
TRAINING
MATHEMATIK
Mathematik
GYMNASIUM
Wiederholung Geometrie
TRAINING
MEHR
ERFAHREN
Mathematik
GYMNASIUM
Algebra
Fit für die Oberstufe
TRAINING
Gymnasium | Mathematik
TRAINING
Gymnasium
Stochastik
Fit für die Oberstufe
Stochastik
STARK

MEHR
ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Wiederholung Geometrie

STARK

Inhalt

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Geometrie ist das wohl älteste mathematische Gebiet, auf dem bereits in der Antike intensiv geforscht wurde. Im täglichen Leben begegnet man ihr in Form von Körpern wie z. B. Kegeln oder Quadern oder ebener geometrischer Gebilde wie z. B. Geraden oder Winkeln bzw. Rechtecken oder Dreiecken.

In diesem Buch werden alle **wesentlichen Themengebiete der Mittelstufengeometrie** systematisch in getrennten Kapiteln dargestellt und mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben unterstützt.

Hierbei werden diejenigen Teilgebiete deutlich umfassender und intensiver besprochen, die im **Mathematikunterricht der Oberstufe wieder aufgegriffen** und weitergeführt werden. Insbesondere werden – ausgehend von einfachen geometrischen Objekten, Kongruenz und Ähnlichkeit – die Satzgruppe des Pythagoras, Winkelberechnungen, Körper im dreidimensionalen Raum, Vektoren und Koordinatensysteme ausführlich bearbeitet.

Somit kann durch die Arbeit mit diesem Wiederholungsbuch ein bedeutender Grundstein für die erfolgreiche Bewältigung der Oberstufenmathematik gelegt werden.

Geometrie kann man aber nicht auswendig lernen, Geometrie muss man verstehen und „be-greifen". Daher sind in diesem Wiederholungsbuch **sehr viele anschauliche Zeichnungen** enthalten, die die Sachverhalte verbildlichen sollen.

Prinzipiell kann **jedes Kapitel separat** bearbeitet werden, jedoch bauen die meisten davon auf vorhergehenden Einheiten auf, sodass sich auch die Bearbeitung des gesamten Buches anbietet. Es steht Ihnen frei, über die Geschwindigkeit und Intensität der Bearbeitung selbst zu entscheiden.

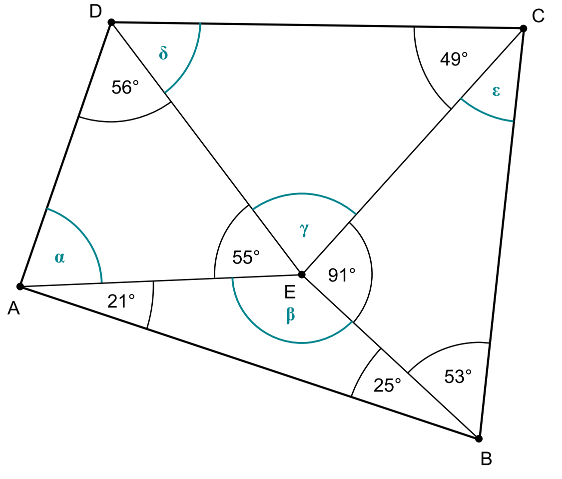
Im letzten Kapitel finden Sie eine bunte **Sammlung von Aufgaben**, die Sie nach der Bearbeitung der vorhergehenden Kapitel zur eigenen Erfolgskontrolle und Gesamtwiederholung benutzen können.

Die **Lösungswege für alle Aufgaben** sind im Lösungsteil ausführlich dargestellt, um eine gewissenhafte Kontrolle zu ermöglichen und somit den Lernerfolg zu unterstützen. Die mit einem Stern **(✱)** gekennzeichneten Aufgaben sind etwas anspruchsvoller und regen in besonderer Weise zum Nachdenken an; Sie können diese beim ersten Durcharbeiten auch überspringen.

In diesem Sinne wünsche ich Ihnen viel Erfolg bei der Wiederholung Geometrie!

Eberhard Endres

Aufgabe **22.** Berechnen Sie die grün markierten Winkel.



2.2 Besondere Dreiecke

Bei einem Dreieck, das bekanntlich drei Seiten und drei Innenwinkel besitzt, kann es vorkommen, dass einige Winkel oder Seiten gleich groß sind. Bei solchen besonderen Dreiecken lassen sich einige weitere Eigenschaften ableiten.

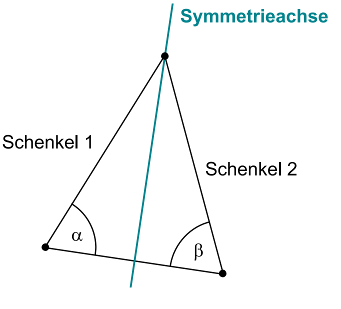
Gleichschenklige Dreiecke

Definition

Ein Dreieck, bei dem zwei Seiten gleich groß sind, nennt man **gleichschenklig**.
Bei einem gleichschenkligen Dreieck nennt man die beiden gleich großen Seiten **Schenkel** und die dritte Seite **Basis**.
Der Winkel, der von den beiden Schenkeln eingeschlossen wird, heißt **Scheitelwinkel**.
Die beiden an der Basis anliegenden Winkel werden mit **Basiswinkel** bezeichnet.

Die beiden an der Basis anliegenden Winkel sind gleich groß; für die Winkel α und β in nebenstehender Zeichnung gilt somit: $\boldsymbol{\alpha = \beta}$

Ein gleichschenkliges Dreieck ist **symmetrisch**. Seine Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte der Basis.



Gleichseitige Dreiecke

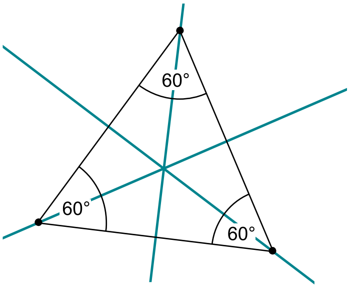
Definition

> Wenn ein Dreieck drei gleich lange Seiten besitzt, dann nennt man dieses Dreieck **gleichseitig**.

Ein gleichseitiges Dreieck besitzt auch drei **gleich große Winkel**. Wegen der Winkelsumme im Dreieck von 180° beträgt jeder Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck:

$\frac{180°}{3} = \mathbf{60°}$

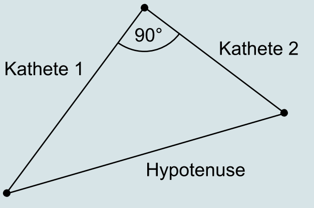
Ein gleichseitiges Dreieck besitzt **drei Symmetrieachsen**.



Rechtwinklige Dreiecke

Definition

> Wenn ein Winkel im Dreieck 90° beträgt, nennt man dieses Dreieck **rechtwinklig**.
> In diesem Fall nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse** und die beiden am rechten Winkel anliegenden Seiten **Katheten**.

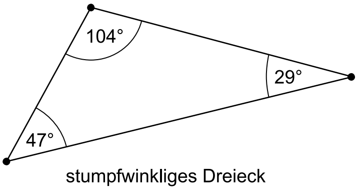


Stumpfwinklige und spitzwinklige Dreiecke

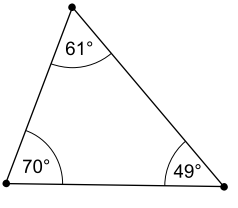
Dreiecke kann man auch nach der Größe ihrer Winkel unterscheiden:

Definition

> Wenn der größte der drei Winkel eines Dreiecks stumpf, also größer als 90° ist, nennt man dieses Dreieck **stumpfwinklig**.
> Sind dagegen alle drei Winkel des Dreiecks spitz, also kleiner als 90°, heißt dieses Dreieck **spitzwinklig**.



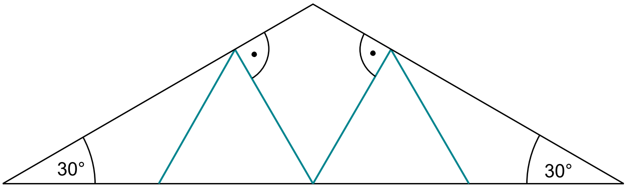
stumpfwinkliges Dreieck



spitzwinkliges Dreieck

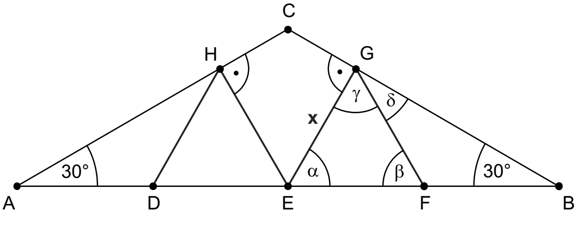
Beispiel

Ein 12 m breiter Hausgiebel soll durch vier gleich lange, hier grün gezeichnete Stützbalken stabilisiert werden.



Helfen Sie dem Zimmermann bei der Planung, indem Sie die Länge dieser Stützbalken berechnen.

Lösung:
Gesucht ist die Länge x jedes Stützbalkens. Wir schauen, welche besondere Eigenschaft die einzelnen Dreiecke in der Zeichnung besitzen:
Zunächst werden die Punkte sowie einige für die Berechnung wichtige Winkel markiert.



Anhand der Zeichnung entsteht die Vermutung, dass die Dreiecke DEH und EFG gleichseitig sein könnten. Dies werden wir zunächst begründen.
Das Dreieck EBG ist auf jeden Fall rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei G. Mithilfe der Winkelsumme in diesem Dreieck lässt sich daher der Winkel α bestimmen:
$\alpha + 90° + 30° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$
Weil die grünen Balken gleich lang sind, ist das Dreieck EFG gleichschenklig; daher sind die Basiswinkel α und β gleich groß:
$\beta = 60°$
Wegen der Winkelsumme im Dreieck EFG ist damit auch $\gamma = 60°$ und dieses Dreieck sogar gleichseitig. Daher hat die Strecke [EF] ebenfalls die gesuchte Länge x:
$\mathbf{|EF| = x}$
Im gegenüberliegenden gleichseitigen Dreieck DEH liegt derselbe Sachverhalt vor; auch hier gilt:
$\mathbf{|DE| = x}$
Der Winkel $\sphericalangle$EGB bei G ist 90°:
$\gamma + \delta = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 90° - \gamma = 30°$
Daher ist das Dreieck FBG wegen der zwei 30°-Winkel gleichschenklig. Für die Seitenlängen dieses Dreiecks gilt $|FB| = |FG|$ und damit auch $\mathbf{|FB| = x}$.

Ebenso gilt wegen der symmetrischen Figur natürlich auch in dem Dreieck ADH:
$|AD|=|DH|$ und somit $\mathbf{|AD|=x}$
Für die gesamte Breite des Hauses folgt:
$|AB|=|AD|+|DE|+|EF|+|FG|=x+x+x+x=4x=12$ m
Daher muss jeder Balken genau 3 m lang sein.

Aufgaben

23. Bestimmen Sie den fehlenden Winkel in einem Dreieck und entscheiden Sie, ob folgende Angaben zu einem spitzwinkligen, rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreieck gehören:

a) $\alpha=78°$; $\gamma=90°$
b) $\alpha=32°$; $\gamma=47°$
c) $\alpha=45°$; $\beta=86°$
d) $\alpha=63°$; $\gamma=27°$
e) $\beta=52°$; $\gamma=38°$

24. Wie groß sind die Winkel eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks?

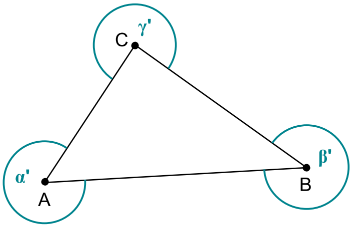
25. a) Ein gleichschenkliges Dreieck hat den Basiswinkel $\beta=32°$. Bestimmen Sie die restlichen Winkel dieses Dreiecks.

b) Ein gleichschenkliges Dreieck hat den Scheitelwinkel $\gamma=80°$. Bestimmen Sie die restlichen Winkel dieses Dreiecks.

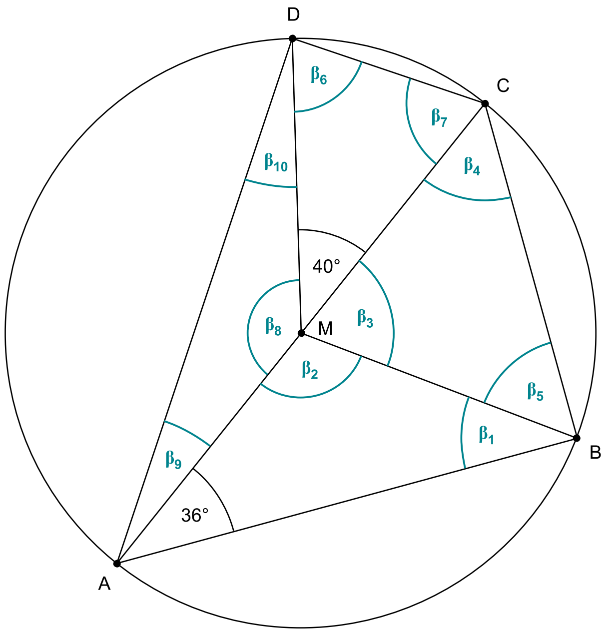
c) Bestimmen Sie die fehlenden zwei Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\beta=72°$.

26. Warum kann es kein Dreieck mit zwei stumpfen Winkeln geben?

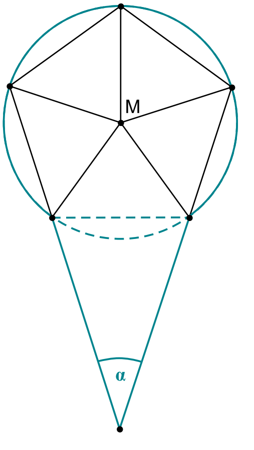
27. Die Winkel α', β' und γ' in nebenstehender Zeichnung bezeichnet man als **Außenwinkel** des Dreiecks ABC. Bestimmen Sie die Summe dieser drei Außenwinkel.



