

Abit **MEHR
ERFAHREN**

Mathematik
Gymnasium
Baden-Württemberg
ab 2021

Das musst du können!



STARK

Inhalt

Analysis

1 Gleichungen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	1
1.3 Nullprodukt und Substitution	2
2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften	3
2.1 Potenzfunktionen	3
2.2 Ganzrationale Funktionen	4
2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	5
2.4 Natürliche Exponentialfunktion	6
2.5 Entwicklung von Funktionen	7
2.6 Vielfachheit von Nullstellen	9
2.7 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	10
3 Gebrochenrationale Funktionen	11
3.1 Nullstellen und Polstellen	11
3.2 Grenzwerte und Asymptoten	12
4 Ableitung	16
4.1 Bedeutung der Ableitung	16
4.2 Ableitungen der Grundfunktionen	16
4.3 Ableitungsregeln	17
4.4 Tangente und Normale	18
5 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	19
5.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	19
5.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	22
5.3 Ortskurven	25
5.4 Extremwertaufgaben	26

6	Stammfunktion und Integral	28
6.1	Stammfunktion	28
6.2	Integral	30
6.3	Flächenberechnungen	31
7	Integralfunktion	35
8	Weitere Anwendungen des Integrals	37
8.1	Rekonstruierter Bestand	37
8.2	Mittelwert	37
8.3	Volumen von Rotationskörpern	38

Analytische Geometrie

1	Lineare Gleichungssysteme	39
2	Vektoren	40
2.1	Rechnen mit Vektoren	40
2.2	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	41
2.3	Skalarprodukt	41
2.4	Beweise mithilfe von Vektoren	42
2.5	Vektor- bzw. Kreuzprodukt	43
3	Geraden und Ebenen	44
3.1	Geraden	44
3.2	Ebenen in Parameterform	46
3.3	Ebenen in Normalen- bzw. Koordinatenform	47
3.4	Umwandlung: Parameterform in Koordinatenform	48
3.5	Hesse'sche Normalenform	49
4	Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	50
4.1	Lage zweier Geraden	50
4.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene	51
4.3	Lage zweier Ebenen	52
4.4	Schnittwinkel	54

5	Abstände zwischen geometrischen Objekten	55
5.1	Abstand zu einer Ebene	55
5.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	56
5.3	Abstand zweier windschiefer Geraden	58
6	Spiegelungen	59


Stochastik

1	Ereignisse	61
2	Wahrscheinlichkeitsberechnungen	62
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	62
2.2	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	62
2.3	Baumdiagramme und Pfadregeln	63
2.4	Urnenmodelle und Bernoulli-Formel	64
2.5	Stochastische Unabhängigkeit	65
3	Zufallsgrößen	66
3.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	66
3.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	67
4	Binomialverteilung	69
4.1	Bernoulli-Experiment, binomialverteilte Zufallsgrößen	69
4.2	Erwartungswert und Standardabweichung	71
5	Testen von Hypothesen	72
6	Normalverteilung	76
6.1	Normalverteilte Zufallsgrößen	76
6.2	Erwartungswert und Standardabweichung	78
	Stichwortverzeichnis	79

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur im Leistungsfach benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im Pflichtteil abgefragt. Durch den klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:

- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 840068)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 840078)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 840088)

Offizielle Prüfungsaufgaben und weitere Übungsaufgaben für die Prüfung mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg, Mathematik Leistungsfach“ (Bestell-Nr. 85001).

2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

2.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form:

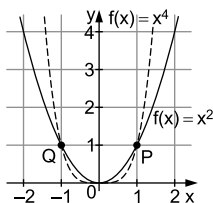
$f: x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$

Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

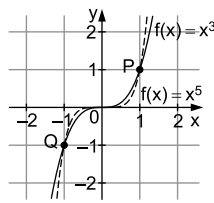
- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$ Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$
Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

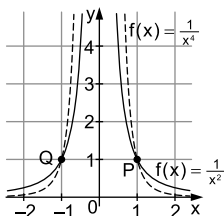
Parabeln: n gerade; $W_f = \mathbb{R}_0^+$



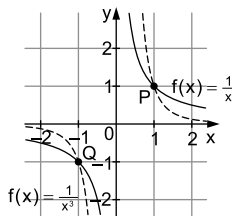
n ungerade; $W_f = \mathbb{R}$



Hyperbeln: n gerade; $W_f = \mathbb{R}^+$



n ungerade; $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Wurzelfunktion

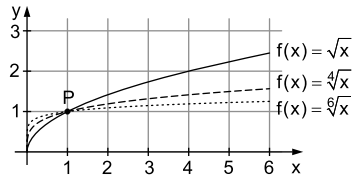
Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:

$f: x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (n -te Wurzelfunktion)

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}_0^+$

Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}_0^+$

1. G_f verläuft durch $P(1 | 1)$.
2. Einzige Nullstelle: $x=0$
3. Je größer n , desto
 - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
 - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



2.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

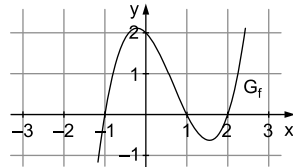
Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 2.6).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstellen bei $x=2$,
 $x=-1$ und $x=1$

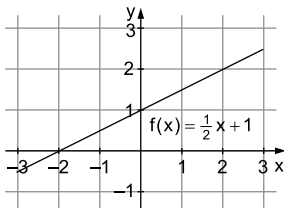


Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

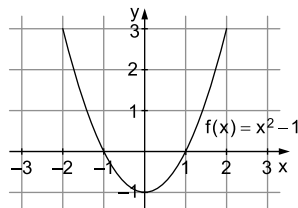
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

Graph ist eine Parabel.



3 Zufallsgrößen

3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n die Zufallsgröße die möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_n annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (\text{Normierungsbedingung})$$

Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Stabdiagramm oder ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise

Schritt 1: Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Stabdiagramm bzw. Histogramm erstellen



Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X , die die Anzahl der Sechser beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:

Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2$$

Schritt 2:

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 64) ermittelt werden:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^2 = 0,7^2 = 0,49$$

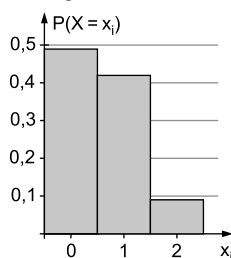
$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^1 = 0,42 \qquad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^0 = 0,09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



3.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + \dots + x_n \cdot P(X=x_n) = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$$\text{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert μ einer Zufallsgröße X ist häufig kein Wert, den die Zufallsgröße tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.



Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK