
MEHR
ERFAHREN
ABITUR-TRAINING
Gymnasium
Stochastik
Bayern
VIDEOS
STARK

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analysis

Bayern

STARK

Inhalt

Autor: Horst Lautenschlager

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, dass Sie sich beim Ansehen der Videos im WLAN befinden. Haben Sie keine Möglichkeit, den QR-Code zu scannen, finden Sie die Lernvideos auch unter:
http://qrcode.stark-verlag.de/940021V

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Unterricht, Klausuren und die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik (Teilgebiet Analysis) umfassend unterstützt.

Bei der Aufbereitung des Stoffs wurde berücksichtigt, dass in der Oberstufe und auch bei den Prüfungsaufgaben weniger Gewicht auf formale Rechenfähigkeiten und schematische Verfahrensweisen gelegt wird, gleichzeitig aber das Wissen und das Anwenden analytischer Grundkenntnisse an Bedeutung gewinnen. Daher werden im ersten Kapitel systematisch die **Eigenschaften reeller Funktionen und deren Funktionsgraphen** analysiert, bevor in den nächsten beiden Kapiteln mit der **Differenzial-** und **Integralrechnung** das Herzstück der Analysis behandelt wird. Die dort erlernten Verfahren werden im abschließenden Kapitel zur Lösung einiger typischer **Anwendungsaufgaben** eingesetzt.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie noch Probleme haben oder welches gerade im Unterricht behandelt wird. Falls Sie dabei auf einen Begriff oder einen Sachverhalt stoßen, bei dem Sie sich unsicher fühlen, können Sie im Stichwortverzeichnis nachschlagen.

Folgende strukturelle Maßnahmen erleichtern Ihnen die Arbeit mit diesem Buch:

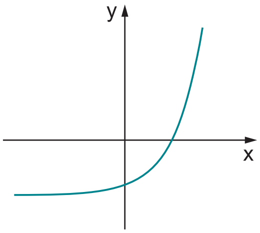
- Die wichtigen **Begriffe** und **Definitionen** eines Lernabschnitts sind möglichst schülergerecht und doch mathematisch präzise formuliert in farbig getönten Feldern, **Regeln, Lehr-** und **Merksätze** in farbig umrandeten Kästen abgelegt.
- An jeden Theorieteil schließen passgenaue und kommentierte **Beispiele** an, die zur Erleichterung des Verständnisses dienen.
- Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.
- Jeder Lernabschnitt schließt mit **Übungsaufgaben**. Zur Selbstkontrolle finden Sie die zugehörigen **Lösungen** am Ende des Buchs vollständig ausgearbeitet.
- Die mit Stern **(✱)** versehenen Aufgaben dienen der Vertiefung und der Förderung des Problemlöseverhaltens. Sie können bei Zeitmangel ohne nachteilige Auswirkungen für das Grundverständnis übersprungen werden.

Viel Erfolg wünscht Ihnen

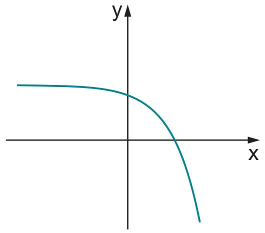
Horst Lautenschlager

5.3 Krümmungsverhalten und Wendestellen

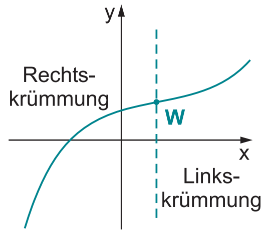
Gleitet man mit dem Finger auf einem Funktionsgraphen in Richtung zunehmender x-Werte entlang und beschreibt der Finger dabei eine Linkskurve (Rechtskurve), so ist der Graph linksgekrümmt (rechtsgekrümmt).



Linkskrümmung



Rechtskrümmung



W ist Wendepunkt

Von besonderem Interesse sind die Punkte des Graphen, in denen er sein Krümmungsverhalten ändert, also von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht oder umgekehrt.

Definition

Ein Punkt, in dem der Graph einer Funktion sein Krümmungsverhalten ändert, heißt **Wendepunkt**, die zugehörige x-Koordinate heißt **Wendestelle**.
Die Tangente bzw. Normale an den Funktionsgraphen in einem Wendepunkt wird als **Wendetangente** bzw. **Wendenormale** bezeichnet.
Einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente nennt man **Terrassenpunkt**.

Das Krümmungsverhalten einer Funktion können Sie mithilfe ihrer 2. Ableitung ermitteln.

Regel

Hinreichende Bedingung für die Krümmungsart
Ist f eine auf einem offenen Intervall I zweimal differenzierbare Funktion und gilt für alle $x \in I$

- $f''(x) > 0$, dann ist f auf I linksgekrümmt.
- $f''(x) < 0$, dann ist f auf I rechtsgekrümmt.

Die Lage der Wendestellen können Sie mithilfe zweier Lehrsätze ermitteln, die in folgender Regel zusammengestellt sind.

Regel

1. Satz: Notwendige Bedingung für Wendestellen

Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge eine Wendestelle besitzt, dann gilt $f''(x_0) = 0$.

2. Satz: Hinreichende Bedingungen für Wendestellen

a) Wenn für eine zweimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge $f''(x_0) = 0$ gilt und wenn $f''(x)$ beim Fortschreiten über die Stelle x_0 hinweg das Vorzeichen wechselt, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

b) Wenn für eine dreimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge $f''(x_0) = 0$ gilt und $f'''(x_0) \neq 0$ ist, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

Diese Kriterien erlauben Ihnen, schrittweise die Wendestellen einer mindestens zwei- bzw. dreimal differenzierbaren Funktion f(x) zu ermitteln.

Regel

Schrittweises Bestimmen von Wendestellen

1. Schritt: Berechnen Sie $f''(x)$.
2. Schritt: Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$.
3. Schritt: Überprüfen Sie für jede Lösung x_0, ob $f''(x)$ beim Fortschreiten von links nach rechts über x_0 hinweg das Vorzeichen wechselt.
   - Nutzen Sie hierfür das eventuell schon bekannte Krümmungsverhalten von f aus oder ermitteln Sie für kleine positive, reelle h die Vorzeichen von $f''(x_0 + h)$ und $f''(x_0 - h)$.
   - Ist der Nachweis eines Vorzeichenwechsels nicht möglich oder rechnerisch zu aufwendig, fahren Sie unter Schritt 5 fort.
4. Schritt: Werten Sie aus:
   - Wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen, so ist x_0 eine Wendestelle.
   - Bleibt das Vorzeichen von $f''(x)$ unverändert ($+ \to +$ bzw. $- \to -$), dann besitzt f bei x_0 keine Wendestelle.
5. Schritt: Berechnen Sie $f'''(x)$.
6. Schritt: Berechnen Sie den Funktionswert $f'''(x_0)$:
   - Ist $f'''(x_0) \neq 0$, so ist x_0 eine Wendestelle.
   - Ist $f'''(x_0) = 0$, so lässt sich endgültig keine Aussage darüber machen, ob x_0 eine Wendestelle ist.
7. Schritt: Falls sich x_0 als Wendestelle erwiesen hat, überprüfen Sie, ob $f'(x) = 0$. Wenn ja, so handelt es sich um eine Terrassenstelle.

Beispiele

1. Berechnen Sie die Lage des einzigen Wendepunktes der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

   Lösung:

   Schritt 1: Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

   $f'(x) = x \cdot e^x + e^x = e^x(x+1)$ $\quad$ $f''(x) = e^x \cdot 1 + (x+1) \cdot e^x = e^x(x+2)$

Schritt 2: Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

$f''(x) = e^x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -2 \;$ (da $e^x > 0$)

Schritt 3: $f''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0 = -2$ das Vorzeichen, da e^x stets positiv ist, $x+2$ für $x < -2$ negativ und für $x > -2$ positiv ist.

Schritt 4: Wegen des Vorzeichenwechsels ist $x_0 = -2$ Wendestelle von f.

2. Berechnen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = x^2 e^x$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Geben Sie damit die Lage aller Wendestellen der Funktion an.

   Lösung:

   Schritt 1: Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

   $f'(x) = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$

   $f''(x) = e^x \cdot (2x+2) + (x^2+2x) \cdot e^x = e^x(x^2+4x+2)$

   Regel zur Krümmungsart: Wegen $e^x > 0$ stimmt das Vorzeichen von $f''(x)$ mit dem Vorzeichen des quadratischen Terms $x^2 + 4x + 2$ überein. Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen finden Sie, dass die nach oben offene Parabel $y = x^2 + 4x + 2$ die x-Achse bei

   $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ und $x_2 = -2 + \sqrt{2}$

   schneidet; sie verläuft daher auf $]-\infty; -2-\sqrt{2}[\; \cup \;]-2+\sqrt{2}; +\infty[$ über und auf $]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$ unter der x-Achse.

   Daraus folgt für

   - $x \in \;]-\infty; -2-\sqrt{2}[\, \cup \,]-2+\sqrt{2}; +\infty[$: $f''(x) > 0$ und f linksgekrümmt
   - $x \in \;]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$: $f''(x) < 0$ und f rechtsgekrümmt

   Schritt 4: f besitzt Wendestellen bei $x_1 = -2-\sqrt{2}$ und $x_2 = -2+\sqrt{2}$.

3. Zeigen Sie, dass der Ursprung Terrassenpunkt der Funktion $f(x) = x^3 e^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist.

   Lösung:

   Mithilfe der Produktregel berechnen Sie zunächst $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$:

   $f'(x) = x^3 \cdot e^x + e^x \cdot 3x^2 = e^x(x^3 + 3x^2)$

   $f''(x) = e^x \cdot (3x^2 + 6x) + (x^3 + 3x^2) \cdot e^x = e^x(x^3 + 6x^2 + 6x)$

   $f'''(x) = e^x \cdot (3x^2 + 12x + 6) + (x^3 + 6x^2 + 6x) \cdot e^x = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$

   Dann gilt:

   - **Satz 2 b über Wendestellen:** f hat bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle, weil $f''(0) = e^0 \cdot 0 = 0$ und $f'''(0) = e^0 \cdot 6 = 6 \neq 0$.
   - **Schritt 7:** Wegen $f'(0) = e^0 \cdot 0 = 0$ besitzt die Wendetangente die Steigung 0 und verläuft horizontal.

   f besitzt bei $x = 0$ also einen Terrassenpunkt.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{2x}{1-x}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ keine Wendestelle besitzt.

Lösung:

Schritt 1: Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

$$f'(x) = \frac{(1-x) \cdot 2 - 2x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Satz 1 über Wendestellen: Besäße f eine Wendestelle, hätte die 2. Ableitung mindestens eine Nullstelle. Dies ist aber nicht der Fall, weil der Zähler des Quotienten $\frac{4}{(1-x)^3}$ nicht null wird.

Aufgaben

132. Zeigen Sie, dass die Graphen der folgenden Funktionen genau einen Wendepunkt aufweisen, und berechnen Sie dessen Koordinaten.

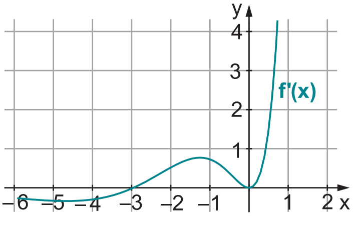
a) $f(x) = \frac{x+1}{e^{2x}}$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

b) $f_k(x) = 4e^{-x}(k - e^{-x})$
$\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{R}^+$

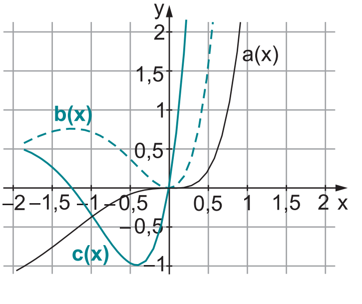
133. Wo schneidet die einzige Wendetangente des Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ die x-Achse?

134. Zeigen Sie, dass alle Wendetangenten der Schar $f_k(x) = (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}}$, $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^+$ parallel zueinander verlaufen.

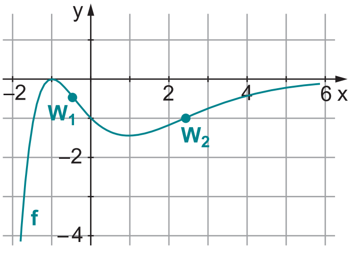
135. Die Skizze zeigt den Graphen der ersten Ableitung f' einer Funktion f.
Geben Sie die Lage der Wendestellen der Funktion f möglichst genau an und begründen Sie Ihr Vorgehen.



✳ **136.** Die Skizze zeigt die Graphen einer Funktion f(x) und ihrer Ableitungen f'(x) und f''(x).
Welcher Graph gehört zu welcher Funktion?
Begründen Sie Ihre Aussagen.



✱ **137.** Die Skizze zeigt den Graphen G_f einer Funktion f(x) mit seinen beiden Wendepunkten. Skizzieren Sie den Graphen $G_{f'}$ der Funktion f'(x), wenn alle Schnittpunkte von G_f und $G_{f'}$ auf den Koordinatenachsen liegen. Begründen Sie Ihr Vorgehen.



✱ **138.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Für die Widerlegung genügt die Skizze eines geeigneten Funktionsgraphen.

a) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion eine Wendestelle besitzt, dann besitzt sie auch mindestens ein relatives Extremum.

b) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion in Teilen ihrer Definitionsmenge rechts- und in anderen linksgekrümmt ist, dann besitzt sie auch eine Wendestelle.

c) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ nur linksgekrümmt ist, dann besitzt sie mindestens ein relatives Minimum.

129. • Eine Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ besitzt wegen $f(1) = 0$ an der Stelle $x_0 = 1$ eine horizontale Tangente, aber kein Extremum, weil f dort nicht das Vorzeichen wechselt. Der einzige von den abgebildeten Graphen mit dieser Eigenschaft ist h(x). Also gilt $h'(x) = f(x)$.

• Eine Funktion G mit $G'(x) = g(x)$ besitzt an der Stelle $x_1 = -1$ bzw. $x_2 = 1$ ein relatives Maximum bzw. Minimum, weil g dort eine Nullstelle besitzt und das Vorzeichen von + nach – bzw. von – nach + wechselt. Der einzige von den abgebildeten Graphen mit dieser Eigenschaft ist f(x). Also gilt $f'(x) = g(x)$.

• Eine Funktion J mit $J'(x) = j(x)$ besitzt an der Stelle $x_1 = -2$ bzw. $x_2 = 0$ ein relatives Maximum bzw. Minimum, weil j dort eine Nullstelle besitzt und das Vorzeichen von + nach – bzw. von – nach + wechselt. Der einzige von den abgebildeten Graphen mit diesen Eigenschaften ist i(x). Also gilt $i'(x) = j(x)$.

130. **Schritt 1:** Berechnung der 1. Ableitung von $f_k(x)$

$$f_k'(x) = \cos x + k$$

Schritt 2: Berechnung der Nullstellen der 1. Ableitung

$$f_k'(x) = 0 \iff \cos x = -k$$

Diese Gleichung besitzt wegen $|\cos x| \le 1$ keine Lösung, wenn $|k| > 1$.

