Bessere Noten in Klausuren

Besser in Mathematik

Integralrechnung

Mit 28 S. Lösungsheft

Oberstufe

Cornelsen
SCRIPTOR

Peter Schwittlinsky

Besser in Mathematik

Integralrechnung

Mit 28 S. Lösungsheft

Oberstufe

Cornelsen
SCRIPTOR

Vorwort 5

1 **Problemstellungen** 6
1.1 Ein mathematisches Problem 6
1.2 Ein physikalisches Problem 7
1.3 Noch ein mathematisches Problem 11

2 **Integrale zur Flächenberechnung** 14
2.1 Obersummen und Untersummen 14
2.2 Summengrenzwerte – das bestimmte Integral 19
2.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals 24
2.4 Die Flächenmaßzahlfunktion und ihre Ableitung 28
2.5 Stammfunktionen und das bestimmte Integral 30
Test Kapitel 2 33

3 **Bestimmung von Stammfunktionen** 34
3.1 Faktorregel und Summenregel 34
3.2 Potenzfunktionen mit Exponenten ungleich –1 36
3.3 Ganzrationale Funktionen 39
3.4 Die Funktion f mit $f(x) = x^{-1}$ 41
3.5 Gebrochenrationale Funktionen 42
3.6 Trigonometrische Funktionen 45
3.7 Exponentialfunktionen 47
3.8 Andere Funktionen – partielle Integration und Integration durch Substitution 48
3.9 Übersicht über einige Stammfunktionen 52
Test Kapitel 3 54

4 **Bestimmung von Flächeninhalten** 56
4.1 Fläche zwischen Graph und x-Achse 57
4.2 Fläche zwischen zwei Graphen 68
4.3 Parameteraufgaben zur Flächenberechnung 71
4.4 „Unendliche“ Flächen, uneigentliche Integrale 78
Test Kapitel 4 81

5 **Rauminhalte bei Rotationskörpern** 83
5.1 Rotation um die y-Achse 86
5.2 Rotation um die x-Achse 87
Test Kapitel 5 89

6 Anwendungen der Integralrechnung 90
6.1 Strecke und Geschwindigkeit 90
6.2 Arbeit, Energie und Leistung 93
6.3 Stromstärke und Ladung 93
6.4 Spannarbeit 94
6.5 Integralrechnung in anderen Sachzusammenhängen 94
Test Kapitel 6 96

7 Die Integralfunktion 97
7.1 Das Integral $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ 97
7.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 99
7.3 Weitere häufig benötigte Integrale 100

Abkürzungsverzeichnis 101

Stichwortverzeichnis 102

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Band der Reihe Besser in Mathematik hilft Ihnen, Ihre Kenntnisse im Fach Mathematik zu verbessern. Sie können gezielt Stoff nachholen und wiederholen, um sicherer zu werden! Die Integralrechnung gehört als Teil der Analysis zum zentralen Bestandteil der Mathematik in der Oberstufe. Wie die Differentialrechnung auch, findet sie in vielen Bereichen, vor allem in der Physik, ihre Anwendungen. Im vorliegenden Band werden kleine Aufgaben angeboten, mit denen Sie selbstständig arbeiten können.

Die Schwerpunkte sind:
- Definitionen und Regeln kennen und anwenden,
- Aufgaben strukturieren und strategisch bearbeiten,
- Diagramme, Formeln und Funktionen erstellen und interpretieren,
- Zusammenhänge begründen und überprüfen.

Die Texte und die Aufgaben in diesem Buch sind so ausgewählt und zusammengestellt, dass Ihnen die Bearbeitung möglichst leichtfällt.

Tipps

- Legen Sie sich ein eigenes Arbeitsheft zu, in das Sie schreiben.
- Sind Sie sich beim Lösen der Übungsaufgaben nicht ganz sicher, sehen Sie sich die Beispiele noch einmal genau an.
- Veranschaulichen Sie sich die Fragestellung durch eine Skizze. Für die Darstellung von Funktionsgraphen stehen verschiedene Progamme zur Verfügung, z. B. „Turbo Plot“, das als Shareware im Internet unter www.turboplot.de erhältlich ist.
- Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Lösungsheft. Überprüfen Sie bei Fehlern immer genau, was Sie falsch gemacht haben. Korrigieren Sie Fehler.
- Am Ende eines jeden Kapitels können Sie in einem kleinen Test überprüfen, ob Sie den Stoff nun beherrschen. Wenn nicht, bearbeiten sie die entsprechenden Aufgaben in einigen Tagen noch einmal.

