Ott
Lengersdorf

Abitur 2021 | *Leistungskurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
– Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung –

Nordrhein-Westfalen

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

* * * * *

13. Auflage 2020

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0447-13
ISBN 978-3-8120-1050-4

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält nur auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2021 im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung.

Die Aufgaben behandeln nur Themen, die in den Abiturvorgaben 2021 für den Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind.

Die zentrale Abiturprüfung 2021 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR bzw. CAS)

Die Aufgaben für den Leistungskurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.

Dem pandemiebedingten Distanzlernen wird Rechnung getragen durch eine Fokussierung auf inhaltliche Schwerpunkte für die schriftliche Abiturprüfung für das Abitur 2021.

Die Analysis behandelt im Abitur 2021 als Schwerpunkt (fokussiert) ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mithilfe dieser Funktionstypen: Marktpreistheorie, Konsumenten- und Produzentenrente, Modelle der vollständigen Konkurrenz und des Angebotsmonopols, Absatz- und Umsatzentwicklung.

Die Lineare Algebra hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme, Stochastische Matrizen und Lineare Optimierungsprobleme. Innerbetriebliche Verflechtungen und mehrstufige Produktionsprozesse sollen nicht im Fokus stehen.

Schwerpunkt in der Stochastik ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung und einseitige Hypothesentests in ökonomischen Anwendungen.

Über die in den fokussierten Vorgaben hinaus werden auch die nicht mit Stern gekennzeichneten Inhalte in den Aufgaben behandelt.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Schriftlichen Abiturprüfung 2021

Leistungskurs

Aufgaben-teil	Aufgabentyp	Aufgaben-zahl	Dauer	Punkte
Teil A	Der Aufgabenteil A besteht aus einer Aufgabe mit vier Teilaufgaben, zwei zur Analysisund je eine zur Linearen Algebra und Stochastik. Mindestens zwei der Teilaufgaben sind mit Anwendungsbezug.	1	max. 60 Minuten	24
Teil B	Der Aufgabensatz B umfasst eine Aufgabe zur Analysis, eine Aufgabe zur Linearen Algebra und eine Aufgabe zur Stochastik . Die Aufgabenstellung des Aufgabenteils B ist entweder zur Lösung mit graphikfähigen Taschenrechnern (GTR) oder mit einem Computeralgebrasystem (CAS) konzipiert.	3	min. 210 Minuten	96
	Darstellungsleistung Teil A und B			5
Summe		4	270 Minuten	125

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhalten die Prüflinge die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel gemäß Punkt 5 werden noch nicht ausgegeben.

Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung, jedoch nach spätestens 60 Minuten der Bearbeitungszeit, ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den gemäß Punkt 5 zugelassenen Hilfsmitteln (GTR oder CAS; Formelsammlung).

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Leistungskurs 270 Minuten.

Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

Operatoren und Dokumentation von Lösungen

1 Allgemeine Bemerkungen zu den Aufgabenstellungen

Der Prüfling wird nicht zur Nutzung einer bestimmten Technologie aufgefordert, da das Erkennen der Sinnhaftigkeit des Einsatzes des Taschenrechners eine selbstständige Leistung ist. Die Vorgehensweise und Darstellung der Lösung muss unabhängig von der gewählten Technik nachvollziehbar dokumentiert werden.
Der Schüler hat zu verdeutlichen, wie er mit welchen Eingaben mit der genutzten Technik zu welchen Ergebnissen gelangt ist. Die Dokumentation erfolgt immer mit mathematischen Regeln unter Nutzung der Fachsprache.

2 Beispiele zu einigen der häufig genutzten Operatoren

2.1

Operator	Beschreibung
Angeben, Nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen bzw. Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen

Erläuterungen: Der Prozess der Ergebnisermittlung bleibt gegebenenfalls im Dunkeln-somit auch die Wahl des Hilfsmittels. „Angeben /Nennen“ erfordert Einsicht in den Sachzusammenhang oder den mathematischen Zusammenhang.

Beispiel: ...und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont:

Kostenfunktion z.B. mit c = 12: $K(x) = \frac{1}{400}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 12x + 200$

2.2

Operator	Beschreibung
Erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen

Erläuterungen: Beispielsweise kann zur Problemlösung ein Sachzusammenhang durch zusätzlich hergeleitete Informationen mit eigenen Worten dargelegt werden oder aber auch ein Vorgehen verständlich beschrieben werden.

Beispiel:

Erläutern Sie anhand der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze, ob die Rasolux GmbH einen Preis von 700GE/ME unterbieten kann.

(Abitur 2017 GK Analysis 2.2.1)

Erwartungshorizont:

kPUG: Minimierung der variablen Stückkosten $k_v(x) = 10x^2 - 240x + 1920$

Notwendige und hinreichende Bedingung bei quadratischen Funktionen mit positivem Leitkoeffizient: $k'_v(x) = 0$ $\quad 20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ $\quad$ kPUG: $k_v(12) = 480$ (GE/ME)

LPUG: Minimierung der Stückkosten $k(x) = 10x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Darstellung des Graphen im Intervall von 0 bis 20 liefert den Tiefpunkt $(14 \mid 1080)$

LPUG 1080 GE/ME. Ein Preis von 700GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

2.3

Operator	Beschreibung
Berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen

Erläuterungen: Der Ansatz, der auf der symbolischen Ebenen zur Lösung führt, ist zu dokumentieren. Der sich anschließende Lösungsweg muss unter Beibehaltung mathematischer Regeln nachvollziehbar dargestellt werden. Wenn ein GTR/CAS für einen Lösungsschritt verwendet wird, ist der Ansatz und der logische Schritt zu dokumentieren.

Beispiel: Berechnen Sie den maximalen Gewinn (Abitur 2017 LK GTR, Analysis 2.2.1.2)

Erwartungshorizont

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

2.4

Operator	Beschreibung
Bestimmen, Ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren.

Erläuterungen: Die Wahl der Mittel (z.B. ob graphisch oder numerisch) bleibt offen. Durch Spezifizierung wie „Ermitteln Sie graphisch“ oder „Bestimmen Sie rechnerisch“ würde die Verwendung der Werkzeugebene des GTR bzw. CAS beschränkt.
Beim graphischen ermitteln von Lösungen kann dies durch Anfertigung einer Zeichnung auf Papier oder durch Darlegung der Lösungsschritte beim graphischen Lösen mit GTR bzw. CAS erfolgen.

Beispiel: Gehen Sie davon aus, dass gilt: $a = \frac{1}{225}c - \frac{23}{450}$ und $b = -30a$

Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist ... . (Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont

Mit $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$ ist folgende Ungleichung zu lösen: $(\frac{23}{15} - \frac{2}{15}c)^2 \leq 3(\frac{1}{225}c - \frac{23}{450}) \cdot c$

Lösung mit CAS: $11{,}5 \leq c \leq 46$

(Die Erläuterungen zu den Operatoren sind der Rückkopplungsveranstaltung zum Zentralabitur 2017 entnommen, Qualitäts-und Unterstützungs-Agentur-Landesinstitut für Schule NRW)

Analysis **Lösungen Seite 29/30** **Punkte**

Aufgabe 24

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 6x - 2$.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' .

(1) Berechnen Sie die beiden Stellen x_1 und x_2, an denen die erste Ableitung f' den Wert Null besitzt.

(2) Geben Sie an, ob an der Stelle x_1 ein lokaler Hoch- oder ein lokaler Tiefpunkt des Graphen von f vorliegt, und begründen Sie Ihre Angabe mit Hilfe der Abbildung 1. 6

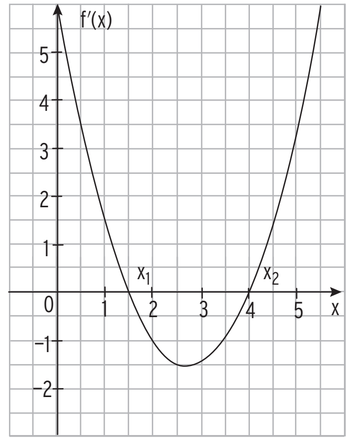


Abbildung 1

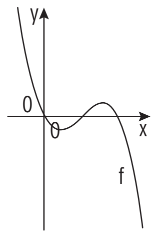
Aufgabe 25

Gegeben ist die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 6x + 72 = 0$

Zeigen Sie: $x_1 = 4$ ist eine Lösung. Bestimmen Sie alle Lösungen.

Aufgabe 26

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung zeigt ihren Graphen von f, der bei x = 1 den Wendepunkt W hat.

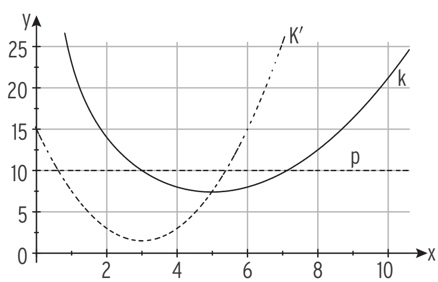


a) Zeigen Sie, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt W die Steigung 1 hat. 2

b) Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung m, die durch W verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Graphen von fin Abhängigkeit von m an. 3

Aufgabe 27

Die Unternehmensführung geht von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K 3. Grades aus. Die Abbildung zeigt den Graph der Grenzkostenfunktion K′, den Graph der Stückkostenfunktion k und den Graph der Preisfunktion p.
Prüfen Sie die folgenden Aussagen auf Richtigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung.



1 Der Graph von K besitzt eine Wendestelle in x = 3.

2 Je größer die produzierte Stückzahl, desto geringer sind die Stückkosten.

3 Die Schnittstelle von Preisgerade und Grenzkostenkurve ist die betriebsoptimale Stückzahl.

Lösungen - Analysis

Aufgabe 24

(Aufgaben Seite 19)

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 6x - 2$; $f'(x) = x^2 - 5{,}5x + 6$

Setze $f'(x) = 0$ $\quad x^2 - 5{,}5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1|2} = \frac{5{,}5 \pm \sqrt{5{,}5^2 - 24}}{2}$

$x_{1|2} = \frac{5{,}5 \pm 2{,}5}{2}$

Man erhält $x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = 4$.

Hinweis: Ein bloßes Ablesen der Nullstellen genügt wegen des Operators „Berechnen Sie“ nicht.

(2) In der Abbildung 1 erkennt man an der ersten Nullstelle einen +/− - Vorzeichenwechsel der Ableitungswerte $f'(x)$. Das bedeutet, dass der Graph der Ausgangsfunktion f erst steigt und dann sinkt. Daher liegt an der Stelle $x = 1{,}5$ ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 25

$x^3 - 10x^2 + 6x + 72 = 0$

Einsetzen ergibt eine wahre Aussage; $x_1 = 4$ ist eine Lösung:

Polynomdivision mit $(x - 4)$: $(x^3 - 10x^2 + 6x + 72) : (x - 4) = x^2 - 6x - 18$

Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x - 18 = 0$: $x_{2|3} = \frac{6 \pm \sqrt{108}}{2} = 3 \pm \sqrt{27}$

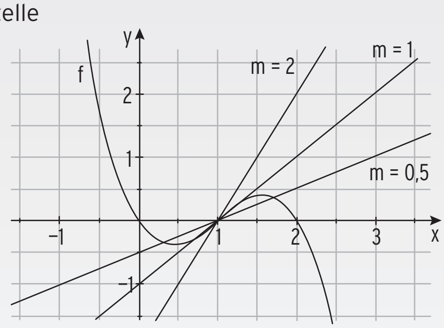
Lösungen der Gleichung: $x_1 = 4$; $x_{2|3} = 3 \pm \sqrt{27}$

Aufgabe 26

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$; $x = 1$ ist Wendestelle

a) $f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$; $f'(1) = -3 + 6 - 2 = 1$
Die Tangente an G_f im Punkt W hat die Steigung 1.

b) Geraden mit positiver Steigung m durch W
Anzahl der Schnittpunkte: 3 für $0 < m < 1$
1 für $m \geq 1$



Aufgabe 27

1 Die Aussage ist richtig, da das Grenzkostenminimum etwa in x = 3 liegt.
Damit ist $K''(3) = 0$; die notwendige Bedingung für Wendestelle ist erfüllt.

2 Die Aussage ist falsch, denn ab dem Betriebsoptimum (Stückkostenminimum) steigen die Stückkosten wieder an.

Lösungen - Analysis

Aufgabe 27 (Aufgabe Seite 19)

3 Die Aussage ist falsch, da die betriebsoptimale Stückzahl x_{BO} die Schnittstelle der Grenzkosten- und der Stückkostenfunktion ist.

Oder: x_{BO} ist die Minimalstelle von k(x) ($k(x_{BO})$ langfristige Preisuntergrenze)

Die Grenzkostenkurve schneidet die Stückkostenkurve in deren Tiefpunkt.

Aufgabe 28 (Aufgaben Seite 20)

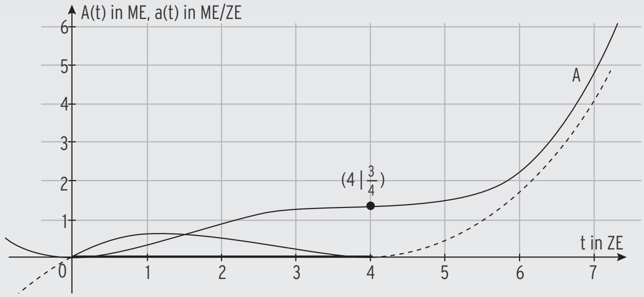
a) Skizze des Graphen der Absatzfunktion a und Kennzeichnung des $D_{ök}$

Hinweise: $A'(t) = a(t)$

$A'(4) = 0$; $A'(0) = 0$

a wird maximal auf

$D_{ök} = [0; 4]$



b) Ergänzen $D_{ök}$:

siehe markierter Abschnitt auf der Abszissenachse; $D_{ök} = [0; 4]$

c) Bestimmung der Funktionsgleichung der Gesamtabsatzfunktion A

$a_b(t) = \frac{1}{16}t^3 - bt^2 + t$ mit Stammfunktion: $A_b(t) = \frac{1}{64}t^4 - \frac{b}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$ mit C = 0

da die Gesamtabsatzfunktion im Ursprung startet

Punkt $S(4 \mid \frac{4}{3})$ einsetzen in $A_b(t) = \frac{1}{64}t^4 - \frac{b}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$: $\frac{4}{3} = \frac{1}{64}4^4 - \frac{b}{3}4^3 + \frac{1}{2}4^2$

Mit $4^2 = 16$; $4^3 = 64$ $\frac{4}{3} = 4 - \frac{64b}{3} + 8 \Leftrightarrow \frac{64b}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

$A(t) = \frac{1}{64}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2$ Hinweis: S ist ein Sattelpunkt.

Aufgabe 29

a) Extrempunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Wegen $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat der Graph von f keinen Extrempunkt.

b) Wendepunkt: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ oder $f''(x_1) = 0$ und $f''(x)$ ändert das Vorzeichen in x_1.

Mit der Kettenregel: $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

An der Stelle, an der g ein Maximum annimmt, ändert sich das Vorzeichen von $g'(x)$.

Wegen $e^{g(x)} > 0$ ändert sich damit an dieser Stelle auch das Vorzeichen von $f''(x)$,

d. h. der Graph von f hat einen Wendepunkt.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Lineare Algebra

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 39** **Punkte**

Die nebenstehende Tabelle gibt die Materialverflechtung in einem zweistufigen Produktionsprozess an, in dem aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und anschließend Endprodukte E_1 und E_2 entstehen

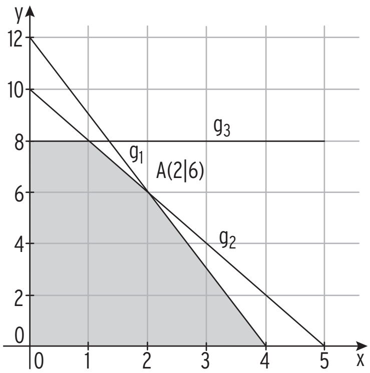
			E_1	E_2
		Z_1	4	b
	Z_1	Z_2	1	3
R_1	1	0	4	2
R_2	3	1	c	9
R_3	2	a	12	16

1.1 Zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm der ersten und zweiten Stufe. 3

1.2 Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a, b und c. 3

Aufgabe 2

Das nebenstehende Schaubild zeigt die graphische Lösung (Lösungspolygon) eines Ungleichungssystems, mit dem der Gewinn optimiert werden soll. Mit dem Produkt zu y werden 100 GE Gewinn gemacht.



2.1 Die Nichtnegativitätsbedingungen gelten.
Geben Sie die drei Ungleichungen an, die das Lösungspolygon festlegen. 3

2.2 Ermitteln Sie eine mögliche Zielfunktion G, so dass es genau eine maximale Lösung in A(2 | 6) gibt, und den zu G gehörigen maximalen Gewinn. 3

Aufgabe 3

Ein Fixvektor $\vec{v}$ einer Matrix M ist ein Vektor, für den gilt: $\vec{v} \cdot M = \vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$.

a) Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass für die Matrix $N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & a & b \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

und den Vektor $\vec{w} = (100 \;\; 70 \;\; 30)$ die Bedingungen I und II gelten.

I Der Vektor $\vec{w}$ ist ein Fixvektor der Matrix N.

II Die quadratische Matrix N ist stochastisch, d.h. alle Elemente sind nichtnegative reelle Zahlen und die Zeilensummen sind jeweils gleich 1. 3

b) Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$ sind Fixvektoren einer Matrix L.

Zeigen Sie, dass auch der Vektor $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ ein Fixvektor von L ist. 3

II Teil II der zentralen Abiturprüfung mit Hilfsmittel (GTR)

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Kostenfunktionen x: Ausbringungsmenge in ME y: Gesamtkosten in GE	Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
	Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax3 + bx2 + cx + d$
	K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
	K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
	Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
	Funktion der gesamten Stückkosten k (Funktion der Durchschnittskosten)	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
	Funktion der variablen Stückkosten k_v	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
	Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
	Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
	Betriebsoptimum (Minimalstelle von k(x))	x_{BO}
	Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
	Betriebsminimum (Minimalstelle von $k_v(x)$)	x_{BM}
	kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
	Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
	Angebotsfunktion	$p_A(x)$
	Gleichgewichtsmenge	x_G; Schnittstelle von $p_N(x)$ und $p_A(x)$
	Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
	Marktgleichgewicht MG	$MG\ (x_G \mid p_G)$
	Konsumentenrente Differenz zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlichen Ausgaben für ein Produkt.	$\int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx$
	Produzentenrente Differenz aus erzieltem Umsatz und mindestens erwartetem Umsatz.	$\int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$
	Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$; $p_N(x)$ Preis abhängig von x
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
	Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
	Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
	Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
	gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x): $G'(x) = 0$	x_{max}
	Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
	Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p(x) - k_v(x)$
	Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_{fix} = E(x) - K_v(x)$

Formelsammlung Analysis

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Menge der reellen Zahlen ohne Null

$\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen mit Null

Ableitungsregeln

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)$

Kurzform: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Kurzform: $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel: $f(x) = g(u(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

für Exponentialfunktion $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

Integrationsregeln:

Integration durch Substitution

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c;\ a \neq 0$$

Produktintegration (partielle Integration)

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Analysis

Aufgabe 1 **Lösung Seite 76** **Punkte**

Der Pharmakonzern Harma AG stellt schmerzlindernde Präparate als klassische Tablette, Brausetablette, Granulat oder Kautablette her. Diese werden in drei Produktionsabteilungen gefertigt. Regelmäßig führt die Marketingabteilung der Harma AG verschiedenartige Marktanalysen durch.

1.1 Die Analyse für das Produkt Niap free ergibt, dass sich die Angebotspreise auf dem Markt durch die Funktion p_A darstellen lassen und die Nachfragesituation durch p_N beschrieben werden kann.

$p_A(x) = 0{,}1(x + 2)^2 + 5$; $p_N(x) = 12 - a \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, $a > 0$.

Dabei gibt x die angebotenen bzw. die nachgefragten Mengen in ME an und $p_A(x)$ bzw. $p_N(x)$ geben die Preise in GE pro ME an. Bei dem Parameter a handelt es sich um einen konjunkturabhängigen Parameter.

1.1.1 Geben Sie die Sättigungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter a an. 4

1.1.2 Berechnen Sie den Wert des Parameters a, für den die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt. 5

1.1.3 Die Marketingabteilung behauptet: „Wenn a = 0,15 ist und die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt, dann ist das Verhältnis zwischen der Konsumentenrente und der Produzentenrente ausgeglichen, also 1 : 1." Beurteilen Sie diese Aussage unter Verwendung entsprechender Stammfunktionen. 8

1.1.4 Die Preise für das Standardschmerzmittel Niap free sind innerhalb der europäischen Gemeinschaft sehr unterschiedlich. Aus diesem Grund will die EU für dieses Präparat einen einheitlichen Preis festlegen. Zurzeit liegt der Gleichgewichtspreis über dem zukünftig festgesetzten Preis.
Interpretieren Sie, wie sich dies auf die Produzentenrente auswirkt. 4

1.2 Neben diesem Standardschmerzmittel Niap free werden ständig neue rezeptfreie schmerzlindernde Präparate in verschiedenen Varianten entwickelt. Für den Produktlebenszyklus des neu entwickelten Schmerzmittels Niap vita geht die Marketingabteilung von der Funktion f_b aus. Diese beschreibt den Umsatz in GE pro Jahr in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren.

$f_b(t) = 0{,}5 \cdot b \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot b \cdot t - 0{,}2}$; $b, t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$, $b > 0$.

Der Parameter b spiegelt die Stärke des Konkurrenzdrucks wider.
Berechnen Sie für b = 0,5 zu welchem Zeitpunkt der Umsatzanstieg für das Produkt *Niap Vita* am größten ist. Auf die hinreichende Bedingung kann durch schlüssige Argumentation verzichtet werden. 7

(Teile aus Abitur 2014, Berufskolleg NRW)

Lösungen - Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Analysis

Analysis

Lösung Aufgabe 1 (Aufgabe Seite 61)

p_A: $p_A(x) = 0{,}1(x + 2)^2 + 5$; p_N: $p_N(x) = 12 - a \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, $a > 0$.

1.1.1 Sättigungsmenge in Abhängigkeit von a

Für $a > 0$ gilt: $p_N(x) = 0$ $\quad 12 - a \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{12}{a}}$

Somit ergibt sich als Sättigungsmenge $x = \sqrt{\frac{12}{a}}$ $\quad (-\sqrt{\frac{12}{a}} \notin D(p_N))$

1.1.2 a, so dass die **Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME**

Es gilt: $p_A(4{,}4) = p_N(4{,}4)$

Eingesetzt: $0{,}1(4{,}4 + 2)^2 + 5 = 12 - a \cdot 4{,}4^2 \Leftrightarrow \frac{1137}{125} = 12 - \frac{484}{25}a \Leftrightarrow a = \frac{3}{20} = 0{,}15$

1.1.3 **Beurteilung** der Behauptung:

Gleichgewichtspreis: $p_N(4{,}4) \approx 9{,}10$

Konsumentenrente: $\int_0^{4,4} ((12 - 0{,}15x^2) - 9{,}1)\,dx = \int_0^{4,4} (2{,}9 - 0{,}15x^2)\,dx$

$= \left[2{,}9x - 0{,}05x^3\right]_0^{4,4} = \frac{5313}{625} \approx 8{,}50$

Produzentenrente: $\int_0^{4,4} (9{,}1 - [0{,}1(x + 2)^2 + 5])dx = \int_0^{4,4} (-0{,}1x^2 - 0{,}4x + 3{,}7)dx$

$= \left[-\frac{1}{30}x^3 - 0{,}2x^2 + 3{,}7x\right]_0^{4,4} \approx 9{,}57$

Das Verhältnis ist nicht 1:1. Die Behauptung ist widerlegt.

1.1.4 Der Markteingriff setzt das Marktgleichgewicht außer Kraft. Da der vorgegebene Preis unter dem Gleichgewichtspreis liegt, werden weniger Produkte zu einem geringeren Preis abgesetzt. Somit wird die Produzentenrente kleiner.

1.2 Umsatz in GE pro Jahr für b = 0,5: $f_{0,5}(t) = 0{,}25 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}125 \cdot t - 0{,}2}$; $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

Umsatzanstieg am größten

$f_{0,5}'(t) = e^{-0{,}125\,t - 0{,}2}(0{,}25t^2(-0{,}125) + 0{,}5t) = e^{-0{,}125 \cdot t - 0{,}2}(-\frac{1}{32}t^2 + 0{,}5\,t)$

Hinweis: $f_{0,5}''(t)\,(t) = e^{-0{,}125\,t - 0{,}2}\,(\frac{1}{256} \cdot t^2 - \frac{1}{8} \cdot t + \frac{1}{2})$ ist nicht verlangt

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f_{0,5}''(t) = 0$

Lösungen von $f_{0,5}''(t) = 0$: $\quad t_1 \approx 27{,}31$; $t_2 \approx 4{,}69$

Hinweis: Mit GTR nach Eingabe von $f_{0,5}'(t)$ graphisch lösen; GTR bildet die Ableitung auch durch Lösung von $f_{0,5}''(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{256} \cdot t^2 - \frac{1}{8} \cdot t + \frac{1}{2} = 0$

Da die Funktion erst steigt und dann wieder fällt, muss bei t_2 der Zeitpunkt des maximalen Umsatzanstiegs vorliegen.

2 Lineare Algebra

Formelsammlung zur Linearen Algebra

Lineare Verflechtung

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "A", "\text{Stufe 1}"'] \arrow[rr, bend right, "C"'] & Z_j \arrow[r, "B", "\text{Stufe 2}"'] & E_k \end{tikzcd}$$

R_i: Rohstoffe; Z_j: Zwischenprodukte; E_k: Endprodukte

Verflechtungsmatrizen

Rohstoff-Zwischenprodukt ; Zwischenprodukt-Endprodukt; Rohstoff-Endprodukt-Matrix
A B C

Es gilt der Zusammenhang: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren
$\vec{r}$: Rohstoffvektor $\vec{z}$: Zwischenproduktvektor $\vec{x}$: Endproduktvektor

Es gilt: $\boxed{A \cdot \vec{z} = \vec{r} \qquad B \cdot \vec{x} = \vec{z} \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{r}}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit)

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R$ Fertigungskosten in Stufe 1: $\vec{k}_Z$ Fertigungskosten in Stufe 2: $\vec{k}_E$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Die **Gesamtkosten für die Produktion $\vec{x}$** setzen sich zusammen aus
Rohstoffkosten + Fertigungskosten in Stufe 1 + Fertigungskosten in Stufe 2 + fixe Kosten
K_R K_Z K_E K_f

Es gilt: $\boxed{K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \qquad K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} \qquad K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x}}$

Variable Herstellungskosten $\vec{k}_v$
pro Einheit eines Endproduktes: $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E}$

Gesamtkosten K für die Produktion $\vec{x}$

gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z \cdot \vec{z} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Inverse Matrix

Existenz: Die **quadratische** Matrix A ist **invertierbar** (die Inverse A^{-1} existiert), wenn
$Rg(A) = n$ **oder** das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist **eindeutig lösbar.**

Berechnung: Umformung von $(A \mid E)$ in $(E \mid A^{-1})$

Eigenschaften: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\qquad (r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Stochastische Matrizen

Die **Übergangsmatrix M** ist ein **stochastische Matrix**, bei der die Summe in jeder Zeile gleich 1 ist und jede Zahl größer oder gleich null ist.
Die aktuelle Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\vec{v}$ (Zeilenvektor) beschrieben.
Ein Zustandsdiagramm (Übergangsdiagramm) lässt sich durch eine Übergangsmatrix M beschreiben.

Markow-Kette mit der Anfangsverteilung $\vec{v}_0$ (Zustand zur Zeit n = 0; Startverteilung) und der Übergangsmatrix M:

$\vec{v}_0 \rightarrow \vec{v}_1 (= \vec{v}_0 \cdot M) \rightarrow \vec{v}_2 (= \vec{v}_1 \cdot M) \rightarrow \vec{v}_3 (= \vec{v}_2 \cdot M = \vec{v}_0 \cdot M^2) \rightarrow \ldots$

Dabei ist z. B. $\vec{v}_1$ der Zustand nach einem Übergang.

Übergangsmatrix für zwei Zeitabschnitte: $M \cdot M = M^2$

Gilt $\lim\limits_{n \to \infty} M^n = M_\infty$, besteht die Matrix M_∞ aus lauter gleichen Zeilen: $M_\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

M_∞ heißt Grenzmatrix.
Der Zeilenvektor $\vec{p} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$ ist ein Fixvektor.

Berechnung stationärer Zustände: $\vec{p} \cdot M = \vec{p}$

Dabei ist $\vec{p}$ der Gleichgewichtszustand (stationäre, langfristige, stabile Verteilung).
Die stationäre Verteilung hängt nicht von der Anfangsverteilung ab.

Zur Berechnung von $\vec{p} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$ (Fixvektor) ist das

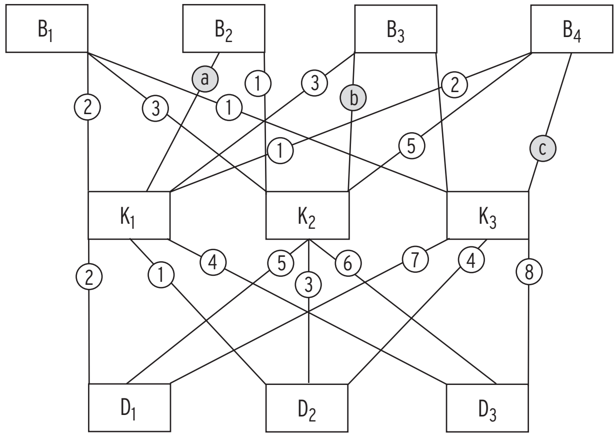
LGS $\vec{p} \cdot M = \vec{p}$ unter der Nebenbedingung $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (= 100 %) zu lösen.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 113/114**

Punkte

Die Druckfix GmbH stellt Drucker mit neuartiger Drucktechnik her. Verschiedene Abteilungen des Unternehmens beschäftigen sich mit der Analyse der Produktionssituation. Im Hauptwerk der Druckfix GmbH werden in der ersten Produktionsstufe aus den vier Basisteilen B_1 bis B_4 die drei Komponenten K_1 bis K_3 gefertigt. Diese werden dann in einer zweiten Produktionsstufe gemäß dem Verflechtungsdiagramm zu den drei verschiedenen Druckern D_1 bis D_3 zusammengesetzt.



Weiterhin ist die Matrix C_{BD}, die die Anzahl der Basisteile je Drucker angibt, bekannt: $C_{BD} = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 34 \\ 13 & 7 & 22 \\ 50 & 29 & 64 \\ 41 & 24 & 50 \end{pmatrix}$

1 Geben Sie die benötigte Anzahl der Basisteile je Komponente und die benötigte Anzahl der Komponenten je Drucker in Form von Matrizen A_{BK} und B_{KD} an. Berechnen Sie die fehlenden Parameter a, b und c. 9

2.1 Berechnen Sie die Inverse zur Komponenten-Drucker Matrix B_{KD} und zeigen Sie, dass sich die fehlenden Werte der Basisteile-Komponenten Matrix A_{BK} mit Hilfe dieser Inversen bestimmen lassen. 7

2.2 Beurteilen Sie, ob sich das Vorgehen aus 2.1 auf beliebige zweistufige Produktionsprozesse übertragen lässt. 2

3 Bei der Druckerproduktion entstehen folgende variable Kosten:
Kosten der Basisteile:

	B_1	B_2	B_3	B_4
Kosten in Euro pro Basisteil	3	2	5	1

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

3 Fertigungskosten der Komponenten:

	K_1	K_2	K_3
Kosten in Euro pro Komponente	3	2	4

Kosten des Zusammenbaus der Drucker:

	D_1	D_2	D_3
Kosten in Euro je Drucker	22	27	18

Berechnen Sie die Stückdeckungsbeiträge der drei Drucker, wenn die Verkaufspreise 490 € für den Drucker D_1, 320 € für den Drucker D_2 und 635 € für den Drucker D_3 betragen. 8

4 Es hat sich gezeigt, dass die Drucker D_1, D_2 und D_3 im Verhältnis 2 : 4 : 1 nachgefragt werden. In einem Produktionszeitraum stehen von den Basisteilen B_3 1960 Stück und von B_4 1824 Stück zur Verfügung, B_1 und B_2 sind ausreichend vorhanden. Ermitteln Sie die maximal möglichen Produktionszahlen der Drucker und den genauen Bedarf an Basisteilen B_1 bis B_4. 4

5 In einem Nebenwerk von Druckfix werden aus denselben Komponenten ähnliche Drucker (D_4 bis D_6) für ein anderes Marktsegment zusammengebaut. Die folgende Tabelle gibt die Komponenten je Drucker an.

	D_4	D_5	D_6
K_1	2	2	4
K_2	5	3	6
K_3	8	4	8

Es stehen 220 Komponenten K_1, 370 Komponenten K_2 und 520 Komponenten K_3 zur Verfügung. Beurteilen Sie, welche Produktionszahlen der Drucker D_4 bis D_6 möglich sind, so dass alle vorhandenen Komponenten aufgebraucht werden. 6

6 Marktvariationen führen zu Kostenschwankungen der Basisteile B_1 und B_2. Die Kosten der Basisteile B_3 und B_4 bleiben unverändert. Diese Schwankungen werden durch den Kostenvektor $(3 - t^2 \quad 2 + t \quad 5 \quad 1)$ mit dem positiven Parameter $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$ beschrieben. Es gibt zurzeit Beschränkungen in den Einkaufspreisen: Basisteil B_1 sollte nicht mehr als 2,96 €/Stück und B_2 nicht mehr als 2,80 €/Stück kosten.

6.1 Ermitteln Sie den zulässigen Bereich für den Parameter $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$, der obige Bedingung erfüllt. 4

6.2 Zeigen Sie, für welches t die gesamten Basisteilkosten des Druckers D_1 maximal und für welches t sie minimal werden. 5

(Berufskolleg NRW, 2010.) 45

Aufgabe 2 Lösung Seite 115/116

Der Markt für Anti-Schuppen-Shampoo wird von wenigen Herstellern beherrscht. Zwei konkurrierende Unternehmen Denkel und Brogta starten gleichzeitig aufwändige Werbeaktionen für ihr Produkt. Eine parallel dazu verlaufende Marktanalyse ergibt folgendes Kundenverhalten: 45 % der Denkel-Kunden halten dem Unternehmen die Treue, 25 % wechseln zu Brogta und 30 % kaufen ein Shampoo von anderen Herstellern; 20 % der Brogta-Kunden wechseln zu Denkel, genauso viele zu einem anderen Hersteller und der Rest sind Stammkunden von Brogta; 40 % der Kunden anderer Hersteller verbleiben bei diesen, 30 % wechseln zu Brogta und der Rest zu Denkel.
Die Marktuntersuchung liefert für den Monat März folgende Marktanteile:

Denkel: 25 %, Brogta: 30 %, andere Hersteller: 45 %

a) Stellen Sie das Käuferverhalten grafisch in einem Übergangsdiagramm und als Übergangsmatrix dar.
Die Werbeaktionen sollen über drei Monate durchgeführt werden. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Anfangsverteilung die Marktanteile nach den Werbeaktionen unter der Voraussetzung, dass die Kundenwanderung monatlich erfasst wird.
Beurteilen Sie den Erfolg der Werbemaßnahmen.
Sollte sich am Verbraucherverhalten nichts ändern, wird sich langfristig ein Gleichgewichtszustand ergeben. Ermitteln Sie den Fixvektor.

b) Durch weitere Marketingstrategien erzielen die Unternehmen Denkel und Brogta eine deutlich höhere Kundenbindung, so dass sich das Übergangsverhalten jetzt folgendermaßen darstellt:

von \ nach	Denkel	Brogta	Andere
Denkel	0,9	0	0,1
Brogta	0	0,8	0,2
Andere	0	0,5	0,5

Mehrere Monate nach Beginn der Marketingstrategien haben sich im Januar die Marktanteile $\vec{v}_{neu} = (0{,}3051 \quad 0{,}4068 \quad 0{,}2881)$ ergeben.
Ermitteln Sie die Marktanteile im Vormonat Dezember.
Untersuchen Sie die zukünftige langfristige Verteilung der Marktanteile.
Beurteilen Sie diese langfristige Entwicklung der Marktanteile unter Berücksichtigung der neuen Käuferwanderungen.

(Fachgymnasium Niedersachsen 2011.)

Lösung Aufgabe 1 **Seite 2/2**

4 x: Anzahl der Drucker D_3

Bedarf an Basisteilen für $\begin{pmatrix} 2x \\ 4x \\ x \end{pmatrix}$ Drucker: $C_{BD} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 4x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 146x \\ 76x \\ 280x \\ 228x \end{pmatrix}$

Bedingungen für x: $280x \leq 1960 \Leftrightarrow x \leq 7$

$228x \leq 1824 \Leftrightarrow x \leq 8$

Beide Bedingungen sind erfüllt für $x \leq 7$.

Es können also maximal 14 Drucker D_1, 28 Drucker D_2 und 7 Drucker D_3 hergestellt werden. Hierfür werden $146 \cdot 7 = 1022$ Basisteile B_1, $76 \cdot 7 = 532$ Basisteile B_2, 1960 Basisteile B_3 und $228 \cdot 7 = 1596$ Basisteile B_4 benötigt.

5 LGS für x_1, x_2, x_3 Anzahl der Drucker D_4 bis D_6: $B_{KD} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 370 \\ 520 \end{pmatrix}$

Auflösung mit dem Gauß-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 220 \\ 5 & 3 & 6 & 370 \\ 8 & 4 & 8 & 520 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 220 \\ 0 & 4 & -8 & -360 \\ 0 & -8 & -16 & -720 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 220 \\ 0 & -4 & -8 & -360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist **mehrdeutig** lösbar.

Mit $x_3 = t$ erhält man den Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 90 - 2t \\ t \end{pmatrix}$; $t \geq 0$.

Bedingungen für die Lösung: $t \geq 0$ und $90 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 45$

In jedem Fall werden 20 Drucker D_4 gebaut. Es können zwischen 0 und 45 Drucker D_6 (x_3) gebaut werden, von Drucker D_5 werden dann $90 - 2x_3$ gebaut.

6.1 Bedingungen für t: $3 - t^2 \leq 2{,}96 \Leftrightarrow t^2 \geq 0{,}04 \Leftrightarrow t \geq 0{,}2 \vee t \leq -0{,}2$

und $2 + t \leq 2{,}80 \Leftrightarrow t \leq 0{,}80$

Wegen $t \geq 0$ gilt für den zulässigen Bereich: $0{,}2 \leq t \leq 0{,}8$

6.2 Gesamte Basisteilekosten des Druckers D_1: Kostenvektor · 1. Spalte von C_{BD}

$$(3 - t^2 \quad 2 + t \quad 5 \quad 1) \begin{pmatrix} 26 \\ 13 \\ 50 \\ 41 \end{pmatrix} = -26t^2 + 13t + 395$$

Die zugehörige Parabel ist nach unten geöffnet, hat im Scheitel ihr Maximum und ihr Minimum am Rand ($t = 0{,}2$ oder $t = 0{,}8$).

Maximum: 1. Ableitung = 0 $-52t + 13 = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}25$ Maximalstelle

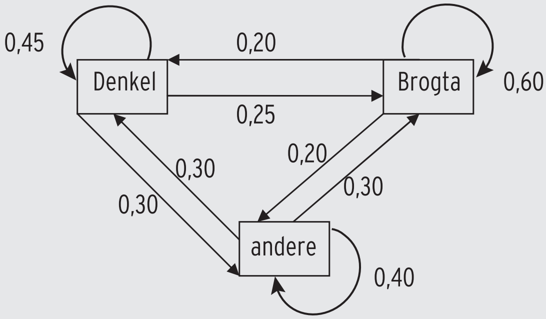
Randwertbetrachtung: $-26(0{,}2)^2 + 13 \cdot 0{,}2 + 395 = 396{,}56$

$-26(0{,}8)^2 + 13 \cdot 0{,}8 + 395 = 388{,}76$

Die gesamten Basisteilkosten von D_1 sind maximal in $t = 0{,}25$ und minimal in $t = 0{,}8$.

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** (Aufgabe Seite 100)

a) Übergangsdiagramm



Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}60 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}40 \end{pmatrix}$$

(Zeilensumme = 1)

Marktanteile nach der Werbeaktion

$\vec{v}_3 = \vec{v}_{Start} \cdot A^3 = (0{,}25 \quad 0{,}30 \quad 0{,}45) \cdot A^3 = (0{,}3065 \quad 0{,}4039 \quad 0{,}2896)$

Hersteller Denkel hat nach der Werbeaktion seinen Marktanteil auf 30,65 % erhöht, Hersteller Brogta hat seinen Marktanteil ebenfalls erhöht und liegt jetzt bei 40,39 %, d. h. die Werbeaktion war erfolgreicher als bei Denkel, weil sein Marktanteil nicht mehr nur um 5% größer als bei Denkel ist, sondern um fast 10%.

Ermittlung des Fixvektors

Ermittlung der langfristigen Prognose mit $\vec{v} \cdot A = \vec{v}$

mit $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$

Einsetzen ergibt: $(x \quad y \quad 1 - x - y) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}60 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}40 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad 1 - x - y)$

LGS
$$0{,}45x + 0{,}20y + 0{,}3(1 - x - y) = x$$
$$0{,}25x + 0{,}60y + 0{,}3(1 - x - y) = y$$
$$0{,}30x + 0{,}20y + 0{,}4(1 - x - y) = 1 - x - y$$

Lösung: $x = 0{,}3051$; $y = 0{,}4068$; $z = 1 - x - y = 0{,}2881$

Fixvektor: $\vec{v} = (0{,}3051 \quad 0{,}4068 \quad 0{,}2881)$

b) Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Vorangegangener Zeitraum

$\vec{v}_{-1} = \vec{v}_{neu} \cdot A^{-1} = (0{,}3390 \quad 0{,}2543 \quad 0{,}4067)$

Hersteller Denkel hatte einen Marktanteil von 33,90 % und Hersteller Brogta von 25,43 % und die anderen Hersteller hatten zusammen einen Marktanteil von 40,67 %.

Grenzmatrix ermitteln: $\lim\limits_{n \to \infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}7143 & 0{,}2857 \\ 0 & 0{,}7143 & 0{,}2857 \\ 0 & 0{,}7143 & 0{,}2857 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Berechnen Sie A^{20}.

III Musteraufgabensätze zur Zentralen Abiturprüfung 2021

Der Hilfsmittelfreie Teil wurde neu erstellt.

Haupttermin 2015 bzw. Haupttermin 2016 sind im Wahlteil verwendet.

Diese Prüfungen entsprechen nicht vollständig den Vorgaben für das Abitur 2021.

Nur die Aufgabenteile aus den Gebieten, die in den Abiturvorgaben 2021 im Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind, sind zur Vorbereitung auf das Abitur 2021 wiedergegeben.

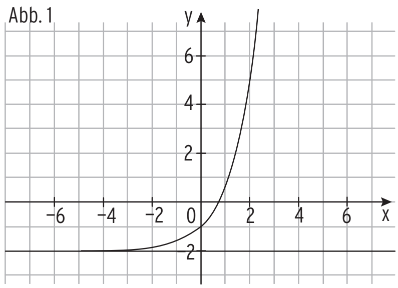
Musteraufgabensatz 1

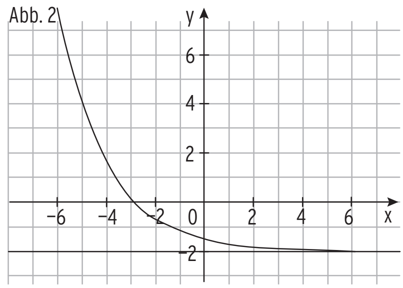
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 171 - 177**

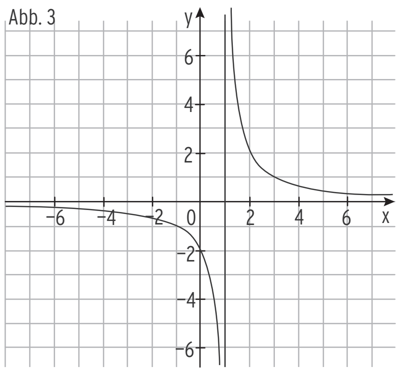
Aufgabe 1 (24 Punkte) **Punkte**

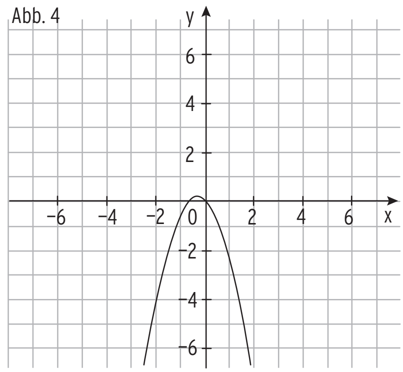
1.1 Analysis

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:









Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit

$f(x) = \frac{2}{x + a}$, $g(x) = -2 + be^{-0,5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

1.1.1 Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

1.1.2 Bestimmen Sie die Werte für a, b und c. 7

Musteraufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 Analysis — Punkte

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = ax^4 - x^2$, $a > 0$.

1.2.1 Bestimmen Sie $\int_0^1 f_a(x)dx$. 3

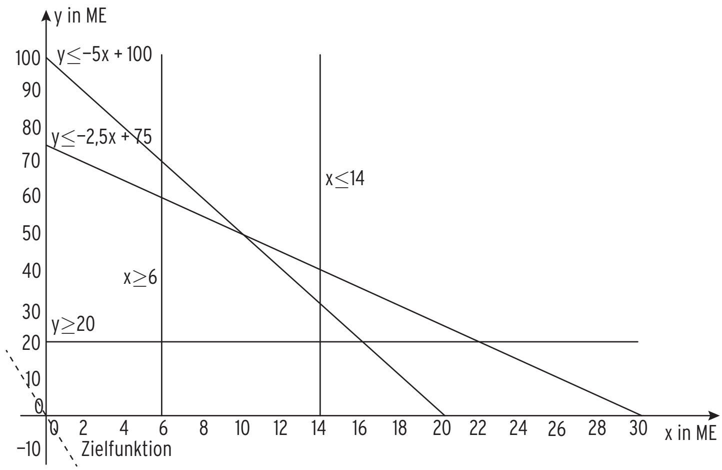
1.2.2 Die Graphen von f_a schneiden die x-Achse an den Stellen $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$; $x_{2,3} = 0$; $x_4 = \sqrt{\frac{1}{a}}$.

Bestimmen Sie a so, dass x_1 und x_4 den Abstand 4 haben. 2

1.3 Lineare Algebra

Die RALOP GmbH fertigt Fitnessarmbänder mit GPS-Sensor (x in ME)) und ohne GPS-Sensor (y in ME). Der Gewinn beiträgt bei der Variante mit GPS-Sensor 100 Geldeinheiten pro ME (GE/ME), bei der Variante ohne GPS-Sensor 10 GE/ME.

Die Restriktionen bei der täglichen Produktion sind der folgenden Grafik zu entnehmen:



1.3.1 Für die Herstellung einer ME Armbänder mit GPS-Sensor fallen Kosten in Höhe von 25 GE/ME an, für eine ME Armbänder ohne GPS-Sensor 5 GE/ME. Die Herstellungskosten dürfen täglich höchstens 500 GE betragen. Weisen Sie nach, welche der dargestellten Restriktionen diesen Zusammenhang angibt. 2

1.3.2 Kennzeichnen Sie das Planungsvieleck unter der Voraussetzung, dass der Gewinn maximiert werden soll. Bestimmen Sie den täglich maximal möglichen Gewinn der RALOP GmbH. 4

Musteraufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.4 Stochastik **Punkte**

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,6.

1.4.1 Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.4.2 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$ und $P(X \neq 5)$.

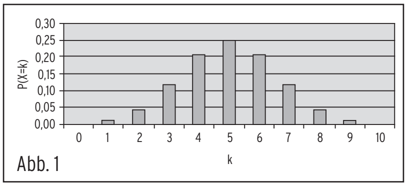


Abb. 1

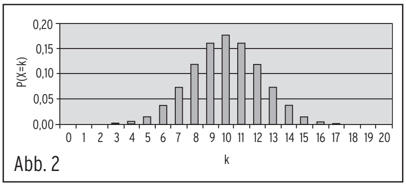


Abb. 2

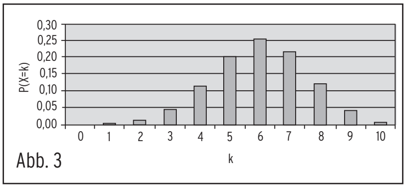


Abb. 3

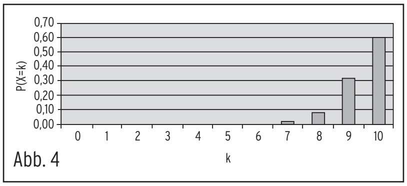


Abb. 4

6

Lösungen - Musteraufgabensätze zur Zentralen Abiturprüfung 2020

Aufgabensatz 1 Aufgabenteil A Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1

1.1 Analysis

Abb. 4: Parabel 2. Ordnung mit h(x); geht durch den Ursprung und durch $P(-2 \mid -4)$

$-4 = c \cdot (-2)^2 - (-2)$ damit $c = -\frac{3}{2}$

Abb. 2: Graph einer Exponentialfunktion mit g(x); waagrechte Asymptote:

$y = -2$ für $x \to \infty$ verläuft durch $S(0 \mid -1{,}5)$, also $b = 0{,}5$

Abb. 3: Graph einer gebrochen-rationalen Funktion mit f(x); waagrechte Asymptote: $y = 0$

senkrechte Asymptote: $x = 1$ und damit $a = -1$

1.2 Analysis

1.2.1 $f_a(x) = ax^4 - x^2,\ a > 0$

$\int_0^1 f_a(x)dx = \left[\frac{a}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{5}a - \frac{1}{3}$

1.2.2 Mit $x_1 < x_4$ gilt für den Abstand

$x_4 - x_1 = \sqrt{\frac{1}{a}} - \left(-\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{a}}$

Bedingung für Abstand 4:

$2\sqrt{\frac{1}{a}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a}} = 2$

Quadrieren: $\frac{1}{a} = 4$

Gesuchter a-Wert: $a = \frac{1}{4}$

1.3 Lineare Algebra

a) Restriktion Herstellungskosten: $25x + 5y \leq 500 \Rightarrow y \leq -5x + 100$

b) Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden bis zum äußersten Punkt des Vielecks

$P_{opt}(14 \mid 30)$

Gewinn: $G = 100x + 10y$

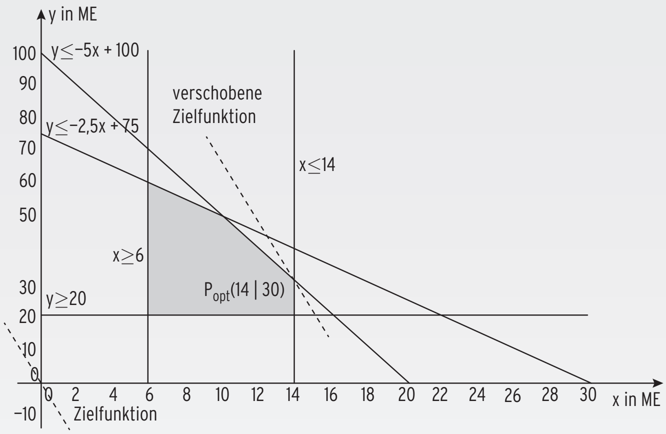
einsetzen:

$G = 100 \cdot 14 + 10 \cdot 30$

$G = 1700$

Der maximal mögliche

Gewinn beträgt 1700 GE.



1.4 Stochastik

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

1.4.1 $E(X) = 6$; größter Wert in $X = 6$; Abb. 3 zeigt die Verteilung

1.4.2 $P(4 < X < 7) = P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}45$

$P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) = 0{,}8$

Lösungen: Aufgabensatz 1 Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 2 (Analysis)

2.1 $f(t) = 7t^4 - 280t^3 + 2800t^2,\ t \in R,\ 0 \leq t < 20;\ f'(t) = 28t^3 - 840t^2 + 5600t$

2.1.1 **Aussage 1:**

Die Absatzzahlen steigen an (in der Reifephase) und fallen danach (in der Sättigungsphase). Mit der 1. Ableitung $f'(t) = 28t^3 - 840t^2 + 5600t$ folgt durch Einsetzen:

$f'(15) = -10500 < 0$ Die monatliche Absatzrate fällt im 15. Monat.

Das Produkt befindet sich nicht mehr vor der Sättigungsphase, sondern in dieser.
Die Aussage ist falsch.

Aussage 2:
Notwendige Bedingung für den maximalen Absatz: $f'(t) = 0$

$28t(t^2 - 30t + 200) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 10 \vee t = 20 \quad (t = 20 \notin D)$

Mit $f''(t) = 84t^2 - 1680t + 5600$ erhält man

$f''(0) = 5600 > 0$ (lokales Minimum)

$f''(10) = -2800 < 0$ (lokales Maximum). Weiter gilt $f(10) = 70000$.

Der maximale Absatz liegt bei 70 000 Stück pro Monat. Die Aussage ist richtig.
Hinweis: Aussage 1 kann hiermit widerlegt werden, da t = 15 hinter dem Zeitpunkt des maximalen Absatzes liegt (t = 10) und die Absatzrate wieder fallen muss.

Aussage 3:
Zum Zeitpunkt t = 3 müsste also eine Wendestelle von f vorliegen mit $f''(3) = 0$.

Es gilt aber $f''(3) = 1316 \neq 0$

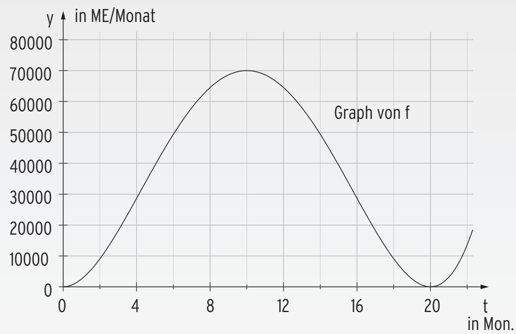
Die Aussage ist falsch.

2.1.2 **Gesamter Absatz für das erste Halbjahr** Skizze nicht verlangt.

Integration über die Absatzrate f liefert den Gesamtabsatz.

$$\int_0^6 f(t)dt = \left[\frac{7}{5}t^5 - 70t^4 + \frac{2800}{3}t^3\right]_0^6$$
$$= 121766{,}4$$

Der Gesamtabsatz in den ersten 6 Monaten beträgt 121766 Stück



Lösungen: Musteraufgabensatz 1 Aufgabenteil B Hilfsmittel (GTR)

Aufgabe 2 (Analysis) **Fortsetzung**

2.1.3 **Langfristige Eignung** (für $t > 20$)

$f(20) = 0$; f hat ein lokales Minimum in $t = 20$.

Danach steigt f an mit $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \infty$

(f ist eine Polynomfunktion 4. Grades, der Graph von f ist nach oben geöffnet.)

Die Absatzzahlen würden ins Unendliche steigen, dies entspricht nicht der Realität.

f ist nicht geeignet, um die langfristige Absatzentwicklung darzustellen.

2.2 $g_b(t) = 5000 \cdot e^{-0{,}02t^2 + 0{,}04bt}$; $t, b \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $b > 0$.

$g_b(t)$ die Anzahl der verkauften Kaffeemaschinen **in Stück im Monat** t an.

2.2.1 **Vorbestellungen zum Verkaufsstart** ($t = 0$): 5000 Stück

$g_b(0) = 5000$ wegen $e^{-0{,}02 \cdot 0^2 + 0{,}04b \cdot 0} = e^0 = 1$ unabhängig von b

Die Funktion g_b bildet diesen Sachverhalt ab.

2.2.2 **Maximaler monatlicher Absatz**

Kettenregel: $g_b'(t) = 5000 \cdot (-0{,}04t + 0{,}04b)\, e^{-0{,}02t^2 + 0{,}04bt}$

Produktregel und Kettenregel: Hinweis: 5000 als Faktor stehen lassen.

$g_b''(t) = 5000 \cdot ((-0{,}04t + 0{,}04b) \cdot (-0{,}04t + 0{,}04b)\, e^{-0{,}02t^2 + 0{,}04bt} - 0{,}04 e^{-0{,}02t^2 + 0{,}04bt})$

$= 5000 \cdot e^{-0{,}02t^2 + 0{,}04bt}\,(0{,}0016t^2 - 0{,}0032bt + 0{,}0016b^2 - 0{,}04)$

Notwendige Bedingung: $g_b'(t) = 0$ $\quad 5000 \cdot (-0{,}04t + 0{,}04b)\, e^{-0{,}02t^2 + 0{,}04bt} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\quad -0{,}04t + 0{,}04b = 0 \Leftrightarrow t = b$

Mit $g_b''(b) = (8b^2 - 16b^2 + 8b^2 - 200) \cdot e^{-0{,}02b^2 + 0{,}04b^2} = -200 \cdot e^{0{,}02b^2} < 0$

und $g_b(b) = 5000 \cdot e^{0{,}02b^2}$ ($e^{0{,}02b^2} > 0$, unabhängig von b)

ergibt sich:

Zum Zeitpunkt $t = b$ wird der maximale monatliche Absatz $5000 \cdot e^{0{,}02b^2}$ erreicht.

Zentrale Abiturprüfung 2020

Leistungskursfach Mathematik

Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Lösungen Seite 248 - 254

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabenteil A

Die Mandelrath GmbH produziert ein umfangreiches Sortiment an Feingebäck.

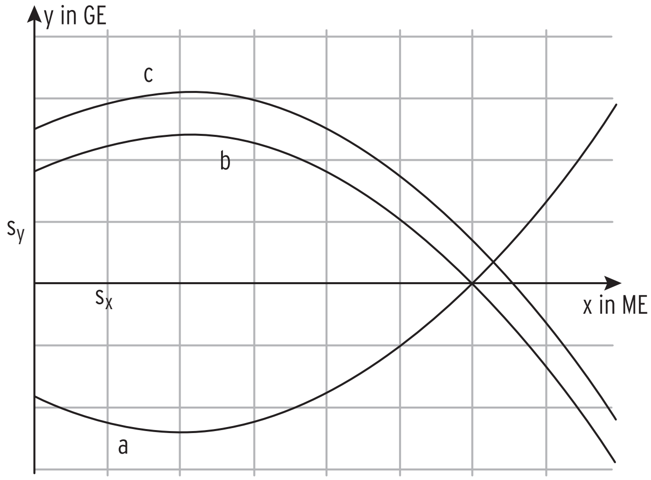
Aufgabe 1 (24 Punkte) **Punkte**

1.1 Analysis

Die Mandelrath GmbH plant die neue Plätzchenkreation Schokozart auf den Markt zu bringen. Erwartungsgemäß lässt sich der Gewinn der Produktion von Schokozart durch die Gewinnfunktion $G(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 120$ mit $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ beschreiben, wobei die Produktionsmenge x in ME (Mengeneinheiten) und der Gewinn G(x) in GE (Geldeinheiten) angegeben werden.

1.1.1 Bestätigen Sie, dass die gewinnmaximale Ausbringungsmenge bei 6 ME liegt. 2

1.1.2 Entscheiden Sie begründet, welcher der dargestellten Graphen zur Grenzgewinnfunktion G' gehört, und geben Sie die fehlenden Achsenskalierungswerte s_x und s_y an. Die Skalierungen sollen ganzzahlig sein.



4

Zentrale Abiturprüfung 2020
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.2 Analysis

Der monatliche Umsatz von Schokozart wird durch die Funktion
$u(t) = 20t \cdot e^{-0,2t}$ mit $t \in \mathbb{R},\ t \geq 0$ modelliert, wobei t die Zeit in Monaten und u(t) den monatlichen Umsatz in GE/Monat angibt.
Zur Berechnung des Gesamtumsatzes wird die Funktion U verwendet:
$U(t) = (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} + c$.
U(t) gibt den Gesamtumsatz bis zum Zeitpunkt t in GE an.

1.2.1 Zeigen Sie, dass die Funktion U eine Stammfunktion der Umsatzfunktion u ist. 4

1.2.2 Bestimmen Sie den Wert für c, wenn t = 0 der Zeitpunkt der Markteinführung des Produkts Schokozart ist. 2

1.3 Lineare Algebra

Zwei im Lager der Mandelrath GmbH verbliebene Rohstoffe R_1 und R_2 sollen zu zwei verschiedenen Keksfüllungen K_1 und K_2 verarbeitet werden.
Die Rezeptur wird durch die Matrix $C_{RK} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & r \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R},\ r \geq 0$
beschrieben, wobei mit r eine Variation der Rezeptur modelliert wird.

1.3.1 Es sollen 10 ME von K_1 und 20 ME von K_2 hergestellt werden. Berechnen Sie r so, dass 100 ME von R_2 verbraucht werden. 2

1.3.2 Weisen Sie nach, dass für $r \neq 8$ gilt:

$$C_{RK}^{-1} = \frac{1}{r-8}\begin{pmatrix} r & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$ 4

1.4 Stochastik

Bei durchschnittlich 5 % der Gebäckverpackungen ist die Plastikfolie schwer zu öffnen (A) und bei durchschnittlich 4 % der Gebäckverpackungen ist das Verfallsdatum unleserlich (B). Bei durchschnittlich 93 % der Gebäckverpackungen tritt keiner der beiden Fehler auf.

1.4.1 Erklären Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang.

I. $P_A(B)$
II. $P(A \cap \overline{B})$ 2

1.4.2 Erstellen Sie für die gegebene Situation eine Vierfeldertafel und überprüfen Sie die beiden Fehler auf stochastische Unabhängigkeit. 4

Zentrale Abiturprüfung 2020

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR
Aufgabenstellung

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabenteil B

Unter dem Motto „Gebäckvielfalt in Premiumqualität" vertreibt die Mandelrath GmbH ein umfangreiches Sortiment an Feingebäck.

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte) — Punkte

Die Mandelrath GmbH beabsichtigt für die kommende Sommersaison ihr Sortiment um das einzigartige Produkt fresh cookies zu erweitern (Monopolstellung). Zur Planung der Markteinführung sind Daten einer Studie auszuwerten.

Bei der Ermittlung der Gesamtkosten geht die Mandelrath GmbH von der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K_c aus:

$$K_c(x) = 0{,}25x^3 - 2{,}7x^2 + c \cdot x + 7 \text{ mit } x,c \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ c \geq 10,$$

wobei die Produktionsmenge x in ME (Mengeneinheiten) und die Kosten K_c in GE (Geldeinheiten) angegeben werden. Hier beschreibt c den Einfluss der Rohstoffpreise auf die Gesamtkosten.

2.1 Die Erlöse werden in der Einführungsphase durch die Funktion $E(x) = -2{,}8x^2 + 26x$ mit $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ modelliert.

2.1.1 Berechnen Sie für c = 15 den Cournotschen Punkt und erklären Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang. 6

2.2 Einige Zeit nach der Einführung von fresh cookies hat sich durch das Auftreten von mehreren Konkurrenzprodukten die Marktsituation verändert.

2.2.1 Bestimmen Sie den von c abhängenden niedrigsten Preis, zu dem das Produkt fresh cookies angeboten werden kann, um langfristig kostendeckend zu produzieren. 6

2.3.1 Der Vergleich mit ähnlichen Produkten lässt die Marketingabteilung von den folgenden monatlichen Absatzzahlen f(t) für das Produkt fresh cookies ausgehen (t: Zeitpunkt in Monaten, f(t): Absatzzahlen in ME/Monat):

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$	1,2	7,6	12,9	16,4	18,5	19,6

Der Verlauf der Absatzzahlen soll mit Hilfe einer Regression beschrieben werden.

Prüfen Sie, ob eine kubische oder eine exponentielle Regression im Zeitraum $0 \leq t \leq 5$ besser geeignet ist. 5

Zentrale Abiturprüfung 2020

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 2 — Analysis (Fortsetzung)

2.3.2 Die Firma beschließt ein neues Marketingkonzept, woraus sich von Beginn an eine andere Absatzmodellierung mit der folgenden Funktion ergibt:

$$f_a(t) = 9t \cdot e^{-\frac{1}{a}t} \text{ mit } t,a \in \mathbb{R},\ t \geq 0;\ a > 0$$

Die Zeit t wird in Monaten und der Absatz f_a in ME/Monat angegeben. Der marketingabhängige Parameter a beeinflusst den monatlichen Absatz.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes und dessen Höhe in Abhängigkeit von a.

Auf die Überprüfung der hinreichenden Bedingung kann hier verzichtet werden.

5

2.3.3 Geben Sie für a = 10 die Zeitspanne an, in der der monatliche Absatz über 30 ME/Monat liegt. 3

2.3.4 Prüfen Sie die Behauptung der Marketingabteilung:
„Werden die Werbeausgaben erhöht, so dass der Parameter a = 10 um 20 % steigt, so wird der Gesamtabsatz der ersten drei Jahre um etwas mehr als 30 % gesteigert.“ 7

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2020

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.1 Analysis

1.1.1 gewinnmaximale Ausbringungsmenge bei 6 ME

$G'(x) = -3x^2 + 12x + 36$; $G''(x) = -6x + 12$

notwendige Bedingung $G'(x) = 0$ ist erfüllt für $x = 6$: $G'(6) = 0$
hinreichende Bedingung $G''(x) < 0$ ist erfüllt für $x = 6$: $G''(6) = -24 < 0$
Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt bei 6 ME.
Hinweis: $G'(x) = 0$ kann auch berechnet werden.

1.1.2 Entscheidung

Für die Grenzgewinnfunktion gilt: $G'(x) = -3x^2 + 12x + 36$

Der gesuchte Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, die die y-Achse bei $y = 36$ schneidet. Daher muss der gesuchte Graph b oder c sein.

Eine Nullstelle der Grenzgewinnfunktion liegt bei $x = 6$. Daher scheidet c wegen der Ganzzahligkeit der Skalierung aus. Also ist b der gesuchte Graph.

Damit muss für die Skalierungswerte gelten: $s_x = 1$ und $s_y = 20$.

1.2 Analysis

1.2.1 Funktion U ist eine Stammfunktion der Umsatzfunktion u
$u(t) = 20t \cdot e^{-0,2t}$; $U(t) = (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} + c$
Zu zeigen durch Ableitung: $U'(t) = u(t)$
Mit Produkt- und Kettenregel: $U'(t) = -100 \cdot e^{-0,2t} + (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2)$
$U'(t) = 20t \cdot e^{-0,2t} = u(t)$

Alternative durch partielle Integration: $\int u'(t) \cdot v(t)dt = u(t) \cdot v(t) - \int u(t) \cdot v'(t)dt$
mit $u'(t) = e^{-0,2t} \Rightarrow u(t) = -5 \cdot e^{-0,2t}$;
und $v(t) = 20t \Rightarrow v'(t) = 20$

$$\int 20t \cdot e^{-0,2t}dt = -5 \cdot e^{-0,2t} \cdot 20t - \int (-5 \cdot e^{-0,2t} \cdot 20)dt$$
$$= -100t \cdot e^{-0,2t} + 100 \cdot (-5) \cdot e^{-0,2t} = (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t}$$

Damit ergibt sich für die Stammfunktionen: $U(t) = (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} + c$; $c \in \mathbb{R}$

1.2.2 Wert für c, wenn $t = 0$ der Zeitpunkt der Markteinführung ist

Da $U(0) = 0$ gelten muss, ergibt sich: $U(0) = 500 \cdot e^0 = 500 \Leftrightarrow c = 500$

1.3 Lineare Algebra

1.3.1 Berechnung von r für 100 ME R_2
Ansatz: $C_{RK} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 100 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 100 \end{pmatrix}$

ergibt die Gleichung für r: $40 + 20r = 100 \Rightarrow r = 3$

Für $r = 3$ werden mit 100 ME von R_2 10 ME von K_1 und 20 ME von K_2 hergestellt.

Hinweis: $10 + 40 = x$ ist nicht verlangt.

1.3.2 $r \neq 8$ Bedingung: $C_{RK} \cdot C_{RK}^{-1} = E$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & r \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r-8}\begin{pmatrix} r & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
was zu zeigen war.
NR: $\frac{1}{r-8} \cdot (r - 8) = 1$; $\frac{1}{r-8} \cdot (4r - 4r) = 0$; $\frac{1}{r-8} \cdot (-2 + 2) = 0$

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2020

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.4 Stochastik

1.4.1 Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang.

Mögliche Formulierungen:

I. $P_A(B)$: Wahrscheinlichkeit, dass das Verfallsdatum unleserlich ist, wenn die Plastikfolie schwer zu öffnen ist

II. $P(A \cap \overline{B})$: Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Gebäckverpackung die Plastikfolie schwer zu öffnen und das Verfallsdatum leserlich ist

1.4.2 Vierfeldertafel und überprüfen der beiden Fehler auf stochastische Unabhängigkeit

Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	0,02	0,03	**0,05**
$\overline{A}$	0,02	**0,93**	0,95
gesamt	**0,04**	0,96	1

Hinweise zur Vierfeldertafel: $P(A) = 0{,}05 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0{,}95$

$P(B) = 0{,}04 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0{,}96$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}93$

Überprüfung auf stochastische Unabhängigkeit zum Beispiel mit:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}02}{0{,}05} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$P(B) = 0{,}04$

Mit $P_A(B) \neq P(B)$ folgt die stochastische Abhängigkeit der beiden Fehler A und B.

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2020

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 2 – Analysis

2.1.1 $K_c(x) = 0{,}25x^3 - 2{,}7x^2 + c \cdot x + 7$; $E(x) = -2{,}8x^2 + 26x$

$K_{15}(x) = 0{,}25x^3 - 2{,}7x^2 + 15x + 7$;

Cournotscher Punkt und seine Bedeutung im Sachzusammenhang.

$G(x) = E(x) - K_{15}(x) = -0{,}25x^3 - 0{,}1x^2 + 11x - 7$

$G'(x) = -0{,}75x^2 - 0{,}2x + 11$; $G''(x) = -1{,}5x - 0{,}2$

hinreichende Bed. für Maximum: $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 \approx 3{,}70$ oder $x_2 \approx -3{,}97$ ($\notin D_{ök}$)

Da $G''(x_1) < 0$ für $x > 0$, wird der maximale Gewinn bei etwa 3,70 (ME) erzielt.

Mit $p(x) = \frac{E(x)}{x} = -2{,}8x + 26$ ergibt sich $p(3{,}70) = 15{,}64$ und damit den Cournotschen Punkt $C(x_{max} \mid p(x_{max}))$: $C(3{,}70 \mid 15{,}64)$

Die Mandelrath GmbH sollte 3,7 ME produzieren und diese zu einem Preis von 15,64 GE/ME verkaufen, um maximalen Gewinn zu erzielen.

2.2.1 niedrigster Preis, um langfristig kostendeckend zu produzieren.

Es muss die langfristige Preisuntergrenze in Abhängigkeit von c berechnet werden.

Stückkostenfunktion: $k_c(x) = \frac{K_c(x)}{x} = 0{,}25x^2 - 2{,}7x + c + \frac{7}{x}$; $x > 0$

$k_c'(x) = 0{,}5x - 2{,}7 - \frac{7}{x^2}$;

Notwendige Bedingung: $k_c'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 \approx 5{,}81$

Da es sich um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion handelt, ist damit zugleich auch die hinreichende Bedingung erfüllt.

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt $k_c(5{,}81) = c - 6{,}04$.

2.3.1 Kubische Regression ergibt $f(t) = 0{,}016t^3 - 0{,}82t^2 + 7{,}39t + 1{,}16$ mit Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 1$.

Exponentielle Regression ergibt $f(t) = 2{,}82\, e^{0{,}48t}$, bzw. $f(t) = 2{,}82 \cdot 1{,}62^t$ mit Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0{,}71$.

Die kubische Regression beschreibt die Absatzzahlen wesentlich besser.

2.3.2 Monatlicher maximaler Absatz

$f_a(t) = 9t \cdot e^{-\frac{1}{a}t}$; $f_a'(t) = 9 \cdot e^{-\frac{1}{a}t} + 9t \cdot e^{-\frac{1}{a}t} \cdot (-\frac{1}{a}) = 9 \cdot e^{-\frac{1}{a}t} \cdot (1 - t \cdot \frac{1}{a})$

Notwendig für Maximum: $f_a'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - t \cdot \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow t = a$

(Satz vom Nullprodukt; $e^{-\frac{1}{a}t} > 0$)

Der maximale Absatz wird zum Zeitpunkt t = a erreicht.

Maximaler Absatz: $f_a(a) = 9ae^{-1} = \frac{9a}{e}$ (ME/Monat).

2.3.3 Zeitspanne an, in der der monatliche Absatz über 30 ME/Monat liegt.

Aus dem Graph liest man ab, dass f_{10} (a = 10) im Bereich [6,2; 15,1] einen monatlichen Absatz von über 30 ME beschreibt.