Daher besitzt f_k nach Satz 1 keine relativen Extrema, wenn $|k| > 1$.

131. **Schritt 1:** Berechnung der 1. Ableitung von w(x)

Nach der Kettenregel gilt: $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

Wegen $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ gilt: $w'(x) \begin{cases} > 0 & \iff & f'(x) > 0 \\ = 0 & \iff & f'(x) = 0 \\ < 0 & \iff & f'(x) < 0 \end{cases}$

Daher besitzt w'(x) die gleichen Nullstellen und das gleiche Vorzeichenverhalten an diesen Nullstellen wie die Funktion f(x) und damit nach Satz 1 und 2 über relative Extrema an den gleichen Stellen die gleiche Art von relativen Extrema wie die Funktion f(x).

132. a) **Schritt 1:** Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 1 - (x+1) \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = -\frac{2x+1}{e^{2x}}$$

$$f''(x) = -\frac{e^{2x} \cdot 2 - (2x+1) \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = -\frac{2 - (2x+1) \cdot 2}{e^{2x}} = \frac{4x}{e^{2x}}$$

Schritt 2: Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

$f''(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4x}{e^{2x}}=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$

f besitzt nach Satz 1 über die Wendestellen höchstens bei $x=0$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Da e^{2x} stets positiv ist, gilt:

$f''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4x}{e^{2x}} \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; 4x \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; x \gtrless 0$

Schritt 4: $f''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0=0$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f.

Wegen $f(0)=1$ lauten die Koordinaten des Wendepunkts $W(0\,|\,1)$.

b) **Schritt 1:** Nach Beseitigung der Klammer mittels Distributivgesetz,

$f_k(x)=4e^{-x}\cdot(k-e^{-x})=4ke^{-x}-4e^{-2x}$,

berechnen Sie die 2. Ableitung von $f_k(x)$ mithilfe der Kettenregel:

$f_k'(x)=4ke^{-x}\cdot(-1)-4e^{-2x}\cdot(-2)=-4ke^{-x}+8e^{-2x}$

$f_k''(x)=-4ke^{-x}\cdot(-1)+8e^{-2x}\cdot(-2)=4ke^{-x}-16e^{-2x}=4e^{-x}(k-4e^{-x})$

Schritt 2: $f_k''(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 4e^{-x}(k-4e^{-x})=0 \;\Leftrightarrow\; k-4e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow\; e^{-x}=\frac{k}{4} \;\Leftrightarrow\; x=-\ln\frac{k}{4}=\ln\frac{4}{k}$

f_k besitzt nach Satz 1 über die Wendestellen höchstens bei $x=\ln\frac{4}{k}$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Wegen $4e^{-x}>0$ gilt:

$f_k''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; k-4e^{-x} \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{k}{4} \gtrless e^{-x} \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{k}{4} \gtrless -x \;\Leftrightarrow\; x \gtrless \ln\frac{4}{k}$

Schritt 4: $f_k''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0=\ln\frac{4}{k}$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f_k.

$f_k(\ln\frac{4}{k})=4ke^{\ln\frac{k}{4}}-4e^{2\ln\frac{k}{4}}=\frac{4k\cdot k}{4}-4\left(\frac{k}{4}\right)^2=\frac{3k^2}{4} \;\Rightarrow\; W_k\left(\ln\frac{4}{k}\,\middle|\,\frac{3k^2}{4}\right)$

133. Sie müssen zunächst (in vier Schritten) die Koordinaten des Wendepunkts ermitteln; anschließend können Sie den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse mithilfe des Newton-Verfahrens bestimmen.

Schritt 1: $f'(x)=x\cdot e^{1-x}\cdot(-1)+e^{1-x}\cdot 1=e^{1-x}(1-x)$

$f''(x)=e^{1-x}\cdot(-1)+(1-x)\cdot e^{1-x}\cdot(-1)=e^{1-x}(x-2)$

Schritt 2: $f''(x)=0 \;\Leftrightarrow\; e^{1-x}(x-2)=0 \;\Leftrightarrow\; x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$

f besitzt höchstens bei $x=2$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Wegen $e^{1-x}>0$ gilt:

$f''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; x-2 \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; x \gtrless 2$

Schritt 4: f''(x) wechselt an der Stelle $x_0 = 2$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f.

Durch Einsetzen von $f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1}$ und $f'(2) = e^{1-2}(1-2) = -e^{-1}$ in die Formel des Newton-Verfahrens (vgl. S. 89), erhalten Sie die x-Koordinate x_T des gesuchten Schnittpunkts:

$$x_T = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2e^{-1}}{-e^{-1}} = 2 - (-2) = 4$$

Die Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt $(4\,|\,0)$.

134. Hier müssen Sie zeigen, dass die Steigungen der Scharkurven an den Wendestellen unabhängig vom Scharparameter k sind.

Schritt 1: $f_k'(x) = (x-k)\cdot e^{2-\frac{x}{k}}\cdot\left(-\frac{1}{k}\right) + e^{2-\frac{x}{k}}\cdot 1 = e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{x}{k}+2\right)$

$f_k''(x) = e^{2-\frac{x}{k}}\cdot\left(-\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{x}{k}+2\right)\cdot e^{2-\frac{x}{k}}\cdot\left(-\frac{1}{k}\right) = e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2}\right)$

Schritt 2: $f_k''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3k$

Schritt 3: Wegen $e^{2-\frac{x}{k}} > 0$ und $k \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$f_k''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{k}+\frac{x}{k^2} \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{k^2} \gtrless \frac{3}{k} \;\Leftrightarrow\; x \gtrless 3k$$

Schritt 4: $f_k''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0 = 3k$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f_k.

Wegen $f_k'(3k) = e^{2-\frac{3k}{k}}\left(-\frac{3k}{k}+2\right) = -e^{-1}$ haben alle Wendetangenten die gleiche Steigung und verlaufen daher parallel.

135. Der Graph der Funktion f besitzt dort Wendepunkte, wo sich sein Krümmungsverhalten ändert. Da dieses wegen $f''(x) = (f')'(x)$ durch das Steigungsverhalten von f' bestimmt wird, besitzt der Graph von f' also bei den Wendestellen von f relative Extrema. Der Skizze entnimmt man, dass f' bei

- $x_1 \approx -4{,}7$ vom Fallen ins Steigen,
- $x_2 \approx -1{,}3$ vom Steigen ins Fallen,
- $x_3 = 0$ vom Fallen ins Steigen

wechselt. Daher sind x_1, x_2, x_3 die Wendestellen von f.

136. Zunächst versuchen Sie im Ausschlussverfahren herauszufinden, welcher Graph f(x) ist.

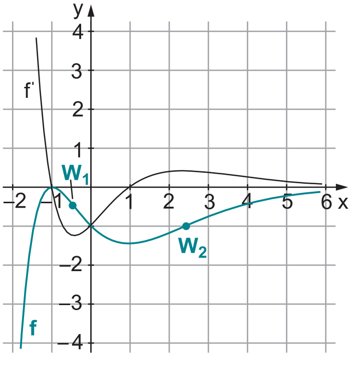
- Annahme $c(x) = f(x)$: Dann wäre entweder $a(x) = f'(x)$ oder $b(x) = f'(x)$. Beides ist nicht möglich, weil weder a(x) noch b(x) bei $x_0 = -0{,}4$ eine Nullstelle aufweisen, obwohl c dort ein relatives Minimum besitzt.
  Die Annahme $c(x) = f(x)$ ist daher falsch.