28. In der abgebildeten Figur ist die Strecke [AC] ein Durchmesser des Kreises. Bestimmen Sie die grün eingezeichneten Winkel β_1 bis β_{10}:

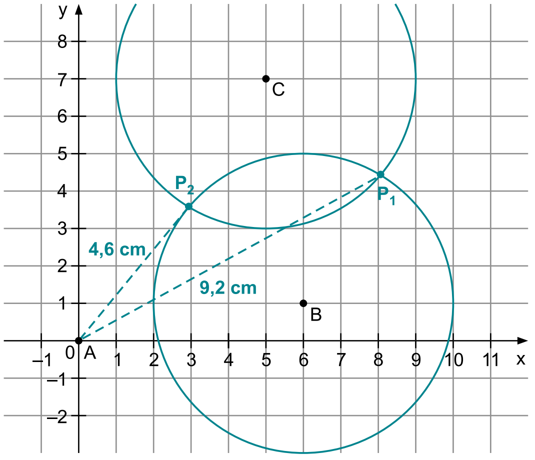


29. Die fünf um M gruppierten Dreiecke sind alle identisch.
Bestimmen Sie den Winkel α.



2.3 Seitenlängen im Dreieck

Für die Bezeichnung der Länge einer Seite verwendet man üblicherweise denselben Kleinbuchstaben wie für die Seite selbst, soweit eine Verwechslung ausgeschlossen ist.



P_1 ist ca. 9,2 km von A entfernt, P_2 besitzt eine Entfernung von ca. 4,6 km. Der Baum kann also entweder 9,2 km oder 4,6 km von A entfernt sein.

22. Im Dreieck AED gilt für die Winkelsumme im Dreieck:
$\alpha + 55° + 56° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = 180° - 55° - 56° \mathbf{= 69°}$

Entsprechend gilt im Dreieck ABE:
$\beta + 21° + 25° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta} = 180° - 21° - 25° \mathbf{= 134°}$

Für das Dreieck BCE folgt genauso:
$\varepsilon + 91° + 53° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 180° - 91° - 53° \mathbf{= 36°}$

Weil die vier Winkel bei E zusammen 360° ergeben, erhält man:
$\gamma + 55° + \beta + 91° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 360° - 55° - \beta - 91°$
$\boldsymbol{\gamma} = 360° - 55° - 134° - 91° \mathbf{= 80°}$

Schließlich ergibt sich im Dreieck CDE:
$\delta + \gamma + 49° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\delta} = 180° - \gamma - 49° = 180° - 80° - 49° \mathbf{= 51°}$

23. Es gilt jeweils: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Hiermit ergibt sich:

a) $\boldsymbol{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 78° - 90° \mathbf{= 12°}$ rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$)

b) $\boldsymbol{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 32° - 47° \mathbf{= 101°}$ stumpfwinkliges Dreieck ($\beta > 90°$)

c) $\boldsymbol{\gamma} = 180° - \alpha - \beta = 180° - 45° - 86° \mathbf{= 49°}$ spitzwinkliges Dreieck (alle Winkel kleiner als 90°)

d) $\boldsymbol{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 63° - 27° \mathbf{= 90°}$ rechtwinkliges Dreieck ($\beta = 90°$)

e) $\boldsymbol{\alpha} = 180° - \beta - \gamma = 180° - 52° - 38° \mathbf{= 90°}$ rechtwinkliges Dreieck ($\alpha = 90°$)

24. Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt einen Winkel von 90°. Für die beiden anderen Winkel, die wegen der Gleichschenkligkeit gleich groß sein müssen, bleiben wegen der Winkelsumme im Dreieck zusammen 90° übrig, sodass die beiden Basiswinkel jeweils eine Winkelweite von 45° besitzen müssen.

25. a) Der zweite Basiswinkel (z. B. α) besitzt ebenfalls die Weite 32°. Somit verbleibt für den Scheitelwinkel wegen der Winkelsumme im Dreieck:
$\gamma = 180° - 2 \cdot 32° = \mathbf{116°}$

b) Wegen der Winkelsumme im Dreieck besitzen die beiden Basiswinkel zusammen die Weite von $180° - 80° = 100°$. Somit sind die beiden Basiswinkel jeweils **50°** groß.

c) Ein Winkel (z. B. γ) muss wegen der Rechtwinkligkeit 90° groß sein. Damit folgt für den noch fehlenden Winkel α:
$\alpha = 180° - 90° - 72° = \mathbf{18°}$

26. Wenn es zwei stumpfe Winkel in einem Dreieck geben würde, wäre die Winkelsumme dieses Dreiecks größer als 180°.

27. Die Winkel α', β' und γ' bilden zusammen mit den drei Dreieckswinkeln insgesamt drei Vollwinkel, besitzen also zusammen die Winkelweite von $3 \cdot 360° = 1\,080°$. Subtrahiert man davon die Winkelsumme des Dreiecks von 180° für die drei Innenwinkel des Dreiecks, dann ergibt sich für die Summe der drei Außenwinkel:
$\alpha' + \beta' + \gamma' = 1\,080° - 180° = \mathbf{900°}$

28. Die Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM sind gleichschenklig.
Damit lassen sich alle gesuchten Winkel bestimmen:
Im Dreieck ABM gilt $\beta_1 = \mathbf{36°}$ und damit wegen der Winkelsumme:
$\beta_2 = 180° - 2 \cdot 36° = \mathbf{108°}$
β_2 und β_3 bilden einen gestreckten Winkel. Somit ist $\beta_3 = 180° - \beta_2 = \mathbf{72°}$.
Im Dreieck BCM sind die Winkel β_4 und β_5 gleich groß. Somit gilt:
$\beta_3 + 2 \cdot \beta_4 = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \beta_4 = 180° - \beta_3 = 108° \quad \Leftrightarrow \quad \beta_4 = \beta_5 = \frac{108°}{2} = \mathbf{54°}$

Im Dreieck CDM sind die Winkel β_6 und β_7 gleich groß. Somit gilt:
$40° + 2 \cdot \beta_6 = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \beta_6 = 180° - 40° = 140° \quad \Leftrightarrow \quad \beta_6 = \beta_7 = \frac{140°}{2} = \mathbf{70°}$

β_8 ist ein Nebenwinkel zu 40° und besitzt somit die Weite 140°.
Im Dreieck DAM sind die Winkel β_9 und β_{10} gleich groß. Somit gilt:
$140° + 2 \cdot \beta_9 = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \beta_9 = 180° - 140° = 40° \quad \Leftrightarrow \quad \beta_9 = \beta_{10} = \frac{40°}{2} = \mathbf{20°}$

MEHR ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Algebra
Fit für die Oberstufe

STARK

Inhalt

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

beim Erlernen einer Fremdsprache spielen Vokabeln und Grammatik eine entscheidende Rolle. Mithilfe der Grammatik werden Vokabeln zu sinnvollen Sätzen kombiniert. Darüber hinaus gestattet die Grammatik in gewissen Grenzen das Umstellen einzelner Satzglieder eines Satzes.

Auch in der Algebra spielen diese Begriffe eine wesentliche Rolle: Die mathematischen Vokabeln sind dabei die Fachbegriffe (z. B. Variable, Term, Gleichung) und die Grammatik wird durch entsprechende mathematische Regeln (z. B. Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) gebildet. Wie beim Umstellen der Satzglieder eines Satzes in der Fremdsprache hilft die „mathematische Grammatik" auch bei der Umwandlung von mathematischen Aussagen in gleichwertige Aussagen (z. B. beim Lösen einer Gleichung). Ziel dieses Buches ist es, die wichtigsten mathematischen Vokabeln (Definitionen) zu erläutern und das erforderliche mathematische Grammatikgerüst (mathematische Regeln) aufzufrischen.

Dieser Band beschäftigt sich mit den fundamentalen **in der Algebra benötigten Regeln und Rechentechniken** und dient dazu, den in der Unter- und Mittelstufe behandelten Stoff zu wiederholen und zu festigen. Das Buch vermittelt die **grundlegenden Algebra-Kenntnisse**, die in der Oberstufe des Gymnasiums vorausgesetzt werden. Daneben wird auch ein Blick auf das eng mit der Algebra verknüpfte Gebiet der **Funktionen** geworfen, die ebenfalls zentrale Bedeutung im Oberstufenstoff besitzen und bei denen die erworbenen Algebrakenntnisse angewandt werden.

Einige Kapitel dieses Bandes gehen dabei in Maßen über die unumgänglichen Grundkenntnisse für die Oberstufe hinaus und müssen nicht unbedingt bis in das letzte Detail beherrscht werden; diese Kapitel sind im Inhaltsverzeichnis mit einem Stern (*) versehen. Wenn Sie Ihr Verständnis für Termumformungen aber auf einem über den reinen Schulstoff hinaus gehenden Niveau festigen möchten, dann sei Ihnen die gründliche Bearbeitung auch dieser Kapitel empfohlen.

Jedes Kapitel enthält zu Beginn in prägnanter Form die wesentlichen Sachverhalte, die danach ausführlich erläutert und in **Beispielaufgaben** vorgeführt werden. Anschließend werden **Übungsaufgaben** gestellt, deren **Lösungen** im Lösungsteil **in schülergerechter Form** und mit weiteren Hinweisen dargestellt sind.

Das letzte Kapitel enthält für Ihre **Selbstkontrolle** nach der Bearbeitung des Buches in bunter Mischung Aufgaben aus den vorangegangenen Kapiteln.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Festigung Ihrer mathematischen Kompetenzen!

Eberhard Endres

30. Multiplizieren Sie die Terme aus:

a) $(a+2)^3$ b) $(x-4y)^3$
c) $(2x-3y)^3$ d) $(2x-1)^4$
e) $(a-5)^4$ f) $(x+1)^5$

2.3 Faktorisieren

Im Gegensatz zum zuvor besprochenen Ausmultiplizieren, bei dem ein Produkt in eine Summe umgewandelt wird, wird beim Faktorisieren eine Summe in ein Produkt umgewandelt.
Um eine Summe in ein Produkt umzuwandeln, geht man folgendermaßen vor:

1. Zunächst sucht man **gemeinsame Faktoren** und klammert diese aus.
2. Man überprüft, ob eine der **binomischen Formeln** „von rechts nach links“ angewandt werden kann.
3. Man testet, ob der **Satz des Vieta** anwendbar ist.

Regel

> **Satz des Vieta:** Wenn sich der Term x^2+px+q in ein Produkt der Form $(x+a)\cdot(x+b)$ verwandeln lässt, dann muss für a und b gelten:
>
> $\mathbf{a+b=p}$ **und** $\mathbf{a\cdot b=q}$

Dieser Satz kann begründet werden, indem man den Term $(x+a)\cdot(x+b)$ ausmultipliziert:
$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+\mathbf{(a+b)}\cdot x+\mathbf{a\cdot b}$
Anschließend vergleicht man das Ergebnis mit $x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}$ und erhält:
$a+b=p$ und $a\cdot b=q$.

4. Man versucht, die Summanden so zu **gruppieren**, dass in jeder Gruppe nach dem Ausklammern derselbe Term übrig bleibt. Diesen gemeinsamen Term kann man anschließend nochmals ausklammern.
5. Zuletzt gibt es noch das Verfahren der **Polynomdivision**, das in Abschnitt 3.4 erläutert wird.

Beispiele

1. **Gemeinsamer Faktor:** $25r^2s-20rs^2+15r^2s^2=?$
   In allen Summanden lässt sich der Faktor 5rs ausklammern:
   $25r^2s-20rs^2+15r^2s^2=5rs\cdot(5r-4s+3rs)$

2. **Binomische Formel:** $x^2 - 18x + 81 = ?$
Wenn eine binomische Formel verwendet werden kann, dann wegen der drei Summanden und der Vorzeichen nur die 2. binomische Formel.
Durch Vergleich mit $a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{tikzcd} x^2 \arrow[d, leftrightarrow, "a^2 = x^2"'] & -\,18x & +\,81 \arrow[d, leftrightarrow, "b^2 = 81"] \\ a^2 & -\,2ab & +\,b^2 \end{tikzcd}$$

erhält man $x = a$ und $b = 9$ und somit $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$. Die Überprüfung des mittleren Summanden, $-2ab = -2 \cdot x \cdot 9 = -18x$, bestätigt die Korrektheit der Umformung.

3. $25a^4 + 40a^2bc + 16b^2c^2 = ?$
Da hier die Variablen a und b bereits verwendet sind, muss die infrage kommende **1. binomische Formel** in der Form $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ verwendet werden. Vergleich des ersten

$$\begin{tikzcd} 25a^4 \arrow[d, leftrightarrow, "25a^4 = x^2"'] & +\,40a^2bc & +\,16b^2c^2 \arrow[d, leftrightarrow, "16b^2c^2 = y^2"] \\ x^2 & +\,2xy & +\,y^2 \end{tikzcd}$$

und dritten Summanden ergibt hier $25a^4 = x^2$, also $x = 5a^2$ bzw. $16b^2c^2 = y^2$, also $y = 4bc$. Somit erhält man $25a^4 + 40a^2bc + 16b^2c^2 = (5a^2 + 4bc)^2$. Auch hier bestätigt die Überprüfung des mittleren Summanden die Richtigkeit der Umformung: $2xy = 2 \cdot 5a^2 \cdot 4bc = 40a^2bc$.

4. $k^4 - 9z^4 = ?$
Hier kommt nur die **3. binomische Formel** in Betracht. Der Vergleich mit $a^2 - b^2$ liefert $a = k^2$ und $b = 3z^2$ und daher $k^4 - 9z^4 = (k^2 + 3z^2) \cdot (k^2 - 3z^2)$.

5. $r^2 + 3rs + 4s^2 = ?$
Der erste und dritte Summand lassen vermuten, dass durch Vergleich mit der **1. binomischen Formel** aus dem Term $a^2 + 2ab + b^2$ sofort $a = r$ und $b = 2s$ folgt. Leider stimmt aber dann

$$\begin{tikzcd} r^2 \arrow[d, leftrightarrow, "r^2 = a^2"'] & +\,3rs & +\,4s^2 \arrow[d, leftrightarrow, "4s^2 = b^2"] \\ a^2 & +\,2ab & +\,b^2 \end{tikzcd}$$

$2ab = 2 \cdot r \cdot 2s = 4rs$ nicht mit dem vorgegebenen mittleren Summanden 3rs überein. Der Term $r^2 + 3rs + 4s^2$ lässt sich **nicht** in ein Produkt verwandeln (abgesehen von $r^2 + 3rs + 4s^2 = 1 \cdot (r^2 + 3rs + 4s^2)$ oder ähnlichem).

