
MEHR
ERFAHREN
ABITUR-TRAINING
FOS • BOS Technik
Analysis und
Analytische Geometrie 2
STARK

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

FOS · BOS Technik

Analysis und Analytische Geometrie 1

STARK

Inhalt

Autor: Reinhard Schuberth

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Trainingsband ist für die 11. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS) in der Ausbildungsrichtung Technik konzipiert. Auch Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) können damit lernen. Für die Vorklassen und zum Wiederholen von Grundkenntnissen steht Ihnen der Trainingsband „Grundwissen Algebra“ (Stark Verlag, Best.-Nr. 92416) zur Verfügung.

Die modulare Struktur der Kapitel erlaubt es Ihnen, an vielen Stellen mit dem Lesen zu beginnen, ohne den Kontext zu verlieren. Daher können Sie sich sofort mit genau den Themenbereichen beschäftigen, die Ihnen noch Probleme bereiten. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den grün umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen, Regeln und Merksätze,** die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet und beinhalten auch anwendungsorientierte Aufgaben.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, kleinschrittige **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Bleibt mir nur noch, Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband und in der Schule zu wünschen!

Ihr

Reinhard Schuberth

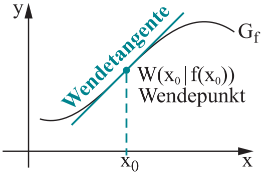
6.4 Wendepunkte und Wendetangenten, Sattelpunkte

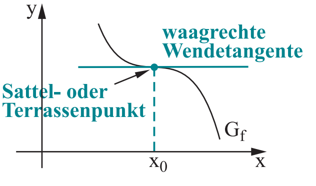
Neben den Extrem- sind die Wendepunkte markante Punkte bei Funktionsgraphen.

Definition

Wendepunkt, Wendetangente, Sattel- oder Terrassenpunkt

- Der Graph einer Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ einen **Wendepunkt**, wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist und der Graph dort einen Krümmungswechsel aufweist, d. h., wenn der Graph an der Stelle x_0 von Links- in Rechtskrümmung übergeht oder umgekehrt. Die Stelle x_0 heißt dann **Wendestelle** und der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(x_0 \,|\, f(x_0))$.
- Die im Wendepunkt errichtete Tangente heißt **Wendetangente**. Wegen des Krümmungswechsels wird die Wendetangente vom Graphen im Wendepunkt durchsetzt.
- Besitzt ein Wendepunkt eine waagrechte Tangente, so wird er auch **Sattel-** oder **Terrassenpunkt** genannt.





Wenn das Krümmungsverhalten eines Graphen ermittelt wurde, so können daraus die Wendepunkte bestimmt werden. Sie lassen sich aber auch ohne vorausgehende Bestimmung des Krümmungsverhaltens ermitteln, indem man die Monotonieänderungen von f' betrachtet. Da eine Monotonieänderung das Vorliegen eines Extremwertes nach sich zieht, hat der Graph von f dort einen Wendepunkt, wo der Graph der Ableitungsfunktion f' einen Extrempunkt besitzt. Demnach lässt sich das Bestimmen von Wendepunkten einer Funktion f auf das Ermitteln der lokalen Extrempunkte der zugehörigen Ableitungsfunktion f' zurückführen.

Regel

Kriterium für das Vorliegen eines Wende- oder Sattelpunktes

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x_0 einen

- **Wendepunkt**, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.
- **Sattel-** oder **Terrassenpunkt**, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Damit der Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt besitzt, muss f'' an der Stelle x_0 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzen. Dies stellt im oben genannten Kriterium die Forderung $f'''(x_0) \neq 0$ sicher, weil damit eine Steigung von f'' an der Nullstelle x_0 vorhanden ist, sodass die x-Achse auch tatsächlich überquert wird.

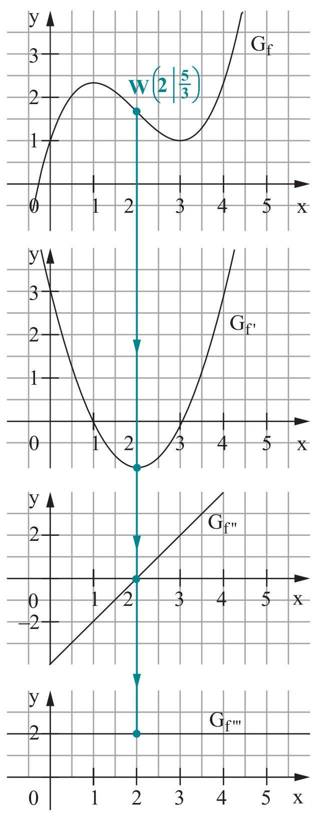
Beispiele

1. Was lässt sich über die Wendepunkte einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades (Parabelfunktion) aussagen?