- Annahme $b(x) = f(x)$: Dann wäre entweder $a(x) = f'(x)$ oder $c(x) = f'(x)$.
  - $a(x) = f'(x)$ ist nicht möglich, da $a(x)$ an der Stelle $x_0 = -1{,}3$ keine Nullstelle besitzt, obwohl $b(x)$ dort ein relatives Maximum aufweist.
  - $c(x) = f'(x)$ ist nicht möglich, weil dann $a(x) = f''(x)$ wäre und $b(x)$ an der Stelle $x_0 = -0{,}4$ eine Wendestelle aufweist, obwohl $a(x)$ dort keine Nullstelle besitzt.

  Die Annahme $b(x) = f(x)$ ist daher falsch.

Es bleibt nur noch $f(x) = a(x)$. Da $a'(x) \neq c(x)$, weil $a(x)$ bei $x_0 = -1{,}3$ keine horizontale Tangente besitzt, obwohl $c(x)$ dort eine Nullstelle aufweist, gilt $a'(x) = b(x)$ und somit: $f(x) = a(x)$, $f'(x) = b(x)$, $f''(x) = c(x)$

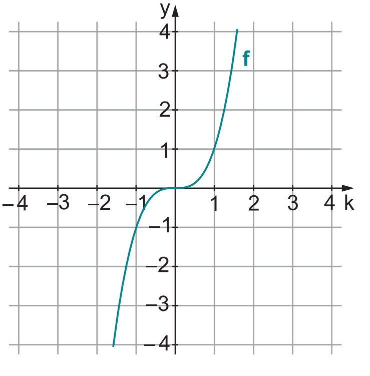
137. Folgende Überlegungen führen zum rechts gezeigten Graphen von f':



- Die Nullstellen von $f'(x)$ liegen dort, wo G_f horizontale Tangenten besitzt, also bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
- $G_{f'}$ verläuft dort unterhalb der x-Achse, wo G_f streng monoton fällt, und dort oberhalb der x-Achse, wo G_f streng monoton steigt.
- $G_{f'}$ weist dort ein relatives Minimum auf, wo G_f von einer Rechts- in eine Linkskrümmung übergeht.
- $G_{f'}$ weist dort ein relatives Maximum auf, wo G_f von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht.
- Gemäß Aufgabenstellung liegen alle Schnittpunkte von G_f und $G_{f'}$ auf den Koordinatenachsen, also bei $(-1\,|\,0)$ und $(0\,|\,-1)$.

138. Alle Aussagen sind falsch.

a) Die Funktion
$f(x) = x^3, \; x \in \mathbb{R}$
ist zweimal differenzierbar und weist bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle auf, besitzt aber kein relatives Extremum.




MEHR
ERFAHREN
ABITUR-TRAINING
Gymnasium
Analytische Geometrie
Bayern
STARK

Inhalt

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch bietet Ihnen eine umfassende Zusammenstellung der Grundkompetenzen, die zum Lösen geometrischer Fragestellungen in der Oberstufe erforderlich sind, und unterstützt Sie damit bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik.

Die einzelnen Kapitel sind so aufgebaut, dass die Lerninhalte jeweils eines Themenbereichs übersichtlich hergeleitet und dargestellt sowie mit **Beispielen** erläutert werden. Wichtige **Begriffe** und **Definitionen** sind dabei in farbig getönten Feldern, **Regeln** und **Merksätze** in farbig umrandeten Kästen hervorgehoben. Jeder Abschnitt schließt mit **Übungsaufgaben** zur Einübung des Gelernten sowie zur eigenen Erfolgskontrolle.

Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.

Zunächst werden in den ersten drei Kapiteln elementare Grundsteine gelegt, die zur Beschreibung und Untersuchung von **Geraden** und **Ebenen** benötigt werden. In weiteren Kapiteln werden vektorgeometrischen Hilfsmittel eingeführt, mit denen die **Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten** untersucht sowie **Abstands- und Winkelprobleme** behandelt werden können. Nach **Flächen- und Volumenberechnungen** werden schließlich noch **Kreise** und **Kugeln** angesprochen. Die bis dahin erworbenen Kenntnisse werden anschließend eingesetzt, um **Anwendungsaufgaben** zu lösen. Im letzten Kapitel finden Sie eine bunte Sammlung von Aufgaben, die Sie zur eigenen Erfolgskontrolle und Wiederholung nutzen können.

Prinzipiell kann **jedes Kapitel separat** bearbeitet werden, jedoch bauen die meisten davon auf vorhergehenden Einheiten auf, sodass sich auch die Bearbeitung des gesamten Buches anbietet. Es steht Ihnen frei, über die Geschwindigkeit und Schwerpunkte der Bearbeitung selbst zu entscheiden.

Die **Lösungswege für alle Aufgaben** sind im Lösungsteil ausführlich dargestellt, um eine gewissenhafte Kontrolle zu ermöglichen und somit den Lernerfolg zu unterstützen. Die mit einem Stern **(✱)** gekennzeichneten Aufgaben sind etwas anspruchsvoller und regen in besonderer Weise zum Nachdenken an; Sie können diese beim ersten Durcharbeiten auch überspringen.

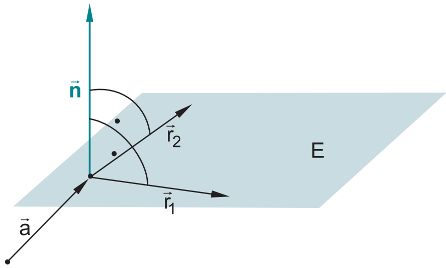
Viel Erfolg beim Abitur-Training Analytische Geometrie wünscht Ihnen

Eberhard Endres

Eberhard Endres

6.1 Der Normalenvektor

Betrachtet wird eine Ebene, die durch den Stützvektor $\vec{a}$ und die beiden (linear unabhängigen) Spannvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ bestimmt ist. In jedem Punkt dieser Ebene kann man einen Vektor ansetzen, der auf den beiden Spannvektoren (und somit auf der ganzen Ebene) senkrecht steht; man nennt einen solchen Vektor **Normalenvektor $\vec{n}$** der Ebene. Je zwei dieser Vektoren sind linear abhängig – d. h. ein Vielfaches voneinander –, da die Richtung einer Geraden im Raum, die zu einer Ebene orthogonal ist, eindeutig festgelegt ist.



Für spätere Berechnungen ist es wichtig, einen gewissermaßen normierten Normalenvektor zu finden, d. h. einen Normalenvektor mit Länge 1. Hat man einen beliebigen Normalenvektor $\vec{n}$ gefunden, so erhält man den zugehörigen **Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$**, indem man ihn durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \text{ mit } |\vec{n}_0| = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|} = 1$$

Definition

- Eine zu einer Ebene orthogonale Gerade heißt **Normale**.
- Ein Richtungsvektor dieser Geraden wird **Normalenvektor** der Ebene genannt.
- Ein Normalenvektor einer Ebene steht orthogonal auf den Spannvektoren der Ebene.
- Ein Normalenvektor der Länge 1 wird als **Normaleneinheitsvektor** bezeichnet.

Beispiel

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene. Geben Sie auch den zugehörigen Normaleneinheitsvektor an.

Lösung:

Gesucht ist ein Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der orthogonal auf beiden Spannvektoren der Ebene steht.

Für diesen Normalenvektor $\vec{n}$ muss also gelten:

$$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \text{ und}$$

$$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2n_1 + n_2 + 6n_3 = 0$$

Dies führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \\ \text{II} & -2n_1 + n_2 + 6n_3 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lrl} \text{I} & n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \\ \text{III} = 2 \cdot \text{I} + \text{II} & -3n_2 + 12n_3 = 0 \end{array}$$

In Gleichung III lässt sich z. B. n_3 beliebig wählen und daraus dann n_2 bestimmen. Wählt man $n_3 = 1$, ergibt sich:

$$-3n_2 + 12 \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3n_2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad n_2 = 4$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, dann folgt:

$$n_1 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = 5$$

Ein möglicher Normalenvektor lautet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für die Berechnung des zugehörigen Normaleneinheitsvektors $\vec{n}_0$ benötigt man den Betrag von $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{42} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\sqrt{42}} = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

63. Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene, die durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

64. Bestimmen Sie einen Normaleneinheitsvektor zu der Ebene E durch die Punkte $A(3\,|\,1\,|\,0)$, $B(4\,|\,-2\,|\,-3)$ und $C(1\,|\,2\,|\,1)$.

65. Begründen Sie, dass alle Normalenvektoren einer Ebene linear abhängig sind.

66. Eine Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt $P(5\,|\,1\,|\,2)$. Geben Sie eine Gleichung der Ebene in Parameterform an.

6.2 Vektorprodukt

In diesem Kapitel wird nun die Bestimmung eines Normalenvektors zu zwei Vektoren allgemein durchgeführt. Ziel ist die Aufstellung einer Formel, die zu zwei Vektoren stets einen Normalenvektor liefert, damit man das jeweilige Lösen des zugrunde liegenden Gleichungssystems einsparen kann.

Betrachtet werden die zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, also ein Vektor, der orthogonal auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Dafür muss gelten:

$$\vec{a} \circ \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0 \text{ und}$$

$$\vec{b} \circ \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0$$

Das dazugehörige lineare Gleichungssystem wird gelöst:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0 \\ \text{II} & b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{llll} \text{I} & a_1 n_1 + & a_2 n_2 + & a_3 n_3 = 0 \\ \text{III} = b_1 \cdot \text{I} - a_1 \cdot \text{II} & & (a_2 b_1 - a_1 b_2) n_2 + & (a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = 0 \end{array}$$

Gleichung III lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned} & (a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = -(a_2 b_1 - a_1 b_2) n_2 \\ \Leftrightarrow \quad & (a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = (-a_2 b_1 + a_1 b_2) n_2 \\ \Leftrightarrow \quad & (a_3 b_1 - a_1 b_3) n_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) n_2 \end{aligned}$$

Da drei Unbekannte zu bestimmen sind, aber nur zwei Gleichungen vorliegen, ist eine Unbekannte, z. B. n_3, frei wählbar. Um ein möglichst einfaches Ergebnis zu erreichen, setzt man n_3 so, dass sich die Klammern in der umgeformten Gleichung III kreuzweise wegkürzen; mit $n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$ erhält man:

$$(a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) n_2 \quad \Rightarrow \quad n_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

Setzt man diese Werte von n_3 und n_2 noch in Gleichung I ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & a_1 n_1 + a_2 \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_1 n_1 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_1 n_1 = a_2 a_1 b_3 - a_3 a_1 b_2 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned}$$

Ein Normalenvektor zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

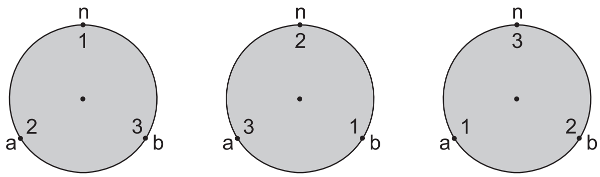
Beispiel

Geben Sie einen Normalenvektor zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ an.

Lösung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2) \\ -3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 6 \\ -12 - 10 \\ -4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -22 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Die Formel zur Bestimmung des Normalenvektors kann man sich mit folgendem Schema recht einfach merken:



Man notiert die Vektornamen n-a-b außerhalb einer drehbar gedachten Kreisscheibe und deren Indizes 1-2-3 auf der Kreisscheibe jeweils entgegen dem Uhrzeigersinn.

Um z. B. n_2 zu bestimmen, dreht man die 2 unter n (zweite Darstellung) und liest a_3 und b_1 ab. Das Produkt dieser beiden Variablen stellt den ersten Teil der Differenz dar. Den zweiten Teil erhält man durch Vertauschen der Indizes. Somit kann man n_2 bilden: $n_2 = a_3b_1 - a_1b_3$

Dieses Verfahren wird auch zyklische Vertauschung der Indizes genannt. Der dabei gebildete Vektor $\vec{n}$ heißt Kreuz- oder Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Definition

Das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht orthogonal auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Beachten Sie, dass beim Vektorprodukt im Gegensatz zum Skalarprodukt ein Vektor – und keine Zahl – entsteht.

Aufgaben

67. Bestimmen Sie das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

68. Bestimmen Sie einen Vektor, der orthogonal auf den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ steht.

69. Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene

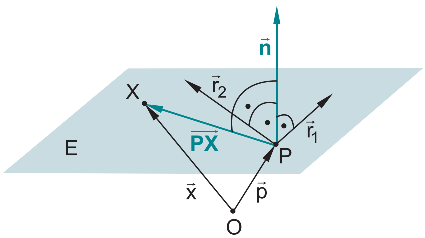
$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

6.3 Normalenform der Ebene

Nachdem im letzten Abschnitt ein einfaches Verfahren zur Bestimmung eines Normalenvektors erarbeitet wurde, lernen Sie nun, wie man eine Ebene nur mithilfe des Normalenvektors und eines Punktes beschreiben kann. Diese Darstellung von Ebenen ist bei vielen Fragestellungen vorteilhaft.

Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene wurde so definiert, dass er auf beiden Spannvektoren, also auf der ganzen Ebene, senkrecht steht.

Ist nun ein Punkt P der Ebene bekannt, so liegt für jeden anderen Punkt X der Ebene der Vektor $\overrightarrow{PX}$ ebenfalls in der Ebene. Somit steht $\vec{n}$ orthogonal auf $\overrightarrow{PX}$, das Skalarprodukt zwischen diesen Vektoren ist daher null:



$$\overrightarrow{PX} \circ \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$$

Da diese Eigenschaft genau für alle Punkte X in der Ebene gilt, stellt diese Gleichung auch eine Möglichkeit dar, die Ebene eindeutig zu definieren. Eine Ebene ist somit bereits durch die Angabe eines Normalenvektors $\vec{n}$ und eines Punktes P der Ebene eindeutig bestimmt.

Regel

Normalenform der Ebene
Eine Ebene, die den Punkt P enthält und den Normalenvektor $\vec{n}$ besitzt, erfüllt die Gleichung E: $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$.

Beispiele

1. Wandeln Sie die Ebene mit der Parametergleichung

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in die Normalenform um.

Lösung:
Zunächst wird ein Normalenvektor der Ebene bestimmt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-1 \\ -2+3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mit dem Punkt $P(-3\,|\,-1\,|\,-1)$ der Ebene erhält man als Ebenengleichung:

$$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

2. Wandeln Sie die Ebene mit der Normalenform $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ in die Parameterform um.

   Lösung:
   Für die Parameterform werden zwei zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ orthogonale Spannvektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ von E gesucht.
   Für diese muss also gelten:

   $$\vec{n} \circ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2r_1 - r_2 - 2r_3 = 0$$

   Wählt man r_1 und r_3 beliebig, z. B. $r_1 = 1$ und $r_3 = 0$, erhält man aus dieser Gleichung:

   $$2r_1 - r_2 - 2r_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_2 = 2r_1 - 2r_3 = 2$$

   Ein möglicher Spannvektor lautet daher $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Entsprechend erhält man einen möglichen zweiten Spannvektor aus:

   $$\vec{n} \circ \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2s_1 - s_2 - 2s_3 = 0,$$

   indem man z. B. $s_1 = 0$ und $s_3 = 1$ setzt. Hiermit ergibt sich dann:

   $$s_2 = 2s_1 - 2s_3 = -2 \quad \text{und} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Der Punkt $P(3\,|\,1\,|\,4)$ liegt in der Ebene, daher eignet sich sein Ortsvektor als Stützvektor und man erhält die Ebenengleichung in Parameterform:

   $$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

70. Wandeln Sie die Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ in Normalenform um.

71. Geben Sie die Ebene $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ in Parameterform an.

72. Prüfen Sie, welche der Punkte A(2|–4|1), B(3|1|2), C(0|1|2), D(–2|–2|5) auf der Ebene E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ liegen.

73. Bestimmen Sie die Ebene durch die Punkte A(2|–4|1), B(3|1|2) und C(0|1|2) in Parameter- und in Normalenform.

6.4 Koordinatenform der Ebene

Die Normalenform der Ebene enthält ein Skalarprodukt, das weiter umgeformt werden kann:

$$
\begin{aligned}
\text{E: } (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{E: } \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x_1 - p_1) \cdot n_1 + (x_2 - p_2) \cdot n_2 + (x_3 - p_3) \cdot n_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 + p_3 \cdot n_3
\end{aligned}
$$

Da für eine Ebene in Normalenform der Punkt P und der Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben sind, sind die Koordinaten der Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{n}$ bekannt und damit ist der rechte Teil der Gleichung $p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 + p_3 \cdot n_3$ eine Konstante.
Somit hat man durch dieses Ausmultiplizieren des Skalarprodukts eine weitere Darstellungsmöglichkeit einer Ebene gewonnen. Diese Darstellungsform nennt man Koordinatenform.

Regel

Koordinatenform einer Ebene
Eine Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$, die den Punkt P enthält, kann auch durch die **Koordinatenform** beschrieben werden:
E: $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = c$, wobei $c = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 + p_3 \cdot n_3$ ist.

Ist eine Ebene in Koordinatenform gegeben, so kann man einen Normalenvektor dieser Ebene direkt an den Koeffizienten der x_i ablesen.

Beispiel

Geben Sie einen Normalenvektor der Ebene E durch die Punkte A(3|2|–4), B(1|–2|–1) und C(2|1|–2) an und bestimmen Sie ihre Koordinatenform.

Lösung:
Variante 1: Als Spannvektoren der Ebene kann man $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ verwenden. Hieraus lässt sich über das Vektorprodukt ein Normalenvektor bestimmen:

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-8+3\\-3+4\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-2\end{pmatrix}$

Die Gleichung der Ebene E in Koordinatenform lautet dann
E: $-5x_1+x_2-2x_3=c$,
wobei sich c mithilfe der Koordinaten des Punktes A bestimmen lässt:
$c=3\cdot(-5)+2\cdot 1-4\cdot(-2)=-5$
Die Ebenengleichung lautet also:
E: $-5x_1+x_2-2x_3=-5$

Variante 2: Wenn eine Ebene durch drei Punkte gegeben ist, dann lässt sich die Koordinatenform der Ebene entweder – wie in Variante 1 angegeben – über die Bestimmung eines Normalenvektors oder alternativ auch über drei „Punktproben" finden. Dabei werden die Koordinaten der gegebenen Punkte in die allgemeine Koordinatenform eingesetzt und man erhält ein lineares Gleichungssystem.

Die allgemeine Ebenengleichung in Koordinatenform lautet:
E: $n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+n_3\cdot x_3=c$

Punktprobe mit A: $n_1\cdot 3+n_2\cdot 2+n_3\cdot(-4)=c$
Punktprobe mit B: $n_1\cdot 1+n_2\cdot(-2)+n_3\cdot(-1)=c$
Punktprobe mit C: $n_1\cdot 2+n_2\cdot 1+n_3\cdot(-2)=c$

Die Werte von n_1, n_2 und n_3 und c bestimmt man durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 3n_1+2n_2-4n_3=c & & \text{I} & 3n_1+2n_2-4n_3=c \\ \text{II} & n_1-2n_2-n_3=c & \Leftrightarrow & \text{IV}=\text{I}-3\cdot\text{II} & 8n_2-n_3=-2c \\ \text{III} & 2n_1+n_2-2n_3=c & & \text{V}=2\cdot\text{II}-\text{III} & -5n_2=c \end{array}$$

Da das Gleichungssystem insgesamt vier Unbekannte, aber nur drei Gleichungen besitzt, kann man eine Variable frei wählen. Setzt man z. B. $c=5$ fest, dann lässt sich n_2 anhand Gleichung V bestimmen:
$-5n_2=5 \;\Leftrightarrow\; n_2=-1$
Eingesetzt in Gleichung IV ergibt sich:
$8\cdot(-1)-n_3=-2\cdot 5 \;\Leftrightarrow\; -n_3=-2 \;\Leftrightarrow\; n_3=2$
Aus Gleichung I folgt schließlich:
$3n_1+2\cdot(-1)-4\cdot 2=5 \;\Leftrightarrow\; 3n_1=15 \;\Leftrightarrow\; n_1=5$

Ein Normalenvektor der Ebene E lautet somit $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$, und die Koordinatengleichung der Ebene E ergibt sich zu:
$5x_1-x_2+2x_3=5$

Wegen der freien Wählbarkeit eines der drei Parameter besitzt das Gleichungssystem nicht nur die triviale Lösung; die geprüften Vektoren sind linear abhängig.

Dieselbe Prüfung wird für die Spannvektoren $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ durchgeführt:

$$r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{I} & -r+2s-2t & = & 0\\ \text{II} & s+2t & = & 0\\ \text{III} & r-4s+t & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{I} & -r+2s-2t & = & 0\\ \text{II} & s+2t & = & 0\\ \text{IV}=\text{I}+\text{III} & -2s-t & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{I} & -r+2s-2t & = & 0\\ \text{II} & s+2t & = & 0\\ \text{V}=2\cdot\text{II}+\text{IV} & 3t & = & 0 \end{array}$$

Hier besitzt das Gleichungssystem nur die triviale Lösung ($t=s=r=0$); die geprüften Vektoren sind linear unabhängig.

Der Spannvektor $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ der Ebene E_1 „ragt“ also aus der Ebene E_2 heraus, und die beiden Ebenen sind somit **nicht identisch**.

63. Aus den Bedingungen $\vec{a}\circ\vec{n}=0$ und $\vec{b}\circ\vec{n}=0$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \text{ und } \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$$

Dies führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & n_1 + 5n_3 & = & 0\\ \text{II} & -n_1+3n_2+n_3 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{I} & n_1 + 5n_3 & = & 0\\ \text{III}=\text{II}+\text{I} & 3n_2+6n_3 & = & 0 \end{array}$$

Die Koordinate n_3 ist beliebig wählbar, z. B. $n_3=1$.

Aus Gleichung III erhält man damit

$3n_2+6\cdot 1=0 \Leftrightarrow 3n_2=-6 \Leftrightarrow n_2=-2$

und aus Gleichung I folgt:

$n_1+5\cdot 1=0 \Leftrightarrow n_1=-5$

Ein Normalenvektor der Ebene lautet also $\boldsymbol{\vec{n}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}}$.

64. Die Ebene E besitzt die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

Somit ergibt sich aus den Bedingungen $\overrightarrow{AB}\circ\vec{n}=0$ und $\overrightarrow{AC}\circ\vec{n}=0$ das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & n_1-3n_2-3n_3 & = & 0\\ \text{II} & -2n_1+n_2+n_3 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{I} & n_1-3n_2-3n_3 & = & 0\\ \text{III}=2\cdot\text{I}+\text{II} & -5n_2-5n_3 & = & 0 \end{array}$$

Wählt man $n_3 = 1$, folgt aus Gleichung III: $-5n_2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_2 = -1$
Eingesetzt in die erste Zeile erhält man: $n_1 + 3 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = 0$

Ein Normalenvektor der Ebene lautet somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und seine Länge beträgt:

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Ein Normaleneinheitsvektor der Ebene ist damit $\mathbf{\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

65. Ein Normalenvektor einer Ebene muss orthogonal zu den beiden Spannvektoren der Ebene stehen. Dadurch ist seine Richtung vorgegeben und er ist bis auf Länge und Orientierung eindeutig bestimmt. Somit sind alle Normalenvektoren einer Ebene zueinander parallel, also linear abhängig.

66. Man bestimmt zunächst zwei Spannvektoren der Ebene; diese müssen orthogonal zu $\vec{n}$ stehen und linear unabhängig sein. Die erste Bedingung lautet:

$$\vec{v} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 + 3v_2 - 2v_3 = 0$$

Um zwei linear unabhängige Vektoren zu erhalten, wählt man je zwei Koordinaten so, dass sie keine Vielfachen voneinander sind.
Mit $v_2 = 1$ und $v_3 = 1$ ergibt sich z. B. $v_1 = -3v_2 + 2v_3 = -1$, also: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $v_2 = 1$ und $v_3 = 0$ ergibt sich $v_1 = -3v_2 = -3$ und somit: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zusammen mit dem Ortsvektor von P als Stützvektor der Ebene erhält man als Gleichung für die Ebene:

$$\mathbf{E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

67. a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

68. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}$

69. Ein Normalenvektor der Ebene E muss senkrecht auf beiden Spannvektoren stehen:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-2) \\ -2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$

Jeder Normalenvektor der Ebene ist also ein Vielfaches von $\mathbf{\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}}$.

70. Zunächst wird ein Normalenvektor der Ebene bestimmt:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$

Mit dem Stützpunkt $P(1\,|\,2\,|\,-5)$ erhält man als Normalenform der Ebene:

$\mathbf{E\!: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = 0}$

71. Als Stützpunkt der Ebene kann man $P(1\,|\,4\,|\,7)$ verwenden. Die Spannvektoren der Ebene müssen orthogonal zu $\vec{n}$ stehen, also $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ erfüllen:

$\vec{n} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3v_1 + v_2 - 4v_3 = 0$

Zwei geeignete Vektoren sind z. B. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit lautet eine mögliche Parameterform der Ebene:

$\mathbf{E\!: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}$

72. Alle Punkte, die in der Ebene liegen, müssen ihre Gleichung erfüllen.

Punktprobe mit A:

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 - 12 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$

A liegt in der Ebene E.

Punktprobe mit B:

$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25 - 2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 19 = 0$

B liegt **nicht** in der Ebene E.

Punktprobe mit C:

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 10-2-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4=0$$

C liegt **nicht** in der Ebene E.

Punktprobe mit D:

$$\left(\begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad -8+8=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0=0$$

D liegt in der Ebene E.

73. Für die Parameterform von E wählt man z. B. A als Stützpunkt und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren:

$$\mathbf{E:}\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor von E ergibt sich durch:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\15\end{pmatrix}$$

Damit erhält man als Normalenform der Ebene:

$$\mathbf{E:}\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}0\\-3\\15\end{pmatrix}=0$$

74. a) Bestimmung eines Normalenvektors von E:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Verwendet man $\frac{1}{3}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene (um mit kleineren Zahlen rechnen zu können), lautet die Koordinatenform der Ebene:

E: $3x_1+2x_2-x_3=c$

Um c zu bestimmen, setzt man den Stützpunkt $(-5\,|\,-2\,|\,-1)$ der Ebene in diese Gleichung ein:

$$3\cdot(-5)+2\cdot(-2)-(-1)=c \quad\Leftrightarrow\quad c=-15-4+1=-18$$

Die Koordinatenform der Ebene lautet also:

E: $3x_1+2x_2-x_3=-18$

b) Man multipliziert das Skalarprodukt in der Normalenform aus:

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1+1)\cdot5+(x_2+2)\cdot(-2)+(x_3-4)\cdot4=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$5x_1+5-2x_2-4+4x_3-16=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5x_1-2x_2+4x_3=15$$

Die Koordinatenform der Ebene lautet **E: $5x_1-2x_2+4x_3=15$**.

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Stochastik

Bayern

STARK

Inhalt

Autoren:
Franz Wieand, Ingeborg Goller

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband für die **Stochastik** halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik umfassend unterstützt.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie noch Probleme haben. Folgende strukturelle Maßnahmen erleichtern dabei Ihre Arbeit:

- Die wichtigen **Definitionen** eines Lernabschnitts werden schülergerecht und doch mathematisch präzise formuliert in blauen Feldern hervorgehoben. Die unterrichtsrelevanten **Regeln** werden in blau umrandeten Kästen verständlich zusammengefasst.
- An jeden Theorieteil schließen passgenaue **Beispiele** an, die die einzelnen Rechen- und Denkschritte genau und gut nachvollziehbar erläutern.
- Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.

- Jeder Lernabschnitt schließt mit zahlreichen **Übungsaufgaben**, mit deren Hilfe Sie die verschiedenen Themen einüben können. Hier können Sie überprüfen, ob Sie den gelernten Stoff auch anwenden können.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit ausführlichen Hinweisen, die Ihnen den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die gesamte Abiturprüfung und alles erdenklich Gute für Ihren weiteren Lebensweg.

Franz Wieand Ingeborg Goller

4 Definition der Wahrscheinlichkeit

Die Frage, wie man Wahrscheinlichkeiten finden oder definieren kann, hat viele Mathematiker lange beschäftigt. 1919 versuchte der österreichische Mathematiker Richard von Mises den Begriff „Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A" mithilfe der relativen Häufigkeit zu definieren:

$$\mathbf{P(A) = \lim_{n \to \infty} h_n(A)}$$

Wahrscheinlich heißt auf Englisch *probably*. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird deshalb mit P(A) abgekürzt.

Obige Definition scheint zwar logisch, bringt aber theoretische und praktische Schwierigkeiten mit sich. Wann liegt h_n innerhalb eines kleinen Intervalls? Wer kann unendlich viele Zufallsexperimente durchführen? Die Zahl n der Versuche soll nicht allzu groß sein (sonst ist das Experiment zu aufwendig und zu teuer), n darf aber auch nicht zu klein sein (sonst ist das Ergebnis zu ungenau). Größere Abweichungen können immer wieder auftreten, werden aber immer „unwahrscheinlicher".
1933 verzichtete der russische Mathematiker Andrei Kolmogorow (1903–1987) auf eine zahlenmäßige Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses. Er stellte lediglich drei Forderungen **(Axiome)** auf, aus denen dann weitere Eigenschaften gefolgert werden können.

Richard von Mises

Andrei Kolmogorow

Definition

Eine Funktion P, die jedem Ereignis $A \subset \Omega$ eine reelle Zahl P(A) zuordnet, ist eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn gilt:

Axiom 1: Die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ ist nie negativ:
$P(A) \geq 0$

Axiom 2: Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1:
$P(\Omega) = 1$

Axiom 3: Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei unvereinbaren Ereignissen ($A \cap B = \{\ \}$) entweder das eine oder das andere eintritt, ist gleich der Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Wie die Zuordnung P(A) aussieht, wird dadurch jedoch nicht beantwortet. Aus den Axiomen lassen sich aber einige Folgerungen beweisen. Diese Folgerungen stehen im Einklang mit den Eigenschaften der relativen Häufigkeit. Kennt man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments, so kann man die Wahrscheinlichkeit aller Ereignisse von Ω berechnen.

Regel

Folgerung 1: $0 \leq P(\omega) \leq 1$

Folgerung 2: $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

Folgerung 3: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$

Folgerung 4: $P(\{\ \}) = 0$

Folgerung 5: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Folgerung 6: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beispiele

1. Eine Pyramide hat vier verschiedenfarbige Seitenflächen. Eine ist rot, eine blau, eine grün und eine gelb. Beim Würfeln bleibt in 28 % aller Fälle die grüne Seite auf dem Tisch liegen. Die blaue Seite liegt viermal und die gelbe Seite dreimal so oft auf dem Tisch wie die rote.
   a) Stellen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
      A: „Die gewürfelte Seite ist blau oder grün.“
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
      B: „Es wird nicht rot gewürfelt.“

Lösung:

a) Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für die rote Seite mit x, so sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung wie folgt aus:

ω	rot	blau	grün	gelb
$P(\omega)$	x	4x	0,28	3x

Mithilfe von Folgerung 2 erhält man:

$$\begin{aligned} x+4x+0,28+3x &= 1 \\ 8x+0,28 &= 1 \\ 8x &= 0,72 \\ x &= 0,09 \end{aligned}$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist 1. Die daraus entstehende Gleichung wird nach x aufgelöst.

Also gilt:

ω	rot	blau	grün	gelb
$P(\omega)$	0,09	0,36	0,28	0,27

b) $P(A) = P(\{\text{blau; grün}\}) = 0,36 + 0,28 = 0,64$ Folgerung 3

c) $P(B) = P(\text{nicht rot}) = 1 - P(\text{rot}) = 1 - 0,09 = 0,91$ Folgerung 5

2. Von den Schülern des Viscardi-Gymnasiums gehen 30 % in einen Sportverein; 80 % besitzen ein Handy. 20 % besitzen ein Handy und gehen in einen Sportverein.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler im Sportverein ist oder ein Handy besitzt.

Lösung:
Mit S: „Schüler geht in den Sportverein“ und H: „Schüler besitzt ein Handy“ ist gegeben:
$P(S) = 0,30$; $P(H) = 0,80$; $P(S \cap H) = 0,20$

Mit Folgerung 6 folgt:

$P(S \cup H) = P(S) + P(H) - P(S \cap H) = 0,30 + 0,80 - 0,20 = 0,90$

90 % der Schüler sind im Sportverein oder besitzen ein Handy.

3. Katja hat einen sechsseitigen Würfel durch Beschweren verschiedener Seiten so gezinkt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten jeder Augenzahl proportional zu dieser ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 3.

b) Ina und Felix würfeln einmal mit Katjas Würfel. Ina wettet darauf, dass die Augenzahl gerade oder nicht prim ist. Felix wettet dagegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Ina gewinnt.

c) Entscheiden Sie, wie sich die Wetteinsätze von Ina und Felix verhalten müssen, damit die Wette fair ist.

Lösung:

a) Aufgrund der Proportionalität folgt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	x	2x	3x	4x	5x	6x

$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$ Folgerung 2

$$x = \frac{1}{21}$$

Für P(3) gilt somit:

$P(3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

b) Die vier Zahlen 1, 2, 4 und 6 sind gerade oder nicht prim.

$P(\text{Ina gewinnt}) = P(\{1; 2; 4; 6\}) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{13}{21}$

c) Da Ina in 13 von 21 Fällen gewinnt und Felix in den restlichen 8 Fällen, müssen sich die Wetteinsätze wie 13 : 8 verhalten.

Bemerkung: Die Vorgehensweise, relative Häufigkeiten in **Mengendiagrammen** oder **Vierfeldertafeln** zu veranschaulichen, lässt sich 1 : 1 auf **Wahrscheinlichkeiten** übertragen.

Aufgaben

28. Bei einem sechsseitigen Spielwürfel wird die Augenzahl 5 zur Augenzahl 6 und die Augenzahl 4 zur 2 abgeändert, ansonsten bleibt der Würfel unverändert.

a) Stellen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf:

Augenzahl	1	2	3	6
Wahrscheinlichkeit				

b) Bestimmen Sie jeweils die zugehörige Wahrscheinlichkeit.
A: „Die Augenzahl ist kleiner als 3."
B: „Die Augenzahl ist prim."
C: „Die Augenzahl ist nicht 3."
D: „Die Augenzahl ist Teiler von 6."
E: „Die Augenzahl ist prim oder gerade."

29. Eine Umfrage unter allen Reisenden eines IC-Zuges ergab: Jeder 3. Reisende ist kein Urlauber. Jeder 5. Urlauber ist allein unterwegs. 10 % der Reisenden sind weder Urlauber noch Alleinreisende. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällig ausgewählte Person allein unterwegs ist.

b) Es gibt 8 Schüler, die keine der drei Sportarten betreiben.

c) Genau zwei Sportarten betreiben $6+2+1=9$ Schüler.

$h_{50}(A)=\frac{9}{50}=18\ \%$

Höchstens zwei Sportarten betreiben $50-4=46$ Schüler.

$h_{50}(B)=\frac{46}{50}=92\ \%$

d) $\overline{A\cup B}=\underbrace{\overline{A}}_{\text{0 oder 1 oder 3 Sportarten}}\cap\overline{B}\rightarrow$ **3 Sportarten**

Es handelt sich um das Ereignis „Schüler mit allen drei Sportarten".

$h_{50}(\text{alle drei Sportarten})=\frac{4}{50}=8\ \%$

28. a) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Augenzahl	1	2	3	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

b) **Ereignis A**

$A=\{1;2\}$

$P(A)=P(\{1;2\})=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Ereignis B

$B=\{2;3\}$

$P(B)=P(\{2;3\})=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Ereignis C

$C=\{1;2;6\}$

$P(C)=P(\{1;2;6\})=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

Ereignis D

$D=\{1;2;3;6\}$

$P(D)=P(\{1;2;3;6\})=1$ sicheres Ereignis

Ereignis E

$E=\{2;3;6\}$

$P(E)=P(\{2;3;6\})=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

29. Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:
U – Urlauber
A – Alleinreisender

Da im Zug $\frac{2}{3}$ aller Reisenden Urlauber sind und von diesen jeder 5. alleine reist, gilt:

$P(U \cap A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15} = \frac{4}{30}$

Gegeben ist zudem:

$P(\overline{U} \cap \overline{A}) = 10\ \% = \frac{1}{10}$

Hieraus lässt sich eine Vierfeldertafel erstellen:

	A	$\overline{A}$	
U	$\mathbf{\frac{4}{30}}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{20}{30}$
$\overline{U}$	$\frac{7}{30}$	$\mathbf{\frac{3}{30}}$	$\mathbf{\frac{10}{30}}$
	$\frac{11}{30}$	$\frac{19}{30}$	$\mathbf{1}$

Die farbig gedruckten Zahlen sind gegeben.

Somit: $P(A) = \frac{11}{30} \approx 36,7\ \%$

Eine zufällig ausgewählte Person ist also mit der Wahrscheinlichkeit 36,7 % allein unterwegs.

30. Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:
G – gegen Grippe geimpft
K – an Grippe erkrankt

Gegeben:

$P(K) = 0,25$

$P(\overline{G}) = 0,54$

$P(G \cap K) = 0,08$

Hieraus lässt sich eine Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten erstellen:

	G	$\overline{G}$	
K	**0,08**	0,17	**0,25**
$\overline{K}$	0,38	0,37	0,75
	0,46	**0,54**	**1**

Die farbig gedruckten Zahlen sind gegeben.

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind nun direkt ablesbar.

a) $P(\overline{K} \cap G) = 0,38$