreichen Eintrag zu „Gleichung", der wie folgt beginnt (ebd.):

> Eine mathematische *Gleichung* ist ein aus Zeichen für gewisse feste mathematische Gegenstände (wie Mengen, Zahlen, Funktionen, Operationen etc.) und aus Variablen für die Elemente gewisser Bereiche (der *Variabilitätsbereiche* dieser Variablen) mathematischer Gegenstände (wie den Bereich der reellen Zahlen, den Bereich der ein stelligen reellen Funktionen etc.) zusammengesetzter und im Rahmen der jeweils betrachteten mathematischen Theorie sinnvoller Ausdruck, in dem das *Gleichheitszeichen* „=" (als Zeichen der Identität, d. h. der völligen Übereinstimmung von Dingen) auftritt.

Die Zusätze *„Gleichheitszeichen als Zeichen der Identität"* und *„… der völligen Übereinstimmung"* passen zur auf S. III zitierten Einleitung von DEDEKIND. Anders als bei WEBER & WELLSTEIN (s. o.) folgt danach darüber hinaus eine Präzisierung des o. g. Eintrags:

> Der Begriff des sinnvollen Ausdruckes, wie er hier inhaltlich verwendet wurde, kann durch Formalisierung der jeweils betrachteten Theorie innerhalb der mathematischen Logik genau präzisiert werden. „Sinnvoll" ist dabei nicht mit „richtig" zu verwechseln. Genauso wie es in der Umgangssprache falsche sinnvolle Aussagen gibt (z. B.: Die Sonne kreist um die Erde), gibt es auch falsche Gleichungen (z. B. $1 = 2$).

Es folgen einige „Ausdrücke" (s. o.) als Beispiele für „Gleichungen" wie

$$0 = 0,\ (a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2,\ a \cdot x + b = 0,\ \sqrt{x} = -1\,,$$

aber z. B. auch $1 = 2$, ferner noch einige Differentialgleichungen.