6. **Satz des Vieta:** $x^2 + 7x + 12 = ?$
Dieser Term kann in der Form $(x + a) \cdot (x + b)$ faktorisiert werden. Dabei muss aber $a + b = 7$ und $a \cdot b = 12$ gelten. Dies ist – wenn überhaupt – nur für positive Zahlen a und b möglich. Spielt man die verschiedenen Möglichkeiten für a und b durch, deren Produkt 12 ergibt, und filtert diejenigen Kombinationen heraus, deren Summe auch noch 7 ergibt (siehe Tabelle), dann erhält man $a = 4$ und $b = 3$ (oder umgekehrt) und somit $x^2 + 7x + 12 = (x + 4) \cdot (x + 3)$.

a	b	a + b
1	12	13
2	6	8
3	**4**	**7**
4	**3**	**7**
6	2	8
12	1	13

7. $x^2 - 2x - 15 = ?$
Auch hier muss zur Umwandlung in ein Produkt der Form $(x + a) \cdot (x + b)$ mithilfe des **Satzes von Vieta** gelten: $a + b = -2$ und $a \cdot b = -15$. Ein Faktor muss negativ sein, der andere positiv. Bezeichnet man den positiven Faktor mit a, den negativen Faktor mit b und spielt man wieder die verschiedenen Möglichkeiten für a und b durch (siehe Tabelle), dann erhält man $a = 3$ und $b = -5$ und
somit $x^2 - 2x - 15 = (x + 3) \cdot (x - 5)$.

a	b	a + b
1	–15	–14
3	**–5**	**–2**
5	–3	2
15	–1	14

8. **Geeignete Gruppierung:**
$3 + 4b + 6a + 8ab = \mathbf{3 + 6a} + \mathbf{4b + 8ab}$

$3 + 6a = 3 \cdot (1 + 2a)$
$4b + 8ab = 4b \cdot (1 + 2a)$

$= 3 \cdot \mathbf{(1 + 2a)} + 4b \cdot \mathbf{(1 + 2a)} = (3 + 4b) \cdot (1 + 2a)$

Ausklammern des gemeinsamen Terms $1 + 2a$

Wenn keine der zuvor beschriebenen Faktorisierungen möglich sind, dann ist oft noch ein Test sinnvoll, ob der Term durch eine quadratische Ergänzung vereinfacht werden kann:

Definition

> Unter **quadratischer Ergänzung** versteht man die Addition eines Terms in der Weise, dass dieser sich mithilfe der binomischen Formeln als Quadrat einer Summe oder Differenz schreiben lässt.

Beispiele

1. Der Term $x^2 - 8x$ soll quadratisch ergänzt werden.
Lösung:
Wegen des Minuszeichens muss die 2. binomische Formel verwendet werden.

$$(x - p)^2 = x^2 - \mathbf{2 \cdot p} \cdot x + p^2$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - \mathbf{8} \cdot x$$

In der 2. binomischen Formel steht das mittlere Glied –2px, welches mit $-8x$ verglichen wird. Hieraus entnimmt man durch Vergleich der beiden Zeilen sofort $p = 4$.

$$(x - 4)^2 = x^2 - \mathbf{2 \cdot 4} \cdot x \ \mathbf{+p^2}$$
$$\Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow$$
$$(x - 4)^2 = x^2 - \mathbf{8}x \ \mathbf{+16}$$

Setzt man $p = 4$ in die binomische Formel ein, dann erhält man den gewünschten quadratisch ergänzten Term $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

Der Term $x^2 - 8x$ kann also durch den Summanden **+16** quadratisch ergänzt werden: $x^2 - 8x \mathbf{+ 16} = (x - 4)^2$.

Damit lässt sich der Ausgangsterm auch in der Form $x^2 - 8x = (x-4)^2 \mathbf{-16}$ schreiben. Der Summand 16, der zum Erreichen einer binomischen Formel dazugefügt wurde, muss also sofort wieder subtrahiert werden, damit die Terme äquivalent bleiben.

2. Ergänzen Sie $z^2 + z$ quadratisch:

   Lösung:
   Hier muss die 1. binomische Formel verwendet werden.

$$\begin{array}{rcl} (z+p)^2 & = & z^2 + 2\cdot p\cdot z + p^2 \\ & & \Updownarrow \\ & & z^2 + \quad z \\ (z+\frac{1}{2})^2 & = & z^2 + \quad z \quad \mathbf{+\frac{1}{4}} \end{array}$$

   Vergleich der beiden Zeilen liefert $2pz = z$ und damit $2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$ und durch Quadrieren $p^2 = \frac{1}{4}$.

   Also lässt sich der Ausgangsterm schreiben:
   $z^2 + z = (z+\frac{1}{2})^2 \mathbf{-\frac{1}{4}}$

3. Ergänzen Sie den Term quadratisch: $4u^2 - 7u$

   Lösung:

$$\mathbf{4}u^2 - 7u = 4\cdot\left[\mathbf{u^2 - \frac{7}{4}u}\right]$$

   Faktor 4 ausklammern. Für den Klammerterm liefert die 2. binomische Formel $p = \frac{7}{8}$. $p^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2$ wird addiert und sofort wieder subtrahiert.

$$= 4\cdot\left[\mathbf{u^2 - \frac{7}{4}u + \left(\frac{7}{8}\right)^2} - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right]$$

   2. binomische Formel anwenden

$$= 4\cdot\left[\mathbf{\left(u - \frac{7}{8}\right)^2} - \frac{49}{64}\right]$$

   Eckige Klammern ausmultiplizieren

$$= 4\cdot\left(u - \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{16}$$

Aufgaben

31. Klammern Sie möglichst viel aus:

a) $18ab - 24bc^2$ b) $39r^2xy - 26rx^2y^3 + 52rx^3y$

c) $24a^3b^4 - 36a^4b^3 + 18a^4b^4$ d) $16a\sqrt{b} + 24b\sqrt{a}$

32. Wenden Sie zur Faktorisierung eine binomische Formel an:

a) $x^2 - y^2$ b) $r^2 - 6rs + 9s^2$

c) $4a^2 + 20abc + 25b^2c^2$ d) $x^4 - 10x^2 + 25$

e) $r^6 - 12r^4 + 36r^2$ f) $16a^2b^4 - 25a^4c^2$

33. Prüfen Sie, ob sich eine binomische Formel zur Faktorisierung verwenden lässt. Klammern Sie gegebenenfalls zunächst einen gemeinsamen Faktor aus.

a) $r^2 - rs + 4s^2$ b) $36x^6 - 16x^4$
c) $a^3 - 2a^2b + ab^2$ d) $5r^2s - 30rst + 45st^2$
e) $8a^4b^2 - 48a^3b + 72a^2$ f) $28r^2s^4 - 63t^2$

34. Wenden Sie den Satz des Vieta zur Faktorisierung an. Klammern Sie gegebenenfalls zunächst einen Faktor aus.

a) $x^2 + 3x + 2$ b) $x^2 + 9x + 18$
c) $y^2 + 10y + 9$ d) $u^2 - 3u - 28$
e) $u^4 - u^2 - 20$ f) $z^2 - 14z + 48$
g) $3a^2 - 3a - 36$ h) $6p^2q - 18pq - 60q$

35. Verwandeln Sie die Summe in ein Produkt, indem Sie geeignet gruppieren:

a) $4 + 16x + 9a + 36ax$ b) $12rs - 9st + 16r^2 - 12rt$
c) $1 + x + x^2 + x^3$ d) $14a^2b - 35ab^2 - 6ab^2 + 15b^3$
e) $30a + 40b + 20c + 6ab + 8b^2 + 4bc$

36. Faktorisieren Sie die Terme.

a) $a^2 - 5a - 24$ b) $x^2 + 20x + 100$
c) $25r^2z^4 - 36z^6$ d) $2a^4 - 98$
e) $a^2 + 8ab^2 + 16b^4$ f) $3x^2 - 9xy - 54y^2$
g) $30xy + 3x^2 + 75y^2$ h) $8p^2z - 16pz - 120z$
i) $3x^2 + 9xy + 6y^2$ j) $7r^3 - 28r^2s^2 + 28rs^4$
k) $2p^2 - 28p + 96$ l) $x^6 - 81x^2y^4$

37. Ergänzen Sie den Term quadratisch.

a) $x^2 - 6x$ b) $a^2 + 10a$
c) $r^2 + r$ d) $x^4 - 4x^2$
e) $4a^2 - 4a$ f) $9x^4 - 18x^2$

d) $(2x-1)^4 = (2x-1)^2 \cdot (2x-1)^2 = (4x^2-4x+1)\cdot(4x^2-4x+1)$
$= 16x^4 - 16x^3 + 4x^2 - 16x^3 + 16x^2 - 4x + 4x^2 - 4x + 1$
$= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

e) $(a-5)^4 = (a-5)^2 \cdot (a-5)^2 = (a^2-10a+25)\cdot(a^2-10a+25)$
$= a^4 - 10a^3 + 25a^2 - 10a^3 + 100a^2 - 250a + 25a^2 - 250a + 625$
$= a^4 - 20a^3 + 150a^2 - 500a + 625$

f) $(x+1)^5 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1) = (x^2+2x+1)\cdot(x^2+2x+1)\cdot(x+1)$
$= (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1)\cdot(x+1)$
$= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)\cdot(x+1)$
$= x^5 + x^4 + 4x^4 + 4x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 4x^2 + 4x + x + 1$
$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

31. a) $18ab - 24bc^2 = 6b\cdot(3a-4c^2)$

b) $39r^2xy - 26rx^2y^3 + 52rx^3y = 13rxy\cdot(3r - 2xy^2 + 4x^2)$

c) $24a^3b^4 - 36a^4b^3 + 18a^4b^4 = 6a^3b^3\cdot(4b - 6a + 3ab)$

d) $16a\sqrt{b} + 24b\sqrt{a} = 8\cdot(2a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a})$
Unter Ausnutzung von Wurzelregeln lässt sich der Term auch schreiben als: $16a\sqrt{b} + 24b\sqrt{a} = 8\sqrt{ab}\cdot(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})$ (weil z. B. $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a} = a\cdot\sqrt{b}$)

32. a) $x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$ 3. binomische Formel

b) $r^2 - 6rs + 9s^2 = (r-3s)^2$ 2. binomische Formel

c) $4a^2 + 20abc + 25b^2c^2 = (2a+5bc)^2$ 1. binomische Formel

d) $x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2-5)^2$ 2. binomische Formel

e) $r^6 - 12r^4 + 36r^2 = (r^3 - 6r)^2$ 2. binomische Formel

f) $16a^2b^4 - 25a^4c^2 = (4ab^2 + 5a^2c)\cdot(4ab^2 - 5a^2c)$ 3. binomische Formel

33. a) Auf $r^2 - rs + 4s^2$ lässt sich keine binomische Formel anwenden (der mittlere Summand müsste $-4rs$ sein).

b) $36x^6 - 16x^4 = (6x^3 + 4x^2)\cdot(6x^3 - 4x^2)$ 3. binomische Formel
oder alternativ:
$36x^6 - 16x^4 = 4x^4\cdot(9x^2-4) = 4x^4\cdot(3x-2)\cdot(3x+2)$

c) $a^3-2a^2b+ab^2=a\cdot(a^2-2ab+b^2)=a\cdot(a-b)^2$ 2. binomische Formel

d) $5r^2s-30rst+45st^2=5s\cdot(r^2-6rt+9t^2)=5s\cdot(r-3t)^2$

e) $8a^4b^2-48a^3b+72a^2=8a^2\cdot(a^2b^2-6ab+9)=8a^2\cdot(ab-3)^2$

f) $28r^2s^4-63t^2=7\cdot(4r^2s^4-9t^2)=7\cdot(2rs^2+3t)\cdot(2rs^2-3t)$

34. a) Nach dem Satz von Vieta sind zwei Zahlen zu finden, deren **Summe 3** und deren **Produkt 2** ist. Dies gilt für die Zahlen 1 und 2 ($1+2=3$ und $1\cdot 2=2$), sodass der Term folgendermaßen faktorisiert werden kann: $x^2+3x+2=(x+1)\cdot(x+2)$

b) Zwei Zahlen mit dem **Produkt 18** müssen als **Summe 9** ergeben. Dies gilt für die Zahlen 6 und 3: $x^2+9x+18=(x+3)\cdot(x+6)$

c) **Summe 10**, **Produkt 9** wird mit den Zahlen 1 und 9 möglich: $y^2+10y+9=(y+1)\cdot(y+9)$

d) Eine Zahl muss negativ sein, die andere positiv. Das **Produkt −28** und die **Summe −3** wird erreicht von den Zahlen –7 und 4: $u^2-3u-28=(u-7)\cdot(u+4)$

e) **Summe −1** und **Produkt −20** mit den Zahlen –5 und 4, sodass sich als faktorisierter Term $u^4-u^2-20=(u^2-5)\cdot(u^2+4)$ ergibt.

f) Wegen des positiven Produkts 48 und der negativen Summe sind zwei negative Zahlen zu finden, die das **Produkt 48** und die **Summe −14** ergeben. Dies gilt für -6 und -8, und es folgt: $z^2-14z+48=(z-6)\cdot(z-8)$

g) $3a^2-3a-36=3\cdot(a^2-a-12)$ Nach dem Ausklammern des Faktors 3 findet man die Zahlen -4 und 3, die das **Produkt −12** und die **Summe −1** ergeben. Es folgt: $3a^2-3a-36=3\cdot(a-4)\cdot(a+3)$

h) $6p^2q-18pq-60q=6q\cdot(p^2-3p-10)$ Die **Summe −3** und das **Produkt −10** ist mit den Zahlen –5 und 2 möglich. Also:
$6p^2q-18pq-60q=6q\cdot(p^2-3p-10)=6q\cdot(p-5)\cdot(p+2)$

35. a) $\mathbf{4+16x+9a+36ax}=4\cdot(1+4x)+9a\cdot(1+4x)=(4+9a)\cdot(1+4x)$

b) $\mathbf{12rs-9st+16r^2-12rt}=3s\cdot(4r-3t)+4r\cdot(4r-3t)=(3s+4r)\cdot(4r-3t)$

c) $\mathbf{1+x+x^2+x^3}=1\cdot(1+x)+x^2\cdot(1+x)=(1+x^2)\cdot(1+x)$

MEHR ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Stochastik
Fit für die Oberstufe

STARK

Inhalt

Autorin: Sybille Reimann

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Stochastik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand aus Überlegungen zu Glücksspielen, weil jeder Mensch möglichst oft und viel gewinnen möchte. Derjenige, der über die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses Bescheid weiß, ist klar im Vorteil. Spiele – sei es mit Würfel, Tetraeder oder Glücksrädern – tauchen daher in diesem Buch immer wieder auf, um Ihnen den Stoff, den die **Lehrpläne der Unter- und Mittelstufe** vorgeben, nahezubringen. Spielen Sie mit!

Die Regeln dazu geben Sie selbst vor:
- Sie können das Buch nutzen, um den Stoff der Unter- und Mittelstufe **vor Beginn der Oberstufe** in seiner Gesamtheit zu wiederholen, damit alles wieder „sitzt".
- **Während der Oberstufe** können Sie die Kapitel wiederholen, bei denen Sie Lücken feststellen, die Sie schnell schließen möchten.
- Sie können sich aber auch schon **in den Klassen 5 bis 10** im Buch Hilfe holen, wenn Sie den einen oder anderen Begriff über das Schulbuch hinaus durch ausführlich gerechnete Beispiele oder Übungsaufgaben festigen möchten.

In jedem Kapitel finden Sie:
- **Definitionen** in getönten und **Regeln** in umrandeten Kästen
- **Beispiele** mit kommentierten Lösungen, die Ihnen zeigen, wie Sie an Aufgaben herangehen
- Viele **Übungsaufgaben**, damit Sie Ihr Wissen selbstständig kontrollieren können

Am Ende des Buches können Sie **ausführliche Lösungen** zu allen Übungsaufgaben nachschlagen. Damit können Sie sich selbst überprüfen und Ihren Lernerfolg bestätigt finden.

Viel Spiel-Spaß und viel Erfolg!

Sybille Reimann

Sybille Reimann

1 Zufallsexperiment, Ergebnis, Ergebnismenge

Im (Schul-)Leben treten zwei Arten von Experimenten auf:

- Experimente, bei denen der Versuchsausgang vorhersehbar ist. So weiß man, dass sich eine Feder dehnen wird, sobald man ein Gewicht an sie hängt, auch wenn man die Länge dieser Ausdehnung zunächst nicht vorhersehen kann. Der Versuch wird mit verschiedenen Gewichten (und auch verschiedenen Federn) wiederholt. Stets wird die Länge der Ausdehnung gemessen, die ein bestimmtes Gewicht bei einer bestimmten Feder bewirkt, um aus den Messwerten eine Gesetzmäßigkeit zwischen der Größe des Gewichts und der Länge der Ausdehnung (bei einer bestimmten Feder) ableiten zu können. Bei dieser Feder können dann die Längen der Ausdehnungen auch für andere Gewichtsgrößen berechnet werden.
- Experimente, bei denen zwar vorhersehbar ist, welche Versuchsausgänge möglich sind, man aber nicht vorhersehen kann, welcher von diesen möglichen Versuchsausgängen sich beim nächsten Versuch ergibt. So weiß man, dass beim Werfen eines handelsüblichen Würfels eine der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 geworfen wird. Die sich ergebende Augenzahl ist bei jedem Versuch „zufällig“, sie ist weder vorhersehbar noch berechenbar.
  Derartige Experimente nennt man **Zufallsexperimente**.

In diesem Buch werden ausschließlich Zufallsexperimente betrachtet und näher behandelt.

Definition

Jeden bei einem Zufallsexperiment möglichen Versuchsausgang nennt man ein **Ergebnis ω des Zufallsexperiments**. Die Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man die zugehörige **Ergebnismenge Ω**.

Es gilt also:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots ; \omega_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, wobei jedes mögliche Ergebnis in Ω genau einmal aufgeführt sein muss.

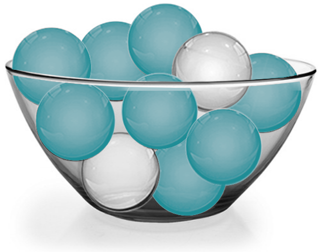
Bei vielen Zufallsexperimenten können – je nach Betrachtungsweise bzw. Sachlage – verschiedene Ergebnismengen angegeben werden. In allen Ergebnismengen muss aber jeder mögliche Versuchsausgang des Zufallsexperiments genau einmal enthalten sein.

Definition

Die Anzahl der Ergebnisse in Ω nennt man die **Mächtigkeit** von Ω, kurz $|\Omega|$.

Beispiele

1. Aus der Schale mit 8 farbigen und 2 weißen Kugeln wird eine Kugel gezogen.
   Geben Sie die Ergebnismenge und ihre Mächtigkeit an.

   Lösung:
   Die Ergebnismenge Ω lautet:
   $\Omega = \{\text{weiß; farbig}\}$
   Mächtigkeit der Ergebnismenge:
   $|\Omega| = 2$

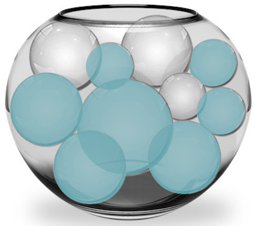
2. Ein Tetraeder, auf dessen vier Seiten sich die Ziffern 1, 2, 3 und 4 befinden, wird geworfen.
   Geben Sie eine mögliche Ergebnismenge an.

   Lösung:
   Mögliche Ergebnismengen lauten:
   $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4\}$
   $\Omega_2 = \{1; \text{nicht } 1\}$
   $\Omega_3 = \{\text{prim; nicht prim}\}$

   Bemerkungen:
   - Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Primzahlen unter 100 sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
     Die Eigenschaft „prim" umfasst daher 2 und 3, „nicht prim" 1 und 4.
   - Die Ergebnismenge Ω_2 könnte bei einem Spiel von Interesse sein.
   - $\{\text{kleiner 2; größer 2}\}$ ist **keine** Ergebnismenge, da 2 als mögliches Ergebnis nicht in der Ergebnismenge enthalten ist.

3. Aus der Schale wird eine Kugel gezogen. Bestimmen Sie ein mögliches Ω.



Lösung:
Auch hier können je nach Betrachtungsweise unterschiedliche Ergebnismengen angegeben werden.
$\Omega_1 = \{\text{weiß; farbig}\}$
$\Omega_2 = \{\text{groß; mittel; klein}\}$
$\Omega_3 = \{\text{groß-farbig; mittel-farbig; klein-farbig; mittel-weiß; klein-weiß}\}$

Bemerkungen:
- Bei Ω_1 ist man nur an der Farbe interessiert.
- Bei Ω_2 ist man nur an der Größe der Kugel interessiert.
- Ω_3 ist hier die **„feinste“** Ergebnismenge.

Definition

Werden mehrere (Anzahl n) Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt oder wird ein Zufallsexperiment mehrmals (n-mal) wiederholt, so lässt sich dies zu einem **mehrstufigen (n-stufigen) Zufallsexperiment** zusammenfassen.
Jedes einzelne Ergebnis eines solchen n-stufigen Zufallsexperiments ist ein **n-Tupel** $(e_1 | e_2 | e_3 | \ldots | e_n)$, bei dem e_i das Ergebnis des i-ten Experiments angibt.

Hinweis: Da es häufig sehr umständlich ist, innerhalb der Ergebnismenge einzelne Tupel wie z. B. $(a|b|d|z)$ zu schreiben, benutzt man meist anstelle eines Tupels die **abkürzende Schreibweise** abdz (das erspart dann die vielen runden Klammern und die Trennstriche bei jedem einzelnen Tupel).

Beispiele

1. Ein Restaurant bietet ein dreigängiges Mittagsmenü an, bei dem der Gast zwischen Tomatensuppe (T) und Nudelsuppe (N), zwischen Schweinsbraten (S), Fischfilet (F) und Gemüseplatte (G) sowie zwischen Eis (E) und Kuchen (K) wählen kann.
Geben Sie eine mögliche Ergebnismenge an.

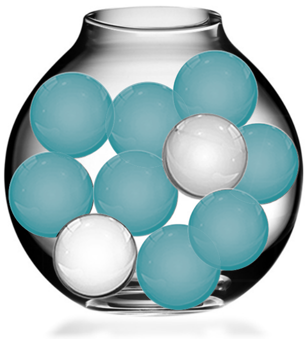
Lösung:
Eine mögliche Wahl wäre hier das 3-Tupel $(T|F|K)$, das sich kürzer als TFK schreiben lässt (siehe Hinweis).

$\Omega = \{\text{TSE; TSK; TFE; TFK; TGE; TGK; NSE; NSK; NFE; NFK; NGE; NGK}\}$

2. Geben Sie eine mögliche Ergebnismenge an, wenn das Tetraeder mit den Seiten 1, 2, 3 und 4 zweimal hintereinander geworfen wird.

   Lösung:
   Hier lassen sich verschiedene Ergebnismengen angeben:
   $\Omega_1 = \{11; 12; 13; 14; 21; 22; 23; 24; 31; 32; 33; 34; 41; 42; 43; 44\}$
   $\Omega_2 = \{\text{Pasch; nicht Pasch}\}$ Beim Pasch erscheint zweimal dieselbe Ziffer.
   $\Omega_3 = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ „Augensumme"

3. Geben Sie die zugehörige Ergebnismenge an, wenn aus der Vase
   a) dreimal **hintereinander** eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen wird.
   b) dreimal **hintereinander** eine Kugel **ohne Zurücklegen** gezogen wird.
   c) drei Kugeln **nicht hintereinander**, sondern **gleichzeitig** gezogen werden.



   Lösung:
   a) Mögliche Ergebnismengen lauten (mit w für weiß und f für farbig):
   $\Omega_1 = \{3\text{ w}; 2\text{ w}; 1\text{ w}; \text{kein w}\}$
   $\Omega_2 = \{\text{www; wwf; wfw; fww; wff; fwf; ffw; fff}\}$
   b) Da nicht zurückgelegt wird, können höchstens zwei weiße Kugeln gezogen werden. Somit lauten mögliche Ergebnismengen:
   $\Omega_1 = \{2\text{ w}; 1\text{ w}; \text{kein w}\}$
   $\Omega_2 = \{\text{wwf; wfw; fww; wff; fwf; ffw; fff}\}$
   c) Das gleichzeitige Ziehen entspricht einem Ziehen ohne Zurücklegen, bei dem es nicht auf die Reihenfolge ankommt, da man einmal in die Vase greift und dann drei Kugeln „ohne Ordnung" in der Hand hält. In der Ergebnismenge können somit höchstens zwei weiße Kugeln vorhanden sein. Eine mögliche Ergebnismenge lautet:
   $\Omega_1 = \{2\text{ w}; 1\text{ w}; \text{kein w}\}$
   Möglich wäre auch $\Omega_2 = \{\text{fww; ffw; fff}\}$, aber **Vorsicht!** Man muss sich im Klaren sein, dass es sich bei dieser Aufzählung nicht um Tupel handelt, die ja eine Reihenfolge implizieren! Es empfiehlt sich eine Anmerkung, z. B. „in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet" o. Ä.

Aufgaben

1. Ein Farbwürfel, von dessen sechs Seiten zwei rot, zwei blau und je eine gelb bzw. weiß gefärbt sind, wird geworfen.
Geben Sie die Ergebnismenge an.

2. Wie lautet die zugehörige Ergebnismenge, wenn der Farbwürfel aus Aufgabe 1 zweimal hintereinander geworfen wird?

3. Aus einem Skatspiel wird eine Karte gezogen und ihre Farbe notiert.

Bestimmen Sie die zugehörige Ergebnismenge.

4. Paul besitzt in seinem Garten zwei Apfelbäume und je einen Birn- und einen Kirschbaum, die er heute nacheinander schneiden will.

a) Geben Sie die Ergebnismenge an.

b) Geben Sie die Ergebnismenge an, wenn Paul seine beiden Apfelbäume nach den Sorten „frühe Ernte“ (F) und „späte Ernte“ (S) unterscheidet.

5. Wie lautet die Ergebnismenge, wenn aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 dreistellige Zahlen gebildet werden, in denen keine Ziffer mehrmals vorkommt?

6. Aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 werden dreistellige Zahlen gebildet, in denen jede Ziffer beliebig oft vorkommen kann.
Ermitteln Sie die Ergebnismenge und ihre Mächtigkeit.

7. Welche Ergebnismenge beschreibt die Auswahl von zwei aus fünf vorgelegten Prüfungsaufgaben A, B, C, D und E?

8. In einem Blumenladen gibt es Tulpen in den Farben gelb, lila, orange, pink, rot und weiß. Es sollen bunte Sträuße gebunden werden, in denen jeweils vier dieser Farben vorkommen. Geben Sie die zugehörige Ergebnismenge an.

Lösungen

1. $\Omega = \{\text{rot; blau; gelb; weiß}\}$
oder mit den entsprechenden Abkürzungen: $\Omega = \{\text{r; b; g; w}\}$

2. $\Omega = \{\text{rr; rb; rg; rw; br; bb; bg; bw; gr; gb; gg; gw; wr; wb; wg; ww}\}$

3. $\Omega = \{\spadesuit; \clubsuit; \heartsuit; \diamondsuit\}$
oder: $\Omega = \{\text{Pik; Kreuz; Herz; Karo}\}$

4. a) $\Omega = \{$AABK; ABAK; ABKA; AAKB; AKAB; AKBA; BAAK; BAKA; BKAA; KAAB; KABA; KBAA$\}$

b) $\Omega = \{$FSBK; FBSK; FBKS; FSKB; FKSB; FKBS; BFSK; BFKS; BKFS; KFSB; KFBS; KBFS;
SFBK; SBFK; SBKF; SFKB; SKFB; SKBF; BSFK; BSKF; BKSF; KSFB; KSBF; KBSF$\}$

5. $\Omega = \{$123; 124; 132; 134; 142; 143; 213; 214; 231; 234; 241; 243; 312; 314; 321; 324; 341; 342; 412; 413; 421; 423; 431; 432$\}$

6. $\Omega = \{$111; 112; 113; 114; 121; 122; 123; 124; 131; 132; 133; 134; 141; 142; 143; 144; 211; 212; 213; 214; 221; 222; 223; 224; 231; 232; 233; 234; 241; 242; 243; 244; 311; 312; 313; 314; 321; 322; 323; 324; 331; 332; 333; 334; 341; 342; 343; 344; 411; 412; 413; 414; 421; 422; 423; 424; 431; 432; 433; 434; 441; 442; 443; 444$\}$

$|\Omega| = 64$

7. $\Omega = \{$AB; AC; AD; AE; BC; BD; BE; CD; CE; DE$\}$

Anmerkung: Die ausgewählten Aufgaben sind hier in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet, obwohl die Reihenfolge bei der Auswahl unerheblich ist.

8. $\Omega = \{$glop; glor; glow; glpr; glpw; glrw; gopr; gopw; gorw; gprw; lopr; lopw; lorw; lprw; oprw$\}$

Anmerkung: Die ausgewählten Farben sind hier in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet, obwohl die Reihenfolge bei der Auswahl unerheblich ist.