Viel Spaß und Erfolg beim Lernen!

1 PROBLEMSTELLUNGEN

Darum geht es

In diesem Kapitel sollen Sie etwas darüber erfahren, warum man überhaupt Integralrechnung betreibt. Verschiedene Fragestellungen, aus denen hier stellvertretend drei herausgegriffen wurden, sollen die Notwendigkeit dieses Zweiges der Analysis verdeutlichen.

Bewusst wurde dabei auch ein physikalischer Ansatz mit einbezogen, da die Integralrechnung gerade dort eine große Rolle spielt. In der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik war sowieso die Anwendung in der Physik ein starker Motor des mathematischen Fortschritts.

Tipp

Wenn die Physik nicht gerade Ihr stärkstes Fach ist, haben Sie zwei Möglichkeiten:

- Sie überspringen die entsprechenden Ausführungen und Aufgaben. Nachteile entstehen Ihnen dadurch keine, da die Anwendung in der Physik kein entscheidendes Thema dieses Buchs ist.
- Sie ergreifen die Gelegenheit, etwas in einem Ihnen suspekten Fach zu lernen und lesen weiter. Wenn Sie am Ende sagen: „Versteh ich nicht!“ oder „Was soll ich damit?“, haben Sie allerhöchstens einige Minuten Ihrer Zeit geopfert.

1.1 Ein mathematisches Problem

Darum geht es

In der Differentialrechnung lernt man, wie man zu gegebenen Funktionen Ableitungsfunktionen bestimmt und wozu man sie verwenden kann (Bestimmung von Extremwerten usw.).
Aber was muss man eigentlich tun, um dieses Verfahren umzukehren, also aus einer gegebenen Ableitungsfunktion die ursprüngliche Funktion zurückzugewinnen, die Funktion also sozusagen „aufzuleiten“? Geht das überhaupt oder nur manchmal oder etwa gar nicht?
Außerdem: Steckt hinter dieser Umkehrung ein anderer Sinn als der der reinen Erkenntnisgewinnung, kann man also etwas damit anfangen?

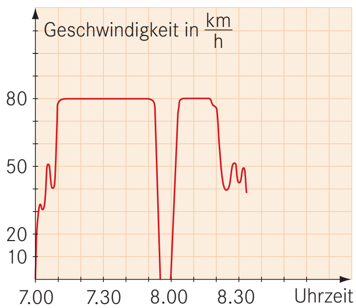
Beispiele:
An den folgenden einfachen Beispielen sieht man, dass es zumindest manchmal möglich ist, denn die Ableitung der Funktion F ist jeweils die Funktion f.

$f(x)$	$F(x)$
$2x$	x^2
$3x^2$	x^3
$\cos x$	$\sin x$

Die Fragestellung greift also das mathematische Prinzip der eindeutigen Umkehrbarkeit einer Operation auf, das z. B. im Zusammenhang mit Subtraktion, Division und Wurzelziehen schon mehrmals im Unterricht vorkam und auch bzgl. der Machbarkeit und Eindeutigkeit unterschiedlich beantwortet wurde.

1.2 Ein physikalisches Problem

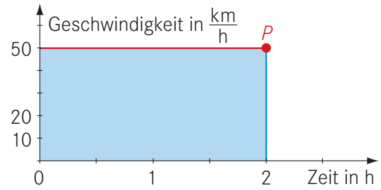
Beispiel:
In der Abbildung sieht man einen Ausschnitt einer sogenannten Fahrtenscheibe eines LKWs bzw. Omnibusses. Auf ihr ist in Abhängigkeit von der Uhrzeit die Geschwindigkeit des Fahrzeugs eingezeichnet. Es handelt sich also um ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm (v-t-Diagramm). Zur besseren Darstellung ist die Fahrtenscheibe nicht in ihrer Originalform gezeichnet (rund), sondern die Darstellung wurde in ein übliches rechtwinkliges Koordinatensystem übertragen.



