

2021

Zentrale Klausur

Original-Prüfungen
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Gymnasium

BRUNNEN RW

Mathematik

+ Übungsaufgaben



STARK

Inhalt

Vorwort

Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zur Zentralen Klausur

1 Ablauf der Prüfung	I
2 Thematisch-inhaltliche Schwerpunkte für die Zentrale Klausur 2021	II
3 Leistungsanforderung und Bewertung	III
4 Operatoren und Anforderungsbereiche	III
5 Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur Zentralen Klausur	VI
6 Hinweise zum Lösen mit dem GTR bzw. CAS	IX

Übungsaufgaben

Hilfsmittelfreie Aufgaben

Analysis	1
Stochastik	16
Koordinatengeometrie*	28

Aufgaben mit Hilfsmitteln (GTR/CAS, Formelsammlung)

Analysisaufgaben mit GTR	38
Analysisaufgaben mit CAS	61

* Sie finden dazu einen ausführlichen Hinweis im Kapitel „Hinweise und Tipps zur Zentralen Klausur“ auf Seite II.

Zentrale Klausur 2016

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil	2016-1
Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln	2016-5

Fortsetzung siehe nächste Seite

Zentrale Klausur 2017

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel	2017-1
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmittel	2017-7

Zentrale Klausur 2018

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel	2018-1
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmittel	2018-6

Zentrale Klausur 2019

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel	2019-1
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmittel	2019-5

Wegen des Corona-Virus fanden 2020 keine Zentralen Klausuren am Ende der Einführungsphase statt. Für 2020 können daher keine Original-Aufgaben abgedruckt werden.

Jeweils im Herbst erscheinen die neuen Ausgaben der Zentralen Klausur mit Lösungen.

Autor

Herbert Kompernaß

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

im Laufe der Einführungsphase schreiben Sie im Fach Mathematik insgesamt vier Klausuren. Die letzte von diesen wird vom Schulministerium des Landes Nordrhein-Westfalen **zentral** gestellt. Diese sogenannte Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase findet im Schuljahr 2019/20 am **28. Mai 2021** statt.

Das Buch enthält die **offiziellen Aufgaben der Jahre 2016 bis 2019** und darüber hinaus einige **Übungsaufgaben** zum eigenständigen Üben und Wiederholen.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen:

- einem **hilfsmittelfreien** Teil (Teil I bzw. Prüfungsteil A)
- einer innermathematischen und einer kontextbezogenen Aufgabe **mit Hilfsmitteln** (Teil II bzw. Prüfungsteil B)

Die Prüfungen 2016 bis 2019 zeigen Ihnen den Prüfungsaufbau. Dieser ist auch ausführlich in den Hinweisen auf Seite I beschrieben.

Die Übungsaufgaben in diesem Buch eignen sich bestens zum Vorbereiten auf beide Prüfungsteile.

Zu jeder Aufgabe finden Sie **vollständige** und **ausführlich kommentierte Lösungen**. Sollten Sie einmal nicht weiterkommen, helfen Ihnen **Tipps und Hinweise** auf den richtigen Weg. Schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie Schritt für Schritt die Lösungstipps.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes wichtige Änderungen in der Zentralen Klausur 2021 vom Landesinstitut für Schule Nordrhein-Westfalen bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:

www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Zentralen Klausur!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zur Zentralen Klausur

1 Ablauf der Prüfung

Die schriftliche Zentrale Klausur

Im Fach Mathematik wird die Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase verpflichtend geschrieben. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Weiterbildung von einer Fachkommission erstellt und von Gutachtern bewertet. Grundlage für die gestellten Aufgaben der Zentralen Klausur sind Inhalte des Lehrplans der Einführungsphase.

Die Zentrale Klausur ersetzt die vierte (sonst von der Fachlehrkraft erstellte) Klausur der Einführungsphase.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Zentrale Klausur umfasst 2 Aufgabenteile:

- ein **hilfsmittelfreier** Teil (Teil I bzw. Aufgabenteil A) mit Aufgaben aus den Bereichen Analysis, Stochastik und evtl. Koordinatengeometrie
- eine innermathematische und kontextbezogene Aufgabe **mit Hilfsmitteln** (Teil II bzw. Prüfungsteil B) aus dem Bereich Analysis

Für den hilfsmittelfreien Teil stehen Ihnen maximal 20 Minuten, für den Teil mit Hilfsmitteln mindestens 80 Minuten zur Verfügung, insgesamt auf jeden Fall 100 Minuten. Die Bewertungseinheiten entsprechen den Zeitanteilen.

Zu Beginn der Klausur wird der hilfsmittelfreie Teil bearbeitet. Wenn Sie die Lösung dieses Teils abgeben, erhalten Sie den zweiten Aufgabenteil sowie Ihren Taschenrechner und Ihre Formelsammlung.

Die Prüfung beginnt zur 1. Stunde, unabhängig davon, wann der Unterricht an Ihrer Schule einsetzt.

Zugelassene Hilfsmittel für Prüfungsteil I bzw. A

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung

Zugelassene Hilfsmittel für Prüfungsteil II bzw. B

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
oder
CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung

5 Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur Zentralen Klausur

Vorbereitung

- Bereiten Sie sich **längerfristig** auf die Zentrale Klausur vor und fertigen Sie sich eine Übersicht über die von Ihnen bereits bearbeiteten Themen, Inhalte und Verfahren an.
Es ist zweckmäßig, alle schriftlichen Bearbeitungen dieser Aufgaben übersichtlich aufzubewahren, das erleichtert spätere Wiederholungen.
- Benutzen Sie zur Prüfungsvorbereitung neben diesem Übungsbuch Ihre **Unterrichtsaufzeichnungen** und das Lehrbuch.
- Verwenden Sie während der Prüfungsvorbereitung grundsätzlich die **Hilfsmittel**, die auch in der Prüfung zugelassen sind. Prägen Sie sich wichtige Seiten in Ihrer Formelsammlung ein und nutzen Sie Ihren Taschenrechner mit allen Funktionen.
- Oft ist der Zeitfaktor ein großes Problem. Testen Sie, ob Sie eine Beispielklarsurauflage in der dafür vorgegebenen Zeit allein lösen können. **Simulieren Sie selbst eine Prüfungssituation.**
- Gehen Sie optimistisch in die Prüfung. Wer sich gut vorbereitet hat, braucht sich keine Sorgen zu machen.

Bearbeitung der Prüfung

- Es ist hilfreich, wenn Sie bei der Analyse der Aufgabenstellungen wichtige Angaben oder Informationen (z. B. gegebene Größen, Lösungshinweise) **farbig markieren**.
- Um den Lösungsansatz zu einer Aufgabe zu finden oder die gegebene Problemstellung zu veranschaulichen, kann das **Anfertigen einer Skizze** nützlich sein.
- Beachten Sie, dass in manchen Teilaufgaben „**Zwischenlösungen**“ angegeben sind, die Ihnen als Kontrolle dienen bzw. mit denen Sie weiterarbeiten können.
- Falls Sie mit einer Aufgabe gar nicht weiterkommen, so halten Sie sich nicht zu lange damit auf. Versuchen Sie, mit der nächsten Teilaufgabe weiterzumachen. Wenn Sie die anderen Aufgaben bearbeitet haben, kommen Sie nochmals auf die angefangene Aufgabe zurück und versuchen Sie in Ruhe, eine Lösung zu finden.
- Orientieren Sie sich an der angegebenen **Punktezahl**: Je mehr Punkte eine Aufgabe ergibt, desto mehr Zeit sollte für die Bearbeitung eingeplant werden.
- Achten Sie auf die **sprachliche Richtigkeit** und eine **saubere äußere Form** Ihrer Lösungen.

Lösungsplan

Beim Lösen der Aufgaben empfiehlt es sich stets, systematisch zu arbeiten. Folgende Vorgehensweise hilft Ihnen dabei:

Schritt 1:

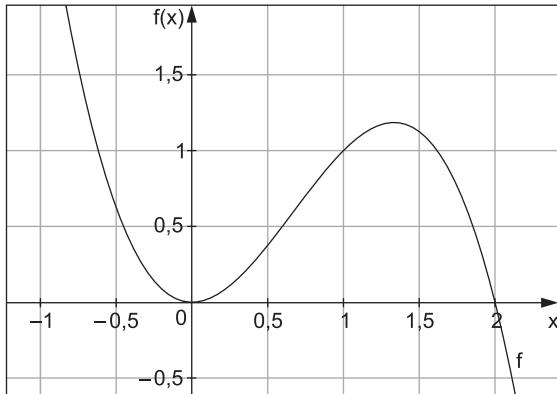
Nehmen Sie sich ausreichend Zeit zum **Analysieren** der Aufgabenstellung. Stellen Sie fest, um was es in der Aufgabe geht. Sammeln Sie alle Informationen, welche direkt gegeben sind, und achten Sie darauf, ob eventuell versteckte Informationen enthalten sind.

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2017
Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^3 + 2 \cdot x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Abbildung zeigt den Graphen von f .

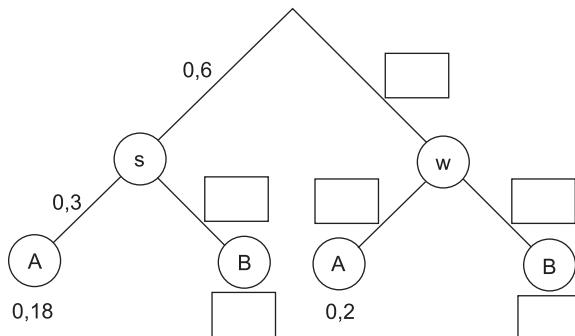


Abbildung

- a) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 | 1)$. **(4 P)**
- b) (1) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes A an, in dem der Graph von f die Steigung null hat.
(2) Geben Sie die Koordinaten eines Punktes $B(x_B | y_B)$ an, sodass die Ableitung von f an der Stelle x_B negativ ist. **(1+1 P)**

Aufgabe 2: Stochastik

In einer Urne befinden sich schwarze (s) und weiße (w) Kugeln, die zusätzlich entweder mit dem Buchstaben A oder dem Buchstaben B beschriftet sind. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Dieses Zufallsexperiment ist in dem folgenden unvollständig beschrifteten Baumdiagramm dargestellt.



Baumdiagramm

- Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Rechtecken im Baumdiagramm an. (4 P)
- Von der gezogenen Kugel wird zunächst nur bekannt gegeben, dass sie mit dem Buchstaben A beschriftet ist.
Stellen Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit auf, dass es sich um eine schwarze Kugel handelt.
[Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist nicht erforderlich.] (2 P)

Hinweise und Tipps

Aufgabe 1 a

- ➊ Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P ist gleich der Steigung des Graphen im Punkt P .
- ➋ Bilden Sie die Ableitung mithilfe der Potenz-, Faktor- und Summenregel.
- ➌ Bestimmen Sie mithilfe der berechneten Steigung und den Koordinaten des Punktes P den y -Achsenabschnitt.
- ➍ Geben Sie die Gleichung der Tangente an.

Aufgabe 1 b

- ➊ Die Steigung ist gleich null bei den lokalen Extrempunkten des Graphen der Funktion.
- ➋ Entnehmen Sie der Abbildung einen Punkt, an dem die Steigung des Graphen gleich null ist.
- ➌ Achten Sie darauf, dass ein Punkt aus einer x - und einer y -Koordinate besteht.
- ➍ *Oder:* Berechnen Sie die Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion $f'(x)$.
- ➎ Beachten Sie, dass ein Punkt aus einer x - und einer y -Koordinate besteht.
- ➏ Ist die Ableitung von f negativ, so fällt der Graph der Funktion.
- ➐ Entnehmen Sie dem Graphen eine Stelle aus dem Bereich, in dem der Graph fällt.
- ➑ Vergessen Sie nicht, dass auch die y -Koordinate des Punktes B angegeben werden muss.

Aufgabe 2 a

- ➊ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist gleich 1.
- ➋ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ist gleich 1.
- ➌ Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses am Ende eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades (Pfadmultiplikationsregel).

Aufgabe 2 b

- ➊ Beachten Sie, dass bekannt ist, dass die Kugel mit einem A beschriftet ist, man also eine Information kennt.
- ➋ Wenden Sie die Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten an.
- ➌ *Oder:* Tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten in eine Vierfeldertafel ein und betrachten Sie nur die relevante Zeile oder Spalte.
- ➍ *Oder:* Tragen Sie die bekannten Wahrscheinlichkeiten in ein umgekehrtes Baumdiagramm ein und wenden Sie die Pfadmultiplikationsregel an.

Lösung

Aufgabe 1

a) Zur Berechnung der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P wird die Steigung des Graphen im Punkt P ermittelt.

Eine Ableitung mithilfe der Potenz-, Faktor- und Summenregel ergibt:

$$f'(x) = -3 \cdot x^2 + 4 \cdot x$$

Einsetzen von $x=1$ liefert die Steigung der Tangente:

$$m = f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 1$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes P und der Steigung m in die allgemeine Form der Gleichung $y = m \cdot x + n$ liefert den y-Achsenabschnitt:

$$1 = 1 \cdot 1 + n$$

$$n = 0$$

Die Tangente hat die Gleichung $t(x) = x$.

b) (1) Der Abbildung entnimmt man, dass der Ursprung $O(0|0)$ ein lokaler Tiefpunkt des Graphen ist und $f(x)$ dort die Steigung 0 besitzt.

Rechnerische Alternativlösung (umständlicher und zeitaufwendiger):

Gleichsetzen von $f'(x)$ mit 0 ergibt:

$$-3x^2 + 4x = 0$$

$$x \cdot (-3x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad -3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$f(0) = 0; \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} = \frac{32}{27}$$

Es ergeben sich die möglichen Punkte $A(0|0)$ und $A\left(\frac{4}{3} \mid \frac{32}{27}\right)$.

(2) Ist die Ableitung von f negativ, so fällt der Graph der Funktion.

Dem Graphen sowie der Rechnung in (1) entnimmt man, dass der Graph für $x < 0$ und für $x > \frac{4}{3}$ fällt.

Wählt man z. B. $x_B = 2$ und berechnet $f(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 = 0$, so ergibt sich der Punkt $B(2|0)$.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK