

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |    |
|----------|---|----|
| <b>1</b> | <b>Prolog</b> . . . . .   | 1  |
| 1.1      | Um was geht es? . . . . .                                       | 1  |
| 1.2      | Das Black-Scholes Modell . . . . .                              | 5  |
| 1.3      | Defekte des Black-Scholes Modells . . . . .                     | 12 |
| 1.4      | Eine erste Modellerweiterung: das CEV Modell . . . . .          | 20 |
| 1.5      | Modell-Kalibrierung . . . . .                                   | 22 |
| 1.6      | Aufgaben . . . . .  | 30 |
|          | Literatur . . . . .   | 31 |
| <b>2</b> | <b>Binomialbäume</b> . . . . .                                  | 33 |
| 2.1      | Modell des Basiswertes . . . . .                                | 33 |
| 2.2      | Bewerten von Optionen . . . . .                                 | 38 |
| 2.3      | Implementation I . . . . .                                      | 44 |
| 2.4      | Implementation II . . . . .                                     | 50 |
| 2.5      | Der Optionspreis als Erwartungswert . . . . .                   | 55 |
| 2.6      | Amerikanische Optionen . . . . .                                | 58 |
| 2.7      | Trinomialbäume . . . . .  | 63 |
| 2.8      | Anwendung: Barriere-Option . . . . .                            | 65 |
| 2.9      | Aufgaben . . . . .  | 72 |
|          | Literatur . . . . .   | 73 |
| <b>3</b> | <b>Die Black-Scholes Gleichung</b> . . . . .                    | 75 |
| 3.1      | Taylorpolynome und Taylorreihe . . . . .                        | 76 |
| 3.2      | Herleitung der Black-Scholes Gleichung . . . . .                | 78 |
| 3.3      | Die „Griechen“ . . . . .  | 84 |
| 3.4      | Erwartungswerte und partielle Differentialgleichungen . . . . . | 87 |
| 3.5      | Kolmogorov Gleichungen . . . . .                                | 90 |
| 3.6      | Aufgaben . . . . .  | 91 |
|          | Literatur . . . . .   | 94 |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| <b>4</b> | <b>Gewöhnliche Differentialgleichungen und ihre Approximation mit finiten Differenzen</b>  | 95  |
| 4.1      | Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten               | 96  |
| 4.2      | Approximation mit finiten Differenzen  | 98  |
| 4.3      | Nicht-konstante Koeffizienten  | 116 |
| 4.4      | Aufgaben   | 119 |
| <b>5</b> | <b>Parabolische Differentialgleichungen und ihre Approximation mit finiten Differenzen</b> | 123 |
| 5.1      | Lokalisierung  | 124 |
| 5.2      | Das $\theta$ -Verfahren  | 125 |
| 5.3      | Ein volldiskretes Verfahren  | 138 |
| 5.4      | Stabilität und Konvergenz  | 143 |
| 5.5      | Das Rannacher-Verfahren  | 154 |
| 5.6      | Nochmals Fehler messen   | 157 |
| 5.7      | Anwendung: Barriere-Option   | 160 |
| 5.8      | Basiswert nicht logarithmiert  | 162 |
| 5.9      | Anwendung: Kolmogorov Vorwärtsgleichung  | 166 |
| 5.10     | Aufgaben   | 171 |
|          | Literatur  | 173 |
| <b>6</b> | <b>Erweiterungen</b>   | 175 |
| 6.1      | Inhomogene Randdaten   | 175 |
| 6.2      | Mehr zu Randdaten  | 190 |
| 6.3      | Diskrete Dividenden  | 194 |
| 6.4      | Barriere-Optionen mit diskreter Barriere-Beobachtung                                       | 199 |
| 6.5      | Zeitabhängige Koeffizienten  | 205 |
| 6.5.1    | Anwendung: Barriere Optionen im CEV Modell mit zeitabhängigen Koeffizienten                | 210 |
| 6.5.2    | Anwendung: Asiatische Optionen   | 211 |
| 6.6      | Berechnung der Griechen  | 218 |
| 6.6.1    | Anwendung: Kalibrierung des CEV Modells  | 226 |
| 6.7      | Aufgaben   | 231 |
|          | Literatur  | 234 |
| <b>7</b> | <b>Amerikanische Optionen</b>  | 235 |
| 7.1      | Lineare Komplementaritätsprobleme  | 235 |
| 7.2      | Diskrete Dividenden  | 249 |
| 7.3      | Bermuda Optionen   | 256 |
| 7.4      | Aufgaben   | 258 |
|          | Literatur  | 259 |

---

|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| <b>8</b>  | <b>Modell-Kalibrierung</b> . . . . .                                | 261 |
| 8.1       | Die Cos-Methode . . . . .   | 262 |
| 8.2       | Bestimmung der charakteristische Funktion: Affine Modelle . . . . . | 270 |
| 8.3       | Aufgaben . . . . .  | 273 |
|           | Literatur . . . . .   | 274 |
| <b>9</b>  | <b>Sprungmodelle</b> . . . . .                                      | 275 |
| 9.1       | Poisson- und zusammengesetzter Poisson Prozess . . . . .            | 276 |
| 9.2       | Derivate in Sprung-Diffusionsmodellen . . . . .                     | 282 |
| 9.3       | Implementierung des Sprungteils . . . . .                           | 288 |
| 9.4       | Randbedingungen . . . . .   | 291 |
| 9.5       | Lösung via FFT . . . . .  | 301 |
| 9.6       | Reine Sprung-Modelle: Ein Beispiel . . . . .                        | 308 |
| 9.7       | Kalibrierung . . . . .  | 316 |
| 9.8       | Aufgaben . . . . .  | 319 |
|           | Literatur . . . . .   | 323 |
| <b>10</b> | <b>Probleme mit mehreren Variablen</b> . . . . .                    | 325 |
| 10.1      | Das Fundamentalprinzip erweitert . . . . .                          | 325 |
| 10.2      | Optionen auf mehrere Basiswerte . . . . .                           | 330 |
| 10.3      | Das Verfahren von Craig und Sneyd . . . . .                         | 345 |
| 10.4      | Asiatische Optionen . . . . .                                       | 353 |
| 10.5      | Cliquet Optionen . . . . .  | 359 |
| 10.6      | Lookback Optionen . . . . .   | 365 |
| 10.7      | Stochastische Volatilität . . . . .                                 | 377 |
| 10.7.1    | Das Heston Modell . . . . .   | 377 |
| 10.7.2    | Das Heston Modell mit stochastischer Korrelation . . . . .          | 382 |
| 10.7.3    | Das Bates Modell . . . . .  | 387 |
| 10.7.4    | Das SABR Modell . . . . .   | 392 |
| 10.7.5    | Das 2-Faktor Bergomi Modell . . . . .                               | 393 |
| 10.7.6    | Kalibrierung . . . . .  | 402 |
| 10.8      | Aufgaben . . . . .  | 411 |
|           | Literatur . . . . .   | 415 |
| <b>11</b> | <b>Anwendung: Pricing von strukturierten Produkten</b> . . . . .    | 417 |
| 11.1      | Kapitalschutzprodukte . . . . .                                     | 420 |
| 11.1.1    | Kapitalschutzprodukte ohne Cap . . . . .                            | 421 |
| 11.1.2    | Kapitalschutzprodukt mit Asiatischer Optionskomponente . . . . .    | 421 |
| 11.1.3    | Kapitalschutzprodukt mit Cliquet-Komponente . . . . .               | 424 |
| 11.1.4    | Kapitalschutzprodukte auf mehrere Basiswerte . . . . .              | 426 |

|   |            |
|---|------------|
| 11.2 Renditeoptimierungsprodukte . . . . .                        | 429        |
| 11.2.1 Barrier Reverse Convertibles auf einen Basiswert . . . . . | 429        |
| 11.2.2 Multi Barrier Reverse Convertibles . . . . .               | 438        |
| 11.2.3 Autocallable Barrier Reverse Convertibles . . . . .        | 440        |
| 11.2.4 Callable Barrier Reverse Convertibles . . . . .            | 446        |
| 11.2.5 Express Zertifikate . . . . .                              | 450        |
| 11.3 Bonuszertifikate . . . . .                                   | 452        |
| 11.3.1 Bonuszertifikate auf einen Basiswert . . . . .             | 453        |
| 11.3.2 Bonuszertifikat mit Lookback . . . . .                     | 457        |
| 11.3.3 Bonuszertifikate auf mehrere Basiswerte . . . . .          | 462        |
| 11.4 Exit Wahrscheinlichkeit . . . . .                            | 466        |
| 11.5 Aufgaben . . . . .   | 468        |
| Literatur . . . . .   | 470        |
| <b>12 Zinsmodelle und Zinsderivate . . . . .</b>                  | <b>471</b> |
| 12.1 Formen von Zinsen . . . . .                                  | 471        |
| 12.2 Short rate Modelle . . . . .                                 | 480        |
| 12.2.1 Zeit-inhomogene Modelle . . . . .                          | 483        |
| 12.3 Anwendungen . . . . .  | 491        |
| 12.4 Zinsderivate . . . . .                                       | 499        |
| 12.5 Aufgaben . . . . .   | 508        |
| Literatur . . . . .   | 511        |
| <b>13 Kreditrisiko . . . . .</b>                                  | <b>513</b> |
| 13.1 Credit Default Swap . . . . .                                | 514        |
| 13.2 Struktur-Modelle . . . . .                                   | 517        |
| 13.3 Intensitäts-Modelle . . . . .                                | 529        |
| 13.4 Aufgaben . . . . .   | 534        |
| Literatur . . . . .   | 535        |
| <b>14 Verfahren höherer Ordnung . . . . .</b>                     | <b>537</b> |
| 14.1 Finite Differenzen vierter Ordnung . . . . .                 | 538        |
| 14.2 Padé Approximation . . . . .                                 | 560        |
| 14.3 Anwendung . . . . .  | 569        |
| 14.4 Kompakte finite Differenzen vierter Ordnung . . . . .        | 580        |
| 14.5 Aufgaben . . . . .   | 589        |
| Literatur . . . . .   | 590        |
| <b>15 Epilog . . . . .</b>  | <b>591</b> |
| 15.1 Lokale Volatilität, LV-Modelle . . . . .                     | 591        |
| 15.2 Anwendungen . . . . .  | 609        |
| 15.2.1 Bewertung von Varianz-Swaps . . . . .                      | 609        |
| 15.2.2 Modellabhängiger Optionspreis . . . . .                    | 611        |

|   |            |
|---|------------|
| 15.3 Lokale- und stochastische Volatilität, LSV-Modell . . . . .  | 614        |
| 15.4 Pfadabhängige Volatilität . . . . .  | 626        |
| 15.5 Aufgaben . . . . .   | 630        |
| Literatur . . . . .   | 631        |
| <b>A Kurze Einführung in Python</b> . . . . .   | <b>633</b> |
| A.1 Matrizenrechnung . . . . .  | 633        |
| A.1.1 Definition und Eingabe . . . . .  | 634        |
| A.1.2 Grundlegende Operationen . . . . .  | 636        |
| A.1.3 Weiterführende Operationen . . . . .  | 642        |
| A.1.4 Definieren von Matrizen, der Befehl „spdiags“ . . . . .   | 651        |
| A.2 Funktionen und deren graphische Darstellung . . . . .   | 655        |
| A.2.1 Funktionen via <code>lambda</code> . . . . .  | 656        |
| A.2.2 Funktion als <code>py</code> -File . . . . .  | 663        |
| <b>B Technisches</b> . . . . .  | <b>665</b> |
| B.1 Spline-Interpolation . . . . .  | 665        |
| B.2 Erwartungswert und Varianz einer <code>gBB</code> . . . . .   | 670        |
| B.3 Die Black-Scholes Formel . . . . .  | 672        |
| B.4 Die Norm $\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\ _{\infty}$ ausrechnen . . . . .                                | 675        |
| B.5 Das Differentialgleichungssystem $\mathbf{w}'(t) + \mathbf{A}\mathbf{w}(t) = \mathbf{f}(t)$ . . . . . | 677        |
| B.6 Gleichungen mit nicht-negativer Charakteristik . . . . .  | 680        |
| B.7 Fourier-Cosinus Reihen . . . . .  | 685        |
| B.8 Die Trapezregel . . . . .   | 692        |
| B.9 Simulation einer $d$ -dimensionalen geometrischen Brown'schen<br>Bewegung . . . . .                   | 694        |
| B.10 Das stochastische Exponential . . . . .  | 697        |
| B.11 Partialbruchzerlegungen zum Rannacher-Verfahren . . . . .  | 701        |
| B.12 Lokale Volatilität vs implizite Volatilität . . . . .  | 705        |
| B.13 Kalender-Spread Arbitrage . . . . .  | 707        |
| <b>C Lösungen zu den Aufgaben</b> . . . . .   | <b>711</b> |
| C.1 Aufgaben im Kap. 1 . . . . .  | 711        |
| C.2 Aufgaben im Kap. 2 . . . . .  | 713        |
| C.3 Aufgaben im Kap. 3 . . . . .  | 720        |
| C.4 Aufgaben im Kap. 4 . . . . .  | 727        |
| C.5 Aufgaben im Kap. 5 . . . . .  | 733        |
| C.6 Aufgaben im Kap. 6 . . . . .  | 739        |
| C.7 Aufgaben im Kap. 7 . . . . .  | 750        |
| C.8 Aufgaben im Kap. 8 . . . . .  | 755        |
| C.9 Aufgaben im Kap. 9 . . . . .  | 760        |
| C.10 Aufgaben im Kap. 10 . . . . .  | 770        |

---

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| C.11 Aufgaben im Kap. 11 . . . . .    | 783        |
| C.12 Aufgaben im Kap. 12 . . . . .    | 790        |
| C.13 Aufgaben im Kap. 13 . . . . .    | 805        |
| C.14 Aufgaben im Kap. 14 . . . . .    | 810        |
| C.15 Aufgaben im Kap. 15 . . . . .    | 818        |
| <b>Literatur</b> . . . . .            | <b>823</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . . | <b>825</b> |