   Lösung:
   Die Parabelfunktionen $p(x)=ax^2+bx+c$, mit $a\neq 0$, haben wegen $p''(x)=2a\neq 0$ keine Wendepunkte.

2. Untersuchen Sie die ganzrationale Funktion dritten Grades
   $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$
   auf Wendepunkte und geben Sie die Wendetangenten an.

   Lösung:
   $f'(x)=x^2-4x+3$
   $f''(x)=2x-4$
   $f'''(x)=2$
   Die Nullstellen von f'' werden berechnet:
   $f''(x)=0$
   $2x-4=0$, also $x_1=2$
   Die Nullstelle von f'' wird in f''' eingesetzt:
   $f'''(2)=2\neq 0$
   $\Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle 2
   Die y-Koordinate des Wendepunktes ergibt sich wie üblich durch Einsetzen des berechneten x-Wertes, der Wendestelle 2, in die Ausgangsfunktion:
   $f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2+1=\frac{5}{3}$
   $\Rightarrow$ $\mathbf{W\left(2\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)}$



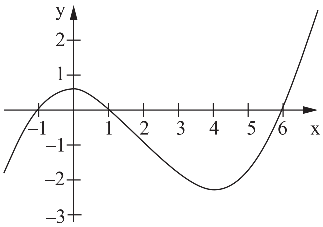
   Das Ermitteln der Geradengleichung für die Wendetangente geschieht auf die gleiche Weise wie bei einer „normalen“ Tangente, nur eben im Wendepunkt.

   $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ — Allgemeine Formel für die Tangente
   Es gilt: $x_0=2$ und $f(2)=\frac{5}{3}$
   $f'(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1$ — Es bleibt noch f'(2) zu berechnen.
   $t:\ y=-1(x-2)+\frac{5}{3}=-x+\frac{11}{3}$ — Einsetzen in die Tangentengleichung ergibt die Gleichung der Wendetangente.

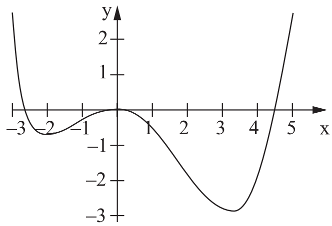
Aufgaben

136. a) An welchen Stellen haben die abgebildeten Graphen Wendepunkte? Befinden sich darunter auch Sattelpunkte?

(1)

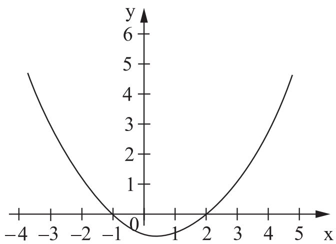


(2)

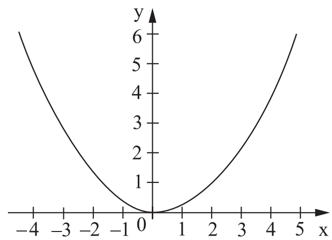


b) Unten sind die Graphen von zweiten Ableitungsfunktionen eingezeichnet. Was können Sie über Wendepunkte der zugehörigen Graphen aussagen?

(1)



(2)



137. a) Skizzieren Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, die in $W(2\,|\,1)$ einen Wendepunkt hat und deren Wendetangente lautet:
t: $y = -\frac{1}{2}(x-2)+1$

b) Skizzieren Sie einen Graphen, der in $(-1\,|\,1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

138. Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte für folgende Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1$

Ermitteln Sie hier zusätzlich die Gleichung der Wendetangente.

b) $f(x) = \frac{1}{5}(x^4 - 4x^3)$

c) $f(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2$

d) $f_t(x) = \frac{3}{8}x^4 - t^2x^2$ mit $t \in \mathbb{R} \wedge t > 0$

139. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2ax^3 + 30x^2)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie, für welche a der Graph von f_a zwei bzw. keine Wendepunkte besitzt.

b) Gibt es a, sodass der Graph von f_a genau einen Wendepunkt hat?

c) Geben Sie die Lage der Wendestellen in Abhängigkeit von a an.

134. a) $f(0)=8 \quad \Rightarrow \quad C(0|8)$
An der Stelle B ist mathematisch gesehen eine Nullstelle: $f(x)=0$
$\frac{1}{1875}x^2-\frac{11}{75}x+8=0 \quad |\cdot 1875$
$x^2-275x+15\,000=0 \Rightarrow x_1=75;\ x_2=200 \Rightarrow B(200|0)$

b) $D=[0;\ 200]$

c) Höchster Punkt: $C(0|8)$
Tiefster Punkt: $f'(x)=0 \Rightarrow x_0=137{,}5;\ f(137{,}5)=-2{,}08$
$\Rightarrow T(137{,}5|-2{,}08)$

d) $h=8-(-2{,}08)=10{,}08$ [m]

135. a) $e(x)=k(x)$ Ansatz auf Schneiden
$x^3-6x^2+13x+72=41x$
$x^3-6x^2-28x+72=0$
$(x^3-6x^2-28x+72):(x-2)$ Nullstelle geraten: $x_1=2$
$=x^2-4x-36$
$x^2-4x-36=0$
$x_1\approx 8{,}325$
$x_2\approx -4{,}325\notin D$
Die Gewinnzone ist das Intervall $]2;\ 8{,}325[$.

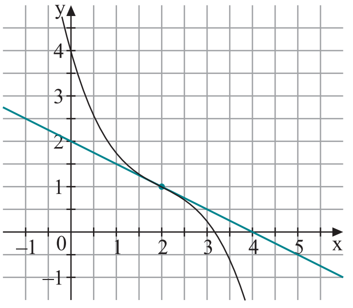
b) $g'(x)=0$
$-3x^2+12x+28=0 \Rightarrow -1{,}65\notin D;\ x_0=5{,}65$

c) Gewinnmaximum: $g(5{,}65)\approx 97$

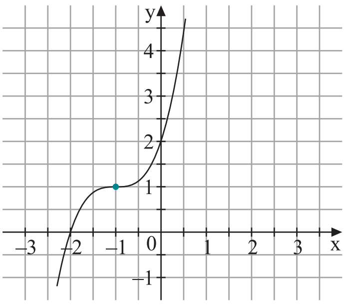
136. a) (1) $x_W=2$
(2) $x_{W_1}=-1;\ x_{W_2}=2$
Es gibt keine Sattelpunkte.

b) (1) Der Graph der zugehörigen Funktion hat an den Stellen $x_{W_1}=-1$; $x_{W_2}=2$ Wendepunkte, da die zweite Ableitung an diesen Stellen Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.
(2) Da die zweite Ableitung ihr Vorzeichen nicht wechselt, hat der zugehörige Graph keinen Wendepunkt.

137. a)



b)



138. a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ — Die ersten drei Ableitungen werden berechnet.

$f''(x) = x - 2$

$f'''(x) = 1$

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$ — Die Nullstellen von f'' werden berechnet.

$f'''(2) = 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; W\left(2 \,\middle|\, -\frac{5}{3}\right)$ — Die Nullstelle von f'' wird in f''' eingesetzt.

t: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — Allgemeiner Ansatz für die Wendetangente

$x_0 = 2;\; f(2) = -\frac{5}{3};\; f'(2) = -2$

t: $y = -2(x-2) - \frac{5}{3}$ — Einsetzen und Zusammenfassen ergibt die Gleichung der Wendetangente.

$= -2x + \frac{7}{3}$

b) $f'(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - 12x^2)$

$f''(x) = \frac{1}{5}(12x^2 - 24x) = \frac{12}{5}(x^2 - 2x)$

$f'''(x) = \frac{24}{5}(x - 1)$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{12}{5}x(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0;\; x_2 = 2$

$f'''(0) \neq 0 \;\Rightarrow\; W_1(0|0)$

$f'''(2) \neq 0 \;\Rightarrow\; W_2\left(2 \,\middle|\, -\frac{16}{5}\right)$

c) $f'(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x$

$f''(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$f'''(x) = x - 2$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \quad |\cdot 2$

$\Leftrightarrow\; (x-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 2$ (doppelte Nullstelle, ohne VZW)

$f'''(2) = 0$

Weil f'' an der Stelle 2 sein Vorzeichen nicht wechselt, hat der Graph von f an dieser Stelle keinen Wendepunkt.

d) $f_t'(x) = \frac{3}{2}x^3 - 2t^2x$

$f_t''(x) = \frac{9}{2}x^2 - 2t^2$

$f_t'''(x) = 9x$

$f_t''(x) = 0 \iff \frac{9}{2}x^2 - 2t^2 = 0$

$\iff x^2 = \frac{4}{9}t^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{2}{3}t$

$f_t'''\left(\pm\frac{2}{3}t\right) \neq 0 \Rightarrow W\left(\pm\frac{2}{3}t \,\middle|\, -\frac{10}{27}t^4\right)$

139. $f_a'(x) = \frac{1}{12}(4x^3 - 6ax^2 + 60x)$

$f_a''(x) = \frac{1}{12}(12x^2 - 12ax + 60) = \frac{12}{12}(x^2 - ax + 5) = x^2 - ax + 5$

$f_a'''(x) = 2x - a$

a) $f_a''(x) = 0 \iff x^2 - ax + 5 = 0$

$D = (-a)^2 - 4 \cdot 5 = a^2 - 20$ Es wird die Diskriminante berechnet.

Keine Wendepunkte, wenn $D < 0$:

$a^2 - 20 < 0 \iff |a| < \sqrt{20}$

Zwei Wendepunkte, wenn $D > 0$:

$|a| > \sqrt{20} \iff |a| > 2\sqrt{5}$

Dass in diesem Fall auch tatsächlich zwei Wendepunkte vorliegen, geht daraus hervor, dass für diese a die zweite Ableitung zwei einfache Nullstellen, also Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

b) Es gibt zwar a, für welche die zweite Ableitung nur je eine (doppelte) Nullstelle hat, nämlich für $a = \pm\sqrt{20}$. Obwohl in diesen beiden Fällen Nullstellen der zweiten Ableitung vorhanden sind, gibt es trotzdem keinen Wendepunkt, weil es Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel sind. Die Antwort lautet also: Es gibt kein a, sodass nur ein Wendepunkt vorliegt.

c) Wenn $|a| > 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$, dann hat f_a'' die beiden einfachen Nullstellen:

$$x_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 20}}{2}$$

Das sind die Wendestellen.

d) Für $a = 5$ gilt dann:

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 20}}{2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5}) \approx \begin{cases} 1{,}38 \\ 3{,}62 \end{cases}$$

$f_5(1{,}38) = 2{,}88$; $f_5(3{,}62) = 7{,}54$

Damit ergeben sich die Wendepunkte wie folgt:

$W_1(1{,}38 \,|\, 2{,}88)$; $W_2(3{,}62 \,|\, 7{,}54)$

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

FOS · BOS Technik

Analysis und Analytische Geometrie 2

STARK

Inhalt

Autor: Reinhard Schuberth

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Trainingsband ist für die 12. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS) in der Ausbildungsrichtung Technik konzipiert. Auch Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) können damit lernen. Für die 11. Jahrgangsstufe steht Ihnen Band 1 dieser Reihe, „Analysis und Analytische Geometrie 1“ (Stark Verlag, Best.-Nr. 92414), zur Verfügung.

Die modulare Struktur der Kapitel erlaubt es Ihnen, an vielen Stellen mit dem Lesen zu beginnen, ohne den Kontext zu verlieren. Daher können Sie sich sofort mit genau den Themenbereichen beschäftigen, die Ihnen noch Probleme bereiten. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den grün umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen, Regeln und Merksätze,** die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet und beinhalten auch anwendungsorientierte Aufgaben.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, kleinschrittige **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Bleibt mir nur noch, Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband und in der Schule zu wünschen!

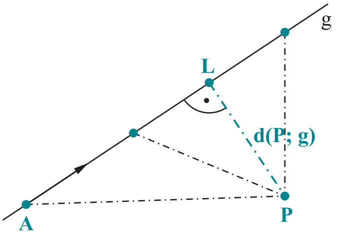
Ihr

Reinhard Schuberth

8 Abstandsberechnungen

In vielen Anwendungen benötigt man den Abstand zwischen zwei Objekten, beispielsweise den zwischen einem Flugzeug und einer Bergspitze. Im Folgenden werden Abstandsberechnungen zwischen geometrischen Objekten betrachtet.

8.1 Abstand Punkt – Gerade



Zunächst muss definiert werden, was man als Abstand zwischen zwei Objekten verstehen will. Wenn ein Asteroid längs einer geraden Flugbahn an der Erde vorbeifliegt, so interessiert man sich selbstverständlich für den kleinsten Abstand, den beide Himmelskörper haben werden. Betrachtet man die Flugbahn des Asteroiden als eine Gerade, so hat der Asteroid genau dort den geringsten Abstand von der Erde, wo die Verbindungsstrecke Erde – Asteroid einen rechten Winkel mit der Geraden der Flugbahn bildet (siehe Abbildung). Diesen Geradenpunkt, der den kleinsten Abstand aller Geradenpunkte vom Punkt P hat, bezeichnet man als den **Lotfußpunkt L** des Punktes P auf der Geraden g.
In diesem Zusammenhang nennt man die gerade Linie PL das **Lot** von P auf g.

Definition

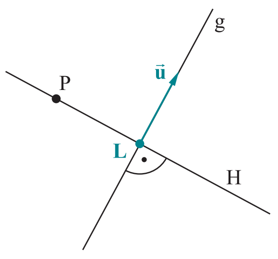
Abstand Punkt – Gerade
Der Abstand d(P; g) eines Punktes P von einer Geraden g wird definiert als die kürzeste Entfernung zwischen g und P. Diese ist gegeben durch den Abstand des Lotfußpunktes L vom Punkt P:
$d(P; g) = d(P; L) = |\overrightarrow{PL}|$
Dabei gilt stets $\overrightarrow{PL} \perp g$.

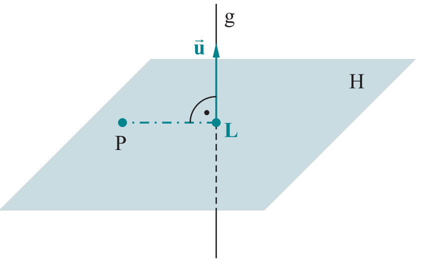
Das Lot und der Lotfußpunkt spielen bei Abstandsbestimmungen eine zentrale Rolle. Es wird nun der Lotfußpunkt eines Punktes P auf einer Geraden g bestimmt.

Gegeben sind eine Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und ein Punkt $P \notin g$. Um L zu bestimmen, wird eine Hilfsebene H aufgestellt, die P enthält und die senkrecht zu g steht:

$P \in H$ und $g \perp H$

Diese Ebene H nennt man die **Lotebene**. Aus der Abbildung (mit dem Schnittbild links) geht hervor, dass der Schnittpunkt von H und g der Lotfußpunkt L ist.





Regel

Koordinaten des Lotfußpunktes auf einer Geraden bestimmen

1. Lotebene H aufstellen, wobei P als Aufhängepunkt und $\vec{u}$, der Richtungsvektor von g, als Normalenvektor von H herangezogen werden: H: $\vec{u} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$
2. H mit g schneiden; der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt L.

Beispiel

Gegeben ist der Punkt $P(5\,|\,0\,|\,0)$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass P nicht auf g liegt, und bestimmen Sie dann den Abstand, den P von der Geraden g hat.

b) Ermitteln Sie den Abstand der Geraden g vom Ursprung O.

Lösung:

a) P in g: $\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Die Punktprobe kann im Kopf durchgeführt werden: In der 2. und 3. Koordinate ergibt sich jeweils $\lambda = -1$, das führt aber in der 1. Koordinate auf eine falsche Aussage, also $P \notin g$.

Abstandsberechnung:

H: $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$ — Lotebene aufstellen

H: $2x_1 + x_2 + x_3 = 10$ — H in Koordinatenform umwandeln

g in H: $2 \cdot (1 + 2\lambda) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) = 10$ — g mit H schneiden

$6\lambda = 6 \;\Rightarrow\; \lambda = 1$ — Bestimmen des Parameters

In g einsetzen: $\vec{x}_L = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ Dies ergibt den Lotfußpunkt L(3 | 2 | 2).

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left|\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}\right|$

$= \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3} \approx \mathbf{3{,}464}$ Das ist der gesuchte Abstand.

b) Der Abstand der Geraden g vom Ursprung berechnet sich in gleicher Weise, wobei dieses Mal lediglich der Punkt O(0 | 0 | 0) genommen werden muss.

F: $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ Lotebene durch O, senkrecht zu g

g in F: $2(1+2\lambda) + (1+\lambda) + (1+\lambda) = 0$ g mit F schneiden

$6\lambda = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3}$ Bestimmen des Parameters

In g einsetzen: $L\left(-\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$ Lotfußpunkt des Ursprungs auf g

$|\overrightarrow{OL}| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx \mathbf{0{,}577}$ Das ist der Abstand vom Ursprung.

Aufgaben

120. Berechnen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) P(3 | 2 | −4) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

b) P(2 | 0 | 0) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

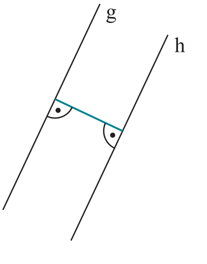
c) P(0 | 0 | 1) und g: $\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

d) P(0 | 0 | 0) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$

121. Abstand paralleler Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}$.



a) Zeigen Sie, dass die Geraden echt parallel sind.

b) Berechnen Sie ihren Abstand, indem Sie dieses Abstandsproblem auf die Bestimmung des Abstands eines Punktes von einer Geraden zurückführen.

b) Es handelt sich in beiden Fällen um Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene (Achtung: $\sin(\varphi)$). Der Richtungsvektor der Geraden ist in beiden Fällen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

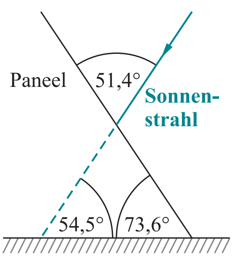
Sonnenstrahl und Paneel

$$\sin(\varphi_1) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{119}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{313}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_1 \approx 51{,}4°}$$

Sonnenstrahl und Boden

$$\sin(\varphi_2) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}_2|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{7}{\sqrt{74}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_2 \approx 54{,}5°}$$



Anmerkung: Bei der Skizze ist zu beachten, dass die gezeichneten Geraden in die Zeichenebene projiziert wurden.

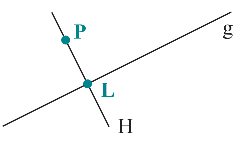
c) Maximal ist die Stromausbeute, wenn die Sonnenstrahlen parallel zum Normalenvektor des Paneels verlaufen. Der Richtungsvektor dafür ist:

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Das Minuszeichen wurde hier nur gewählt, damit die Orientierung des Richtungsvektors mit dem der Sonnenstrahlung übereinstimmt.

d) $$\sin(\varphi_3) = \frac{|\vec{r}_S \circ \vec{n}_2|}{|\vec{r}_S| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{313} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{313}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_3 \approx 16{,}4°}$$

120. a) Lotebene aufstellen:



$$\text{H: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = 0$$

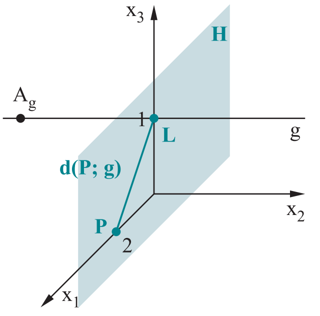
$$\Leftrightarrow \quad \text{H: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$g \cap \text{H: } 2(-3+2\lambda) + (-4+\lambda) + 2(-4+2\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9\lambda = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$$

$$\text{in g: } \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Ortsvektor des Lotfußpunktes

$$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16+16} = \mathbf{6}$$

b) $H: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H: x_2 = 0$



$g \cap H: -2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$

in g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}$

c) $H: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H: x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

$g \cap H: \lambda + \lambda + \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3}$

in g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{1+1+4} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

d) $H: \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H: 5x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$g \cap H: 5(1+5\lambda) + (-3+\lambda) - (1-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 27\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{27}$

in g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{27}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{22}{27}\\-\frac{82}{27}\\\frac{28}{27}\end{pmatrix}$

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = |\overrightarrow{OL}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{22}{27}\\-\frac{82}{27}\\\frac{28}{27}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{27}\sqrt{484 + 6\,724 + 784} = \frac{2}{9}\sqrt{222} \approx 3{,}31$

121. a) Prüfen der Richtungsvektoren auf Kollinearität:

$\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\Rightarrow & \alpha = -2\\\Rightarrow & \alpha = -2\\\Rightarrow & \alpha = -2\end{matrix}$

$\Rightarrow$ g und h sind zumindest parallel.

Differenzvektor der Aufhängepunkte:

$\vec{a}_h - \vec{a}_g = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$