

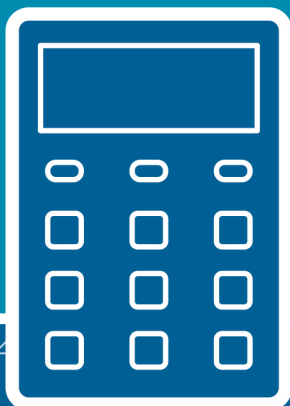
Gymnasium • 8. Klasse
Mathematik

DUDEN

BESSER **IN**

Mathematik

8. KLASSE



Mit
Lösungs-
heft

Duden

Maike Finnern, Markus Holm, Marcus Löffler

BESSER **IN**

Mathematik

8. KLASSE

GYMNASIUM

Vorwort	5
1 Terme und Gleichungen (Marcus Löffler)	6
1.1 Terme mit mehreren Variablen	6
1.2 Terme mit Klammern – Ausmultiplizieren und Ausklammern	8
1.3 Produkte von Summen – binomische Formeln	10
1.4 Gleichungen	11
Test	13
2 Lineare Funktionen (Marcus Löffler)	14
2.1 Eindeutige Zuordnungen – Funktionen	14
2.2 Darstellung von Funktionen durch Graph und Tabelle	16
2.3 Funktionsgleichung und lineare Funktion	18
2.4 Merkmale linearer Funktionen	23
2.5 Bestimmung linearer Funktionen	27
2.6 Lineare Gleichungen	32
Test	36
3 Lineare Gleichungssysteme (Markus Holm)	37
3.1 Systeme linearer Gleichungen	