Um 7:30 Uhr z. B. ist das Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von ca. 80 $\frac{km}{h}$ gefahren, von 7:55 bis 8:00 Uhr hat es gestanden usw.
Aber auch die zurückgelegte Strecke kann man mit einer solchen Scheibe berechnen. Dazu zwei Beispiele mit einfacheren Diagrammen:

Beispiel 1

Fährt man mit einem Fahrzeug zwei Stunden lang mit der konstanten Geschwindigkeit $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so legt man eine Strecke von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\,\text{h} = 100\,\text{km}$ zurück.

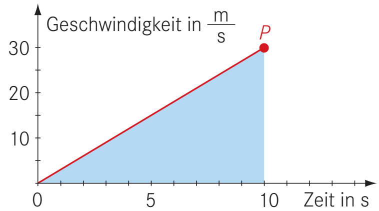


Die konstante Geschwindigkeit $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ wird in einem Graphen durch eine Parallele zur Zeit-Achse im Abstand 50 Einheiten $\left(\text{à } 1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ dargestellt. Die Zeitdauer 2 Stunden entspricht einem Punkt P auf dieser Parallelen im Abstand 2 Einheiten (à 1 h) von der Geschwindigkeits-Achse.

Der Koordinatenursprung, die Achsen, die Parallele und eine Senkrechte vom Punkt P auf die Zeit-Achse bilden ein Rechteck mit dem Flächeninhalt (Rechteck: Länge · Breite) $50 \cdot 2 = 100$ Einheiten. *Die Maßzahl der Fläche entspricht also genau der Maßzahl der gefahrenen Strecke.* Die physikalische Einheit der Strecke ist dabei 1 km.

Beispiel 2

Beschleunigt man ein Fahrzeug von $0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\left(= 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ gleichmäßig in einer Zeit von 10 Sekunden, so erhält man als v-t-Diagramm eine Strecke, die Teil einer Ursprungsgeraden ist, nämlich derjenigen, die durch den Punkt P mit den Koordinaten $t = 10$ (h) und $v = 30\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ verläuft.



Hier ist die Fläche, die von dieser Strecke, der Zeit-Achse und einer Senkrechten vom Punkt P auf die Zeit-Achse gebildet wird, durch eine Dreiecksformel zu berechnen, und zwar hat sie die Größe $\frac{10\,\text{s} \cdot 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 150\,\text{m}$.

In der Tat legt das Fahrzeug auch genau eine Strecke der Länge 150 m zurück, denn ein Rückgriff auf die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ergibt:

Die Beschleunigung des Fahrzeugs ist: $a = \frac{v}{t} = \frac{30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\,\text{s}} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Folglich ist die zurückgelegte Entfernung: $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10\,\text{s})^2 = 150\,\text{m}$.

(Oder: Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs beträgt $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, in 10 s legt es also 150 m zurück.)

Fazit Die Maßzahl der zurückgelegten Strecke kann also durch Berechnung der Fläche unter einem v-t-Diagramm angegeben werden.

1 Fahrbericht eines PKWs (1)

Es sei der folgende „Fahrbericht“ eines PKWs gegeben: Ein PKW beschleunigt innerhalb von 5 Sekunden aus dem Stand auf die Geschwindigkeit $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\left(\text{ca. } 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. Mit dieser Geschwindigkeit fährt er 15 Sekunden gleichmäßig. In den nächsten 2 Sekunden bremst er bis zum Stand (z. B. wegen eines Fußgängers).

a) Zeichnen Sie ein *v-t*-Diagramm und berechnen Sie die zurückgelegte Strecke.
b) Bestimmen Sie die Länge der Strecke dabei als reine Maßzahl ohne Einheit und ergänzen Sie diese erst ganz am Ende.

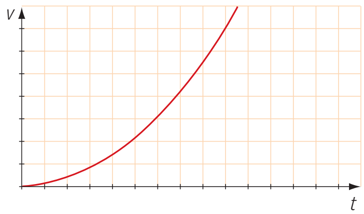
2 Fahrbericht eines PKWs (2)

Der Fahrbericht aus Übung 1 wird folgendermaßen ergänzt: Der PKW muss 10 Sekunden stehen bleiben. In 8 Sekunden beschleunigt er danach auf die Geschwindigkeit $14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\left(\text{ca. } 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ und fährt gleichmäßig 1 Minute lang (bis er das Ortsende erreicht). Danach beschleunigt er innerhalb 8 Sekunden auf $28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\left(\text{ca. } 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ und hält diese Geschwindigkeit 2 Minuten lang. Wegen einer roten Ampel muss er bremsen. Bevor er zum Stehen kommt, wird die Ampel grün und er kann wieder beschleunigen. In der Bremsphase verlangsamt er in 4 Sekunden auf $14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, in der anschließenden Beschleunigungsphase erhöht er seine Geschwindigkeit in 6 Sekunden wieder auf $28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und fährt mit dieser Geschwindigkeit 2 Minuten lang weiter. Am Ziel angekommen, bremst er gleichmäßig und steht nach 10 Sekunden.
Zeichnen Sie ein *v-t*-Diagramm zu diesem Fahrbericht (inkl. des Teils aus Übung 1) und berechnen Sie die Gesamtstrecke, die der PKW am Ende der Fahrt zurückgelegt hat, sowie seine „Durchschnittsgeschwindigkeit“.

In Übung 1 lag immer eine besondere Situation vor: Beschleunigen und Bremsen erfolgte gleichmäßig, im Graphen also in Form einer Strecke; Fahrten wurden mit konstanter Geschwindigkeit durchgeführt, im Graphen also parallel zur horizontalen Achse. Dabei konnte man die Maßzahl der zurückgelegten Strecke durch Berechnung des Flächeninhaltes unter dem Graphen ermitteln.
Bei nicht gleichmäßiger Beschleunigung eines Fahrzeugs braucht man somit eine Möglichkeit, Flächen zwischen einer Kurve und der Horizontal-Achse eines Koordinatensystems zu berechnen.

Beispiel

Auf nicht gleichmäßig beschleunigte Bewegungen kommt man bei der Betrachtung des *v*-*t*-Diagramms einer Rakete (Apollo, Ariane o. Ä.).



Durch die Faktoren

- ▷ merkliche Verminderung der Erdanziehungskraft sowie Verringerung des Luftwiderstands in größerer Höhe und
- ▷ Verringerung der anzutreibenden Masse durch Treibstoffverbrauch und Abstoßung der dazu verwendeten Tanks wird die Beschleunigung dank konstantem Antriebsschub nämlich ständig wachsen, d. h., die Geschwindigkeits**steigerung** wird immer schneller.

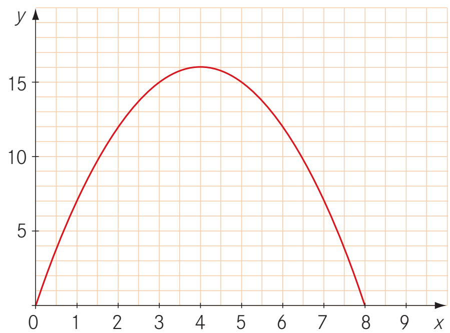
Das *v*-*t*-Diagramm wird also in etwa die Form einer Parabel haben (s. Abb.). Will man nun wissen, wie hoch die Rakete innerhalb einer bestimmten Zeit gestiegen ist, so muss man die Fläche unter dieser Parabel berechnen. Wie man dies tut, erfahren Sie in den Kapiteln 2 und 5.

1.3 Noch ein mathematisches Problem

Im Mathematik-Unterricht der Mittelstufe lernt man unter anderem, wie man Flächeninhalte berechnet:

Klasse	Geometrische Figur	Gegebene Größe(*n*)	Inhaltsformel
5	Quadrat	Seitenlänge *a*	$A = a \cdot a = a^2$
5	Rechteck	Seitenlängen *a* und *b*	$A = a \cdot b$
8	Parallelogramm	Grundseite *g*, Höhe *h*	$A = g \cdot h$
8	Trapez	Parallele Seiten *a* und *c*, Höhe *h*	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$
8	Dreieck	Grundseite *g* und zugehörige Höhe *h*	$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
10	Kreis	Radius *r*	$A = \pi \cdot r^2$
10	Ellipse	Halbachsen *a* und *b*	$A = \pi \cdot a \cdot b$

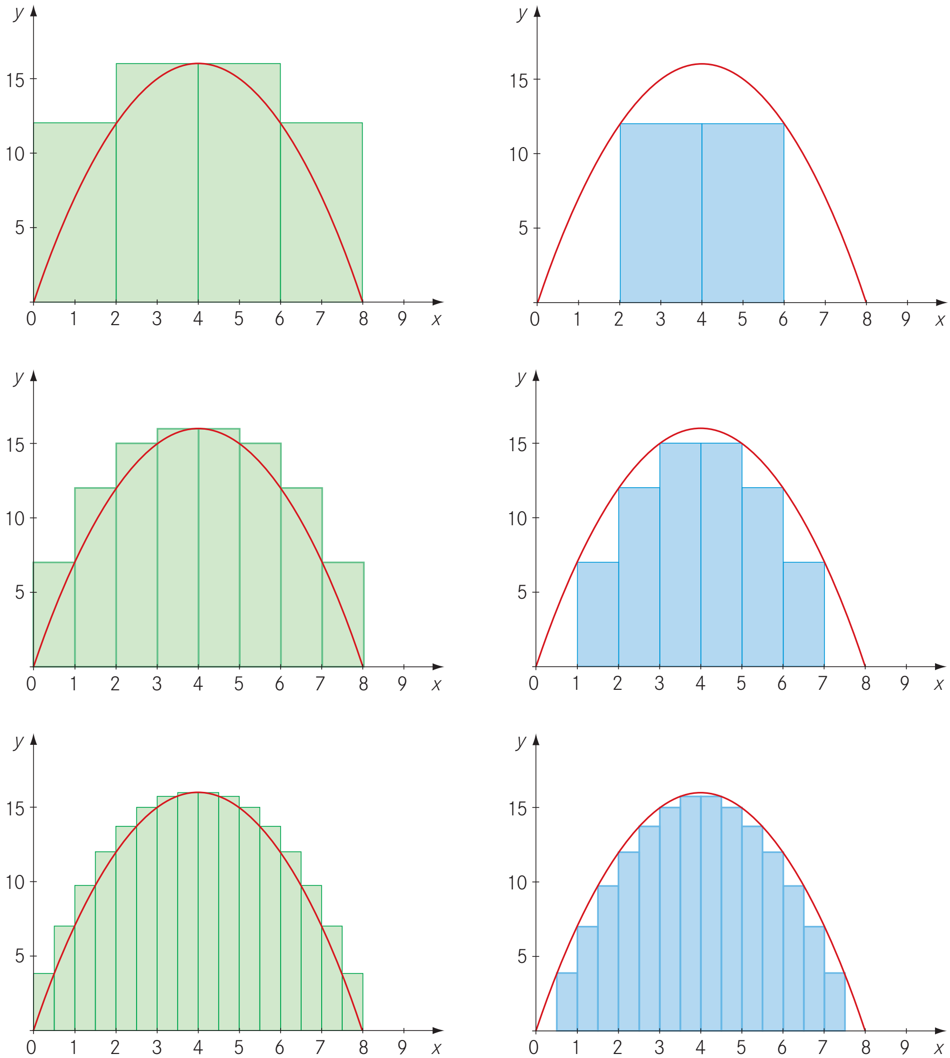
Mit der Integralrechnung erweitert man diese Flächenberechnungsformeln für die Berechnung von Flächen zwischen Kurven und der *x*-Achse bzw. zwischen zwei Kurven, deren Verlauf man mit einer Gleichung beschreiben kann, z. B. die Fläche zwischen der Parabel zu $f(x) = -x^2 + 8x$ und der *x*-Achse.



Dabei geht man ähnlich vor wie bei der Einführung der Berechnungsformel für die Kreisfläche: Man unterteilt die Fläche in beliebige berechenbare Flächenstücke (meist Rechtecke) und berechnet mit deren Hilfe einen Näherungswert. Danach wird von Schritt zu Schritt die Anzahl der Teilflächen erhöht und damit der Näherungswert verbessert. Sofern das Verfahren funktioniert, erhält man auf diese Art und Weise Werte, die dem Inhalt der gesuchten Fläche immer näher kommen. Zur Illustration betrachten Sie die Bilder der nachfolgenden Aufgabe.
Für sehr viele Kurven, die zu mathematischen Funktionen gehören, funktioniert dieses Verfahren und man kann „Grenzwerte“ bestimmen, die dem Flächeninhalt exakt entsprechen.

1 **Beschreiben Sie die folgende mathematische Bildergeschichte. Überlegen Sie dazu:**

a) Was ist überhaupt dargestellt?
b) Wie erhält man eine solche Unterteilung des Ausgangsintervalls?
c) Wodurch unterscheiden sich der linke und der rechte Bilderstreifen?
d) Was geschieht, wenn die Geschichte fortgesetzt wird?
e) Wie weit kann man die Geschichte fortsetzen?



Zeichnen Sie evtl. auch eigene Bilder der gezeigten Art zu anderen Funktionsgraphen.

Fazit Ansatz 1 läuft darauf hinaus, eine Rechenoperation (die Differentiation) rückgängig zu machen, die Ansätze 2 und 3 beide darauf, Flächen unter Kurvenstücken zu bestimmen. Erstaunlicherweise führen alle diese Problemstellungen zum gleichen mathematischen Prinzip.

2 In ein Becken wird Wasser eingelassen, und zwar mit einem Anschluss, der 200 $\frac{\text{l}}{\text{min}}$ liefern kann.

Das gleichmäßige Öffnen des Zulaufs dauert 5 Minuten. Nach 15 Minuten wird die Kapazität durch einen zweiten Zulauf innerhalb von 5 Minuten gleichmäßig auf 300 $\frac{\text{l}}{\text{min}}$ gesteigert und bleibt dann konstant bei 300 $\frac{\text{l}}{\text{min}}$.
Wie viel Wasser ist nach einer Stunde in dem Becken, wenn die Zuläufe in den letzten 5 Minuten gleichmäßig geschlossen werden?

a) Fertigen Sie zuerst ein Diagramm an, das die beschriebene Situation darstellt. Üblicherweise wird die Zeit mit *t* bezeichnet und auf der Horizontal-Achse (in der Mathematik meist *x*-Achse) untergebracht. Ein sinnvoller Maßstab wäre hierbei z. B. 1 cm für 5 Minuten. Die Hochachse (in der Mathematik *y*-Achse) stellt dann die Zulaufkapazität dar und kann etwa mit dem Maßstab 1 cm für 50 $\frac{\text{l}}{\text{min}}$ unterteilt werden.
Unterteilen Sie die erwähnte Stunde in die Abschnitte
   - ▷ Öffnen (5 Minuten),
   - ▷ Zulaufen I (15 Minuten),
   - ▷ Erhöhen (5 Minuten),
   - ▷ Zulaufen I + II (30 Minuten) und
   - ▷ Abdrehen (5 Minuten).

b) Beschreiben Sie, wie mithilfe des Diagramms die Wassermenge bestimmt werden kann, die in den einzelnen Zeitabschnitten in das Becken läuft.

c) Berechnen Sie schließlich die gesuchte Wassermenge.

3 Welche Strecke hat der LKW, dessen Fahrtenschreiber-Diagramm auf Seite 7 abgebildet ist, in der Zeit von 7:10 Uhr bis 8:20 Uhr zurückgelegt?

Vereinfachen Sie den Graphen, indem Sie die gerundeten Krümmungen durch Knicke ersetzen. Dadurch wird das Ergebnis zwar etwas ungenauer, aber anders wäre der Aufwand unverhältnismäßig hoch. Einen möglichen Maßstab können Sie der Zeichnung entnehmen (hinterlegtes Raster).