Ott
Lengersdorf

Abitur 2021 | *Grundkurs GTR/CAS*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium –
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Norbert Lengersdorf
Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Umschlag: Kreis links: www. adpic.de
Kreis rechts: Robert Kneschke – Fotolia.com

* * * * *

12. Auflage 2020

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0478-12
ISBN 978-3-8120-1055-9

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg mit gymnasialer Oberstufe in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2021 an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung. **Alle Aufgaben sind entspechend den Abiturvorgaben 2021 ausgewählt worden.**
Die zentrale Abiturprüfung 2021 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR/CAS).
Die Aufgaben für den Grundkurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:
Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.
Dem pandemiebedingten Distanzlernen wird Rechnung getragen durch eine Fokussierung auf inhaltliche Schwerpunkte für die schriftliche Abiturprüfung für das Abitur 2021.
Im Analysis-Teil werden als thematischer Schwerpunkt die ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mit Hilfe dieses Funktionstyps verlangt. Dabei handelt es sich um das Modell der vollständigen Konkurrenz mit Betriebsminimum, Konsumentenrente, sowie die Absatzentwicklung.
Die Stochastik behandelt fokussiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.
Die Lineare Algebra hat den Schwerpunkt Lineare Gleichungssysteme sowie mehrstufige Produktionsprozesse. Lineare Optimierung mit Simplex-Verfahren soll nicht im Fokus stehen.
Über die in den fokussierten Vorgaben hinaus werden auch die nicht mit Stern gekennzeichneten Inhalte in den Aufgaben behandelt.
Diese Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, im Umfang und in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autor und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2021

Grundkurs

Aufgaben-teil	Aufgabentyp	Aufgaben-zahl	Dauer	Punkte
Teil A	Eine Aufgabe mit drei Teilaufgaben zur Analysis, Linearen Algebra und Stochastik; Mindestens 2 der Teil-aufgaben mit Anwendungsbezug.	1	max. 35 Minuten	18
Teil B	Eine Aufgabe zur Analysis, eine Aufgabe zur Linearen Algebra und eine Aufgabe zur Stochastik mit Hilfsmitteln für GTR oder CAS.	3	min. 145 Minuten	72
	Darstellungsleistung Teil A und B			5
Summe			180 Minuten	95

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Beide Prüfungsteile werden zu Beginn ausgegeben.

Zu Beginn der Klausur wird der Prüfungsteil A (Aufgabe ohne Hilfsmittel) bearbeitet; die Zeit beträgt maximal 35 Minuten. SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Wenn der Prüfling die Aufgabe und die Lösungen abgegeben hat, werden ihm die für den Prüfungsteil B zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) ausgehändigt. SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Grundkurs 180 Minuten.

Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

I Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung 2021

Dieser Teil der Abiturprüfung enthält 3 Aufgaben entsprechend den Abiturvorgaben, davon mindestens zwei mit Anwendungsbezug.

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 18

Aufgabe 1

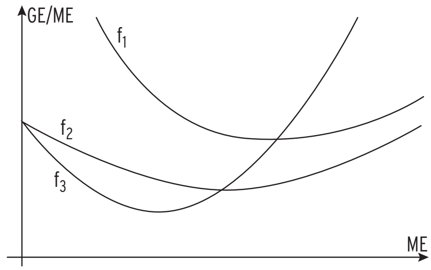
Punkte

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a, c, d > 0,\ b < 0,$

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

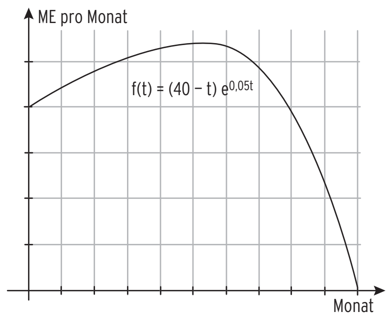


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 4

($f''(t) = -\frac{1}{400}\,t\,e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

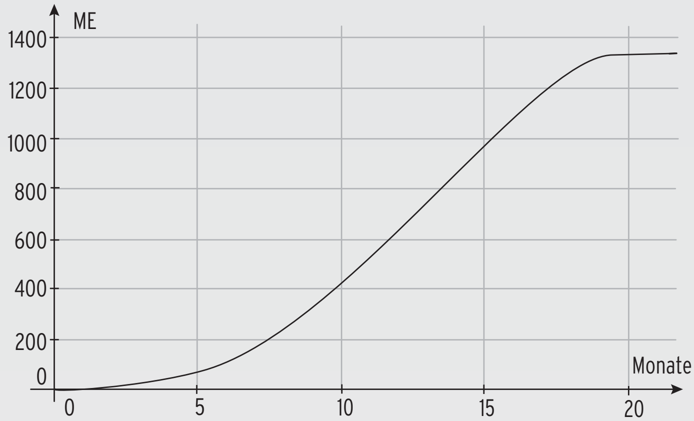
Hilfsmittelfreier Teil - Analysis Lösungen

Aufgabe 3 **Aufgaben Seite 9**

3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} (-\tfrac{1}{10}t^3 + 2t^2)dt = \left[-\tfrac{1}{40}t^4 + \tfrac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} = 1333{,}3 \ \ \text{(ME)}$$

3.2



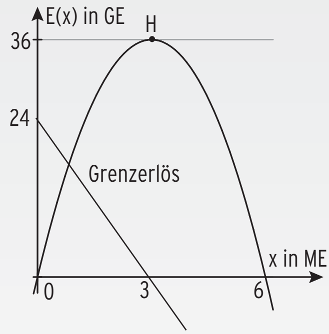
Aufgabe 4

a) Ansatz: $E(x) = ax^2 + bx$ wegen $E(0) = 0$
$E'(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS:	$E(3) = 36$	$9a + 3b = 36$	
		$3a + b = 12$	$\vert \cdot(-1)$
	$E'(3) = 0$	$6a + b = 0$	
Addition ergibt:		$3a = -12 \Leftrightarrow a = -4$	
Einsetzen in $6a + b = 0$:		$b = 24$	
Funktionsterm für die Erlösfunktion:		$E(x) = -4x^2 + 24x$	

Hinweis: $E(6) = 0$ führt auf $36a + 6b = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$

b) Graph der 1. Ableitung: fallende Gerade, die oberhalb und unterhalb der Abszissenachse im 1. und 4. Quadranten verläuft ($x \geq 0$).
Sie schneidet die x-Achse an der Maximalstelle von E.
Mit jeder zusätzlich verkauften ME wird der zusätzliche Erlös kleiner. Ab 3 ME nimmt der Erlös ab, weil der Grenzerlös E′ ($E'(x) = -8x + 24$) negativ wird.



Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra

Lösungen Seite 36

Aufgabe 1 **Punkte**

Die nebenstehende Tabelle gibt die Materialverflechtung in einem zweistufigen Produktionsprozess an, in dem aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und anschließend Endprodukte E_1 und E_2 entstehen.

			E_1	E_2
		Z_1	4	b
	Z_1	Z_2	1	3
R_1	1	0	4	2
R_2	3	1	c	9
R_3	2	a	12	16

1.1 Zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm der ersten und zweiten Stufe. 3

1.2 Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a, b und c. 3

Aufgabe 2

Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ sowie eine Matrix C.

a) Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist. 2

b) Für die Matrix C gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Begründen Sie, dass gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ 2

Aufgabe 3

1 Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS 1:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 4x_2 - 8x_3 &= 12. \end{aligned}$$

1.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von LGS 1.

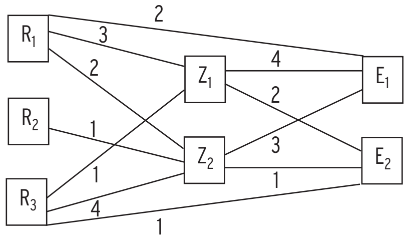
1.2 Begründen Sie, warum alle Lösungen des gegebenen Gleichungssystems LGS1 auch Lösungen des nachfolgenden Gleichungssystems LGS2 sind.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 12. \end{aligned}$$

Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra **Lösungen Seite 36/37**

Aufgabe 4 **Punkte**

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess wird der Bedarf je Mengeneinheit an Roh- und Zwischenprodukten für die Endprodukte in dem folgenden Verflechtungsdiagramm verdeutlicht.



Die Kosten für je eine Mengeneinheiten der Rohstoffe entsprechen dem Zeilenvektor $(2 \quad 5 \quad 3)$.

a) Zeigen Sie, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt: $A_{RE} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$ 3

b) Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen. 3

Aufgabe 5

Ein Unternehmen stellt aus drei unterschiedlichen Bauteilen B1, B2 und B3 die Endprodukte E1, E2 und E3 her. Das Unternehmen hat noch 70 ME von B1 und jeweils 60 ME von B2 und B3 auf Lager.

a) Die Materialverflechtung ist der Matrix M_{BE} zu entnehmen: $M_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie, wie viele ME der Endprodukte hergestellt werden können, wenn der Lagerbestand vollständig aufgebraucht werden soll. 4

b) Durch eine Veränderung der Produktion werden nun für die Herstellung von einer ME von E3 eine zusätzliche ME von B3 benötigt. Als umgeformte erweiterte Koeffizienten-Matrix ergibt sich bei obigen Lagerbeständen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

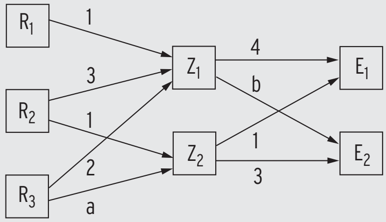
Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix im Sachzusammenhang. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra Lösungen

Aufgabe 1

Aufgaben Seite 30

1.1 Verflechtungsdiagramm



1.2 Aus der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 13 & 3b+3 \\ 8+a & 2b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

folgt z. B.: $8 + a = 12 \Rightarrow a = 4$ $\quad 3b + 3 = 9 \Rightarrow b = 2$

Einsetzen in $2b + 3a = 16$ ergibt eine wahre Aussage

Fehlende Werte: $a = 4$, $b = 2$, $c = 13$.

Aufgabe 2

a) B ist die zu A inverse Matrix: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

b) Aus $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ folgt $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

Dann gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Bem.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden E.

Aufgabe 3

1.1 Mit dem Gauß-Verfahren, kommt man auf die folgende Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 6 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & -8 & -14 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & 8 & -64 \end{array}\right)$$

Dies führt auf den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -8 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Der „Lösungsvektor" kann auch in anderer Schreibweise angegeben werden und es kann auch ein alternatives Lösungsverfahren angewandt werden.

1.2 In LGS 2 ist die dritte Zeile eine Verdoppelung der zweiten, also ist LGS 2 unterbestimmt. Da der Lösungsvektor von LGS 1 jedenfalls die ersten beiden Zeilen von LGS 2 erfüllt und die dritte Zeile in LGS 2 überflüssig ist, ist der Lösungsvektor von LGS 1 in der Lösungsmenge von LGS 2 enthalten.

Aufgabe 4

Aufgaben Seite 31

a) $C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$

b) Rohstoffkosten für 1 ME von E_1: $\quad (2 \;\; 5 \;\; 3)\begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} = 103$

Die Behauptung stimmt, da die Rohstoffkosten für 1 ME von E_1 103 GE betragen, also für 10 ME 1030 GE $>$ 1000 GE.

Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra Lösungen

Aufgabe 5 **Aufgaben Seite 31**

a) $M_{BE} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 2 & 2 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 2 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$ liefert den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Es können 20 ME von E1 und jeweils 10 ME von E2 und E3 produziert werden.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung, der vorliegende Lager-

bestand kann also nicht vollständig zu Endprodukten verarbeitet werden.

Aufgabe 6 **Aufgaben Seite 32**

a) $C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) Bei Kostendeckung sind Erlös und Kosten gleich:

$(x \quad 2x) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = 4800$

$800x = 4800$ für $x = 6$

Der Verkaufspreis für E1 muss mindestens 6 GE und für E2 mindestens 12 GE betragen.

Aufgabe 7

2.1 Ungleichungen, die zum Lösungspolygon passen.

g_1: $y = -\frac{12}{4}x + 12$ $\qquad 3x + y \leq 12$

g_2: $y = -\frac{10}{5}x + 10$ $\qquad 2x + y \leq 10$

g_3: $y = 8$ $\qquad y \leq 8$

2.2 Zielfunktion, so dass es genau eine maximale Lösung in A gibt,

Die Gerade der Zielfunktion muss zwischen g_1 und g_2 verlaufen, also $-3 < m < -2$.

Mögliche Zielfunktion: $y = -2{,}5x + b$

Berechnung von b:

Punktprobe mit A(2 | 6): $6 = -2{,}5 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 11$

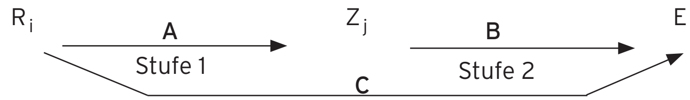
maximaler Gewinn: $y = -2{,}5x + \frac{G}{100}$

$\frac{G}{100} = 11 \Rightarrow G_{max} = 1100$ (GE)

2 Lineare Algebra

Formelsammlung

Lineare Verflechtung



R_i: Rohstoffe; Z_j: Zwischenprodukte; E_k: Endprodukte

Verflechtungsmatrizen

Rohstoff-Zwischenprodukt ; Zwischenprodukt-Endprodukt; Rohstoff-Endprodukt-Matrix

A B C

Es gilt der Zusammenhang: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$: Rohstoffvektor $\vec{z}$: Zwischenproduktvektor $\vec{x}$: Endproduktvektor

Es gilt: $\boxed{A \cdot \vec{z} = \vec{r} \qquad B \cdot \vec{x} = \vec{z} \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{r}}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit)

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R$ Fertigungskosten in Stufe 1: $\vec{k}_Z$ Fertigungskosten in Stufe 2: $\vec{k}_E$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Die **Gesamtkosten für die Produktion $\vec{x}$** setzen sich zusammen aus
Rohstoffkosten + Fertigungskosten in Stufe 1 + Fertigungskosten in Stufe 2 + fixe Kosten

K_R K_Z K_E K_f

Es gilt: $\boxed{K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \qquad K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} \qquad K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x}}$

Variable Herstellungskosten $\vec{k}_v$ pro Einheit eines Endproduktes: $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E}$

Gesamtkosten K für die Produktion $\vec{x}$ gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z \cdot \vec{z} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Inverse Matrix

Existenz: Die **quadratische** Matrix A ist **invertierbar** (die Inverse A^{-1} existiert), wenn

$Rg(A) = n$ **oder** das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist **eindeutig lösbar.**

Berechnung: Umformung von $(A \mid E)$ in $(E \mid A^{-1})$

Eigenschaften: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\qquad (r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 112/113**

Das Ein-Liter-Auto ist kaum noch ein Thema. Niemand dürfte bereit sein, mehrere 10 000 Euro für ein eigenes Gefährt zu zahlen. Eine mögliche Zwischenlösung wird künftig wohl in einem Zwei- oder Drei-Liter-Auto gesehen.
Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten und GE gleich Geldeinheiten.
Der Autozulieferbetrieb Dynamik baut unter anderem für ein Zwei-Liter-Auto in einem zweistufigen Produktionsprozess aus verschiedenen elektronischen Bauteilen (B1, B2 und B3) Fahrdynamikregelung, Motorsteuergerät und Bordcomputer (E1, E2, E3).
Die folgenden Listen geben Auskunft über die Zusammenhänge zwischen den Bauteilen und den Zwischen- bzw. Endprodukten in ME.

	Z1	Z2	Z3
B1	1	0	3
B2	5	2	12
B3	50	15	95

	E1	E2	E3
Z1	2	3	2
Z2	0	4	3
Z3	1	5	1

Kosten der Bauteile in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
0,03	0,02	0,01	1,5	2,5	2,5	10	15	20

1.1 Aus den obigen Angaben ergibt sich die folgende Bauteile-Endproduktmatrix:

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Berechnen Sie die Werte für a und b. 5

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente a und b im Sachzusammenhang. 5

Im Folgenden sei a = 685 und b = 28.

1.2 Die Fixkosten der Wochenproduktion betragen 7 525 GE. 8
Berechnen Sie die Gesamtkosten für eine Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3.

1.3 Kurz vor den Betriebsferien meldet das Lager einen Bestand an Zwischenprodukten von Z1 mit 4 300 ME, Z2 mit 4 250 ME und Z3 mit 4 950 ME.

1.3.1 Untersuchen Sie, wie viele Endprodukte mit diesem Lagerbestand noch vor den Betriebsferien produziert werden können. 8

1.3.2 Begründen Sie, dass es trotz höheren Rechenaufwands sinnvoll sein kann, zunächst die Inverse der Verflechtungsmatrix M_{ZE} zu bestimmen. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

1.4 Das Unternehmen Dynamik staffelt seine Preise der Endprodukte nach Auftrag und Kunde. Den Kunden werden bestimmte Rabattkategorien r mit $r \in \mathbb{N}$ zugeordnet – guten Kunden wird eine höhere Kategorie zugeordnet.
Es gilt folgender Preisvektor:

$e_r^T = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)$

1.4.1 Berechnen Sie, für welche $r > 0$ die einzelnen Preise ökonomisch sinnvoll sind. 7

1.4.2 Die Gesamtkosten in Höhe von 85 055 GE bei der Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3 sollen trotz Rabatt mindestens gedeckt werden. 7
Leiten Sie den Bereich für r her, der dieser Anforderung genügt.
(Berufskolleg NRW 2011.) 45

Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Lösung Seite 113/114**

Punkte

BioKosmetiKuss stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus pflanzlichen Rohstoffen (R1, R2 und R3) Zwischenprodukte (Z1, Z2 und Z3) und aus diesen wiederum verschiedene Parfums (E1, E2 und E3) her.
Die folgenden Matrizen geben die benötigten pflanzlichen Rohstoffe je Zwischenprodukt bzw. Zwischenprodukte je Endprodukt (Parfum) in ME an.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix} \; ; a, b, c \geq 0$$

Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt in der aktuellen Produktionsperiode:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

3.1 Bei der Produktion der Zwischenprodukte und der Parfums treten produktionsbedingte Parameter a, b und c auf, die in den einzelnen Produktionsperioden variieren können.

3.1.1 Berechnen Sie die Werte für a, b und c für die aktuelle Produktionsperiode. 5

3.1.2 Deuten Sie Ihre Ergebnisse aus 3.1.1 im Sachzusammenhang. 3

3.1.3 Stellen Sie die betriebliche Materialverflechtung in Form eines Gozintographen (Verflechtungsdiagramm) dar. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite99/100**

1.1.1 Bauteile-Zwischenprodukt-Matrix M_{BZ}

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix M_{ZE}; Bauteile-Endprodukt-Matrix M_{BE}

Es gilt: $M_{BZ} \cdot M_{ZE} = M_{BE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 50 & 15 & 95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$

Für a und b gilt dann: $a = 50 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 95 \cdot 5 = 685$

$b = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = 28$

Die exemplarische Überprüfung stimmt mit der Vorgabe überein.

1.1.2 a gibt die Anzahl der Bauteile B3 im Endprodukt E2 (Motorsteuergerät) an.

b gibt die Anzahl der Bauteile B2 im Endprodukt E3 (Bordcomputer) an.

1.2 Wochenproduktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix}$

Bauteilekosten je Endprodukt: $(0{,}03 \;\; 0{,}02 \;\; 0{,}01) \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & 28 \\ 195 & 685 & 240 \end{pmatrix} = (2{,}54 \;\; 9{,}05 \;\; 3{,}11)$

Fertigungskosten je Endprodukt: $(1{,}5 \;\; 2{,}5 \;\; 2{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (5{,}5 \;\; 27 \;\; 13)$

Fertigungskosten der Endprodukte: $(10 \;\; 15 \;\; 20)$

Für die variablen Kosten je Endprodukt gilt:

$(2{,}54 \;\; 9{,}05 \;\; 3{,}11) + (5{,}5 \;\; 27 \;\; 13) + (10 \;\; 15 \;\; 20) = (18{,}04 \;\; 51{,}05 \;\; 36{,}11)$

Für die Gesamtkosten einer Wochenproduktion gilt:

$(18{,}04 \;\; 51{,}05 \;\; 36{,}11) \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} + 7525 = 85055$

Die Gesamtkosten einer Wochenproduktion betragen 85 055 GE.

1.3 Ansatz: $M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 1 & 5 & 1 & 4950 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 0 & 7 & 0 & 5600 \end{array}\right) * \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right) **$$

Durch Rückwärtseinsetzen aus * oder Gaußverfahren bis ** ergibt sich: Es können noch 600 ME von E1, 800 ME von E2 und 350 ME von E3 produziert werden.

1.3.2 Die Berechnung der Inversen hat genau dann einen Vorteil, wenn die Produktionsmengen nicht nur für einen Lagerbestand, sondern für unterschiedliche Lagerbestände bestimmt werden sollen. So reduziert sich der weitere Rechenaufwand lediglich auf eine einfache Multiplikation der Inversen von M_{ZE} mit den Vektoren der jeweiligen Lagerbestände. Das Lösen von Gleichungssystemen ist dann nur einmal notwendig.

Lösung Aufgabe 1 **Seite 2/2**

1.4.1 Die Preise müssen mit Rabattgewährung größer als Null sein:

$26{,}54 - 0{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 53{,}08$

$69{,}55 - 1{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 46{,}37$

$49{,}61 - r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 49{,}61$

Die Rabattgewährung r soll nur ganzzahlig ($\in \mathbb{N}$) sein; es gilt somit $0 \leq r \leq 46$.

1.4.2 Sinnvoller Bereich für r:

Es gilt: $G \geq 0$ mit $G = E - K$

$$G = e_r^T \cdot \vec{x} - K = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} - 85055 \geq 0$$

$$19905 - 375r + 62595 - 1350r + 24805 - 500r - 85055 \geq 0$$

$$22250 - 2225r \geq 0$$

$$r \leq 10$$

Für die Wahl der Rabattkategorie r gilt: $0 \leq r \leq 10$

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 100/101**

3.1 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix}$; $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$; a, b, c $\geq$ 0; $C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$

3.1.1 Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

Daraus folgt: $(1 \quad a \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \qquad 1 + 2a + 6 = 15 \quad \Leftrightarrow a = 4$

$(4 \quad 1 \quad b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \qquad 4 + 2 + 2b = 10 \quad \Leftrightarrow b = 2$

$(1 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} = 7 \qquad 1 + 6 + c = 7 \quad \Leftrightarrow c = 0$

3.1.2 Deutung im Sachzusammenhang:

a= 4: Für eine ME des Zwischenproduktes Z2 werden 4 ME des pflanzlichen Rohstoffs R2 benötigt.

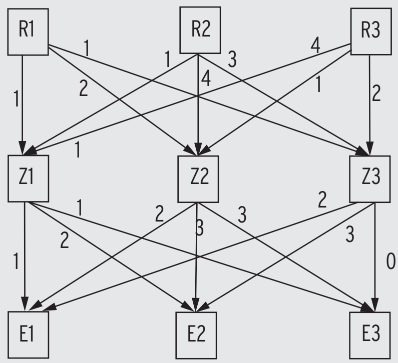
b = 2: Für eine ME des Zwischenproduktes Z3 werden 2 ME des pflanzlichen Rohstoffs R3 benötigt.

c = 0: Für eine ME des Endproduktes E3 werden keine ME des Zwischenproduktes Z3 verbraucht.

Lösung Aufgabe 2 **Seite 2/2**

3.1.3 Materialverflechtung

Gozintograph



3.2.1 **Variable Kosten je ME der Endprodukte E1, E2 und E3**

Materialkosten:

$$(4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot C_{RE} = (4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix} = (105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3)$$

Fertigungskosten Zwischenprodukte:

$$(8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot B_{ZE} = (8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5)$$

Variable Kosten je ME der Endprodukte:

$(105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3) + (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5) + (3 \quad 2{,}5 \quad 4)$

$= (140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8)$

Die variablen Kosten für eine ME von E1 betragen 140 GE, für eine ME E2 222,3 GE und 117,8 GE für eine ME E3.

3.2.2 **Produktionszahlen der Endprodukte**

Zu lösen ist: $(140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8) \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 5000 = 47232$

$140x + 444{,}6x + 471{,}2x + 5000 = 47232 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 40$

Vom Endprodukt E1 können 40 E, von E2 80 ME und von E3 160 ME hergestellt werden.

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 170 – 173**

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Analysis **Punkte**

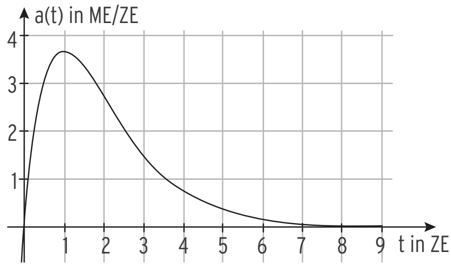
1.1 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

1.1.1 Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$. Bestimmen Sie eine Lösung für x. 2

1.1.2 Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt. 3

1.2 Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. 3



Stochastik

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

1.3 Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. 2

1.4 Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3

Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5 Entscheiden Sie für jeden der Terme A + B und A · B, ob er definiert ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. 2

1.6 Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. 3

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Die Firma VELOTRITT GmbH stellt Fahrräder des unteren Preissegments her, die über Discountmärkte und das Internet vertrieben werden. Einige Bauteile dieser Fahrräder werden bei unterschiedlichen Lieferanten zugekauft.
In allen Aufgaben gilt ME ≙ Mengeneinheiten und GE ≙ Geldeinheiten.

Aufgabe 2 – Analysis (24 Punkte) **Punkte**

Die VELOTRITT GmbH plant die Markteinführung der neuen Kinderradserie *Kiddystunt*.

2.1 Zur Vorbereitung der Markteinführung wurden detaillierte Marktuntersuchungen durchgeführt, denen zufolge in den ersten drei Jahren mit einem prognostizierten Verlauf der Absatzentwicklung entsprechend der Funktion

$$a(t) = 400 + (150t - 50) \cdot e^{-0{,}1t};\ t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

zu rechnen ist. Dabei entspricht a(t) der Absatzmenge in ME pro Monat und t der seit der Markteinführung vergangenen Zeit in Monaten.

2.1.1 Berechnen Sie die Absatzmenge pro Monat, mit der ein Jahr nach Markteinführung zu rechnen ist. 3

2.1.2 Zeigen Sie, dass die erste und die zweite Ableitungsfunktion von a den folgenden Gleichungen entsprechen. 6

$$a'(t) = e^{-0{,}1t}(155 - 15t) \qquad \text{und} \qquad a''(t) = e^{-0{,}1t}(1{,}5t - 30{,}5)$$

2.1.3 Berechnen Sie den Monat, in welchem die Funktion a ihren Wendepunkt besitzt. 5
Hinweis: Auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung wird verzichtet!

2.1.4 Interpretieren Sie die in 2.1.3 berechnete Wendestelle ökonomisch. 2

2.1.5 Bestimmen Sie die monatliche Absatzmenge, die sich laut Prognose langfristig einstellen wird. 2

2.2 Die Beleuchtungsanlagen für die neue Kinderradserie Kiddystunt werden von der BLENDOLUX KG geliefert. In der Abteilung Controlling ist man sich bei BLENDOLUX unsicher, ob die Kostenfunktion $K(x) = 4x^3 - 90x^2 + 700x + 400$ die tatsächliche Kostenentwicklung modelliert. Dazu wurden betriebliche Zahlen erhoben. Die Kapazitätsgrenze für die Beleuchtungsanlagen liegt bei 18 ME. Überprüfen Sie, ob die obige Kostenfunktion den erhobenen Bedingungen genügt. 6

- Es entstehen Fixkosten in Höhe von 400 GE.
- Bei 8 ME betragen die Gesamtkosten 2 288 GE.
- Die Grenzkosten sind bei 7,5 ME minimal.
- Die Gesamtkosten an der Kapazitätsgrenze betragen 7 168 GE.
- Bei einer Produktion von 2 ME betragen die Grenzkosten 388 GE/ME.
- Bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen die durchschnittlichen Kosten 430 GE/ME.

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (24 Punkte) — Punkte

Die PlantGrow AG stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess Blumensamenmischungen für den Direktvertrieb an Endverbraucher her.
In einer ersten Produktionsstufe werden aus drei Samenarten S1, S2 und S3 drei verschiedene Tütenmischungen T1, T2 und T3 hergestellt, die in der zweiten Produktionsstufe zu zwei verschiedenen Verkaufsverpackungen V1 und V2 zusammengestellt werden.
Für die Mengeneinheiten (ME) der Samenarten und Tütenmischungen, die jeweils für eine ME der Tütenmischungen bzw. Verkaufsverpackungen benötigt werden, gelten folgende Matrizen:

$$A_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ C_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Die Kosten je ME in GE lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Kosten für Samenarten			Fertigungskosten 1. Stufe zu Tüten			Fertigungskosten 2. Stufe zu Verkaufsverpackungen	
S1	S2	S3	T1	T2	T3	V1	V2
2	1	0,5	3	2	3,5	4	3

Für die Verkaufspreise in GE je ME gilt:

Verkaufspreise	
V1	V2
70	65

3.1 Zeigen Sie: Für alle positiven reellen Werte von b hat die Matrix A_{ST} eine Inverse. 6

Gehen Sie bei der weiteren Bearbeitung von b = 4 aus.

3.2 Zeigen Sie, für die Inverse von A_{ST} gilt: $A_{ST}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ -1 & -6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

Leiten Sie aus den obigen Matrizen die Matrix $B_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ her,

die den Verbrauch an Tütenmischungen je ME der Verkaufsverpackungen angibt. 8

3.3 Berechnen Sie den Stückdeckungsbeitrag in GE/ME der Verkaufsverpackungen V1 und V2. 10

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Stochastik (24 Punkte) **Punkte**

Die VELOTRITT GmbH bezieht die notwendigen Beleuchtungsanlagen (Front- und Rücklichter) von der Blendolux KG.

4.1 Die Blendolux KG garantiert, dass der Ausschussanteil ihrer Produkte höchstens 4 % beträgt. Für eine Qualitätskontrolle wählt ein Mitarbeiter zufällig 100 Beleuchtungsanlagen aus. Gehen Sie davon aus, dass $p = 0{,}04$ gilt.

4.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Beleuchtungsanlagen Ausschussware sind. 3

4.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Beleuchtungsanlage Ausschussware ist. 3

4.1.3 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3, aber weniger als 7 Beleuchtungsanlagen Ausschussware sind. 4

4.2 Ein Mitarbeiter der VELOTRITT GmbH möchte die Angaben der BLENDOLUX KG prüfen, da er vermutet, dass der Ausschussanteil von 4 % in Wirklichkeit höher ist.

4.2.1 Der Mitarbeiter möchte diese Vermutung mittels eines einseitigen Hypothesentests mit einem Signifikanzniveau von 10%bestätigen, indem er 100 Beleuchtungsanlagen überprüft. Entwickeln Sie auf Grundlage der Angaben einen Hypothesentest mit zugehöriger Entscheidungsregel. 10

4.2.2 Der Mitarbeiter entdeckt 6 beschädigte Beleuchtungsanlagen. Beurteilen Sie diesen Sachverhalt auf der Grundlage des Hypothesentests. 4

(Teile aus Berufskolleg NRW 2015)

Zentrale Abiturprüfung 2018/2019

Grundkursfach Mathematik

Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 203 - 208**

Aufgabenstellung

Die CareDisps GmbH stellt Displays für Handys und Tablets und diverse Display-Reparatur-Sets her, die über das Internet vertrieben werden.

Aufgabe 1 (18 Punkte) **Punkte**

1.1 Analysis

Für das neu entwickelte Flüssig-Reparatur-Set hat die CareDisps GmbH ein Patent angemeldet. Mithilfe der Funktion K mit $K(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 54 \cdot x + 10$ lassen sich die Gesamtkosten der Produktion des Flüssig-Reparatur-Sets beschreiben.
Die Funktion p mit $p(x) = -8x + 70$ beschreibt die Preis-Absatz-Funktion.
Dabei gibt x die Produktionsmenge in ME, K(x) die Gesamtkosten in GE und p(x) den Verkaufspreis in GE/ME an.

1.1.1 Bestätigen Sie, dass sich der Gewinn für jede Ausbringungsmenge x bestimmen lässt durch $G(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 10$. 2

1.1.2 Prüfen Sie, ob bei der Menge, die zu einem Preis von 38 GE/ME abgesetzt wird, der maximale Gewinn erzielt wird. 4

Zentrale Abiturprüfung 2018/2019

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 Stochastik **Punkte**

In einer Kundenumfrage wurden mehrere hundert Kunden befragt. 16 % der befragten Kunden gaben an, mit dem neuen Flüssig-Reparatur-Set unzufrieden zu sein. Die Abbildung 1.2 zeigt einen Ausschnitt der kumulierten Wahrscheinlichkeiten zu einer Stichprobe von 20 Kunden. Dabei steht die binomialverteilte Zufallsgröße X für die Anzahl der Kunden, die angeben, mit dem neuen Flüssig-Reparatur-Set unzufrieden zu sein.

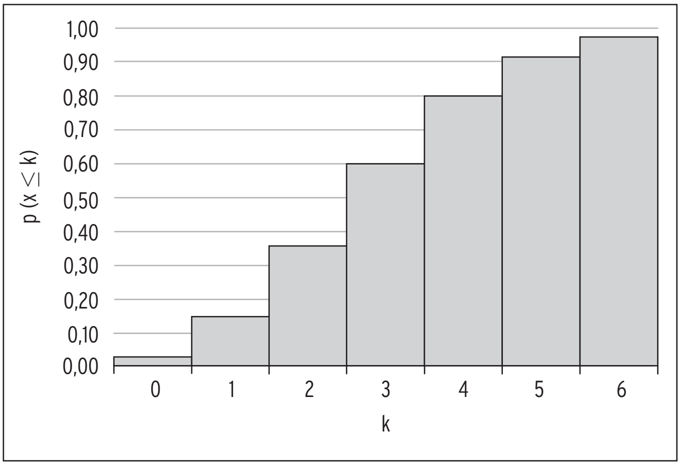


Abbildung 1.2: Kumulierte Wahrscheinlichkeit

1.2.1 Geben Sie mithilfe von Abbildung 1.2 die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:
A: Höchstens drei Kunden sind unzufrieden.
B: Genau drei Kunden sind unzufrieden.
C: Mehr als drei Kunden sind unzufrieden.

3

1.2.2 Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1.2 die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der unzufriedenen Kunden um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht. Gehen Sie von $\sigma = 1{,}6$ aus.

3

Zentrale Abiturprüfung 2018/2019

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.3 **Lineare Algebra** **Punkte**

Die CareDisps GmbH beliefert zwei Großhändler, die Alphaphone KG und die Betaphone KG, mit Display-Reparatur-Sets in den Ausführungen R_1 und R_2.
Die folgende Tabelle gibt aus Sicht dieser Großhändler deren Bareinkaufspreise sowie deren Bezugskosten je Reparatur-Set an.
Die zugehörige Matrix wird mit M_{WK} bezeichnet.

Kosten / Ware	Bezugskosten in GE/Set	Bareinkaufspreis in GE/Set
Reparatur-Set R_1	1	12
Reparatur-Set R_2	2	25

1.3.1 Zeigen Sie durch Herleitung, dass für die Inverse der Matrix M_{WK} gilt:

$$M_{WK}^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -12 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3

Den beiden Großhändlern entstehen für den Einkauf der Reparatur-Sets im aktuellen Quartal insgesamt Kosten gemäß der folgenden Tabelle:

Kosten / Händler	gesamte Bezugskosten in GE	gesamter Wareneinsatz ohne gesamte Bezugskosten in GE
Alphaphone KG	10	124
Betaphone KG	11	135

Die zugehörige Matrix wird mit M_{HK} bezeichnet.

1.3.2 Bestimmen Sie die Matrix M so, dass $M \cdot M_{WK} = M_{HK}$ gilt und interpretieren Sie deren Elemente im Sachzusammenhang.

3

Zentrale Abiturprüfung 2018/2019

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabenstellung

Die CareDisps GmbH stellt Displays für Handys und Tablets sowie diverse Display-Reparatur-Sets her, die über das Internet vertrieben werden.

Aufgabe 2 – Analysis (24 Punkte)	**Punkte**
Vor der Markteinführung eines neuen Displays hat die CareDisps GmbH eine Analyse der Kosten- und Absatzentwicklung in Auftrag gegeben.	
2.1 Die Gesamtkosten werden durch eine ganzrationale Funktion K dritten Grades beschrieben. x gibt die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und K(x) die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE) an. Folgende Daten sind dazu bekannt: • Die Gesamtkosten bei 5 ME betragen 100,5 GE. • Die variablen Stückkosten betragen 21,9 GE/ME, wenn 3 ME produziert werden. • Bei einer Produktionsmenge von 4 ME betragen die Grenzkosten 10,8 GE/ME. • Die Grenzkosten sind bei 10 ME minimal.	
2.1.1 Stellen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion K auf.	6
2.2 Gehen Sie im weiteren Verlauf von der folgenden ertragsgesetzlichen Gesamtkostenfunktion aus: $K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 13$	
2.2.1 Gegenwärtig plant CareDisps einen Preis von 12,5 GE/ME. Berechnen Sie die Terme der Gewinn- und der Grenzgewinnfunktion.	3
2.2.2 Bestätigen Sie, dass die kurzfristige Preisuntergrenze bei 15 ME angenommen wird und 7,5 GE/ME beträgt.	3
2.2.3 Die Geschäftsleitung beschließt 14 ME produzieren zu lassen und zum Preis der kurzfristigen Preisuntergrenze (siehe 2.2.2) anzubieten. Beurteilen Sie diese Entscheidung aus ökonomischer Sicht.	2
2.3 Die Analyse der erwarteten Absatzentwicklung des neuen Displays hat ergeben, dass sich der Verlauf mithilfe der Funktion $a(t) = 0{,}5 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} + 2$ beschreiben lässt. Dabei gibt a(t) die Absatzrate in ME pro Monat und $t \in [0; 24]$ die seit Markteinführung vergangene Zeit in Monaten an.	
2.3.1 Berechnen Sie die Absatzrate nach sechs Monaten.	1
2.3.2 Ermitteln Sie den Zeitraum, in welchem das Unternehmen mehr als 6 ME/Monat absetzt.	2

Zentrale Abiturprüfung 2018/2019

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 – Analysis Fortsetzung **Punkte**

2.3.3 Bestimmen Sie, wie viele ME/Monat das Unternehmen entsprechend der erwarteten Absatzentwicklung langfristig absetzen kann. 2

2.3.4 Es gilt: $a'(t) = e^{-0,2 \cdot t} \cdot (t - 0,1 \cdot t^2)$

Leiten Sie unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel her, dass gilt:

$a''(t) = e^{-0,2 \cdot t} \cdot (1 - 0,4 \cdot t + 0,02 \cdot t^2)$ 2

2.3.5 Berechnen Sie unter Verwendung der Angaben in Aufgabenteil 2.3.4 den Zeitpunkt, zu dem die Absatzrate am stärksten abnimmt. 3

Zentrale Abiturprüfung 2018/2019

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 — Stochastik (24 Punkte) **Punkte**

Die CareDisps GmbH bezieht für ihre Displays kratzfeste Gläser, welche vor dem Einbau auf Funktionstüchtigkeit geprüft werden.

3.1 Die benötigten Gläser werden von zwei unterschiedlichen Zulieferern bezogen. Folgende Informationen sind bekannt:

- Die Alfons GmbH liefert 30 % der Gläser und der Rest stammt von der Bauer KG.
- $\frac{1}{10}$ aller Gläser sind defekt und stammen von der Bauer KG.
- $\frac{5}{6}$ der von der Alfons GmbH gelieferten Gläser sind einwandfrei.

Ereignis D: Ein Glas ist defekt.

Ereignis A: Ein Glas stammt von der Alfons GmbH.

3.1.1 Stellen Sie diesen Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm mit allen Pfad- und Pfadendwahrscheinlichkeiten oder in einer Vierfeldertafel dar. 4

3.1.2 Zeigen Sie, dass ein Glas mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % defekt ist. 2

3.1.3 Vergleichen Sie die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(D)$ sowie $P_{\overline{A}}(D)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext. 3

3.1.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Glas von der Bauer KG geliefert wurde. 2

3.2 Ein Glas der Alfons GmbH ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ defekt. Aus der nächsten Lieferung der Alfons GmbH wird eine Stichprobe von 250 Gläsern entnommen.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1: Genau 50 Gläser sind defekt.

E_2: Die Lieferung enthält mehr als 43 defekte Gläser.

E_3: Die Anzahl defekter Gläser weicht um mehr als zwei Gläser vom Erwartungswert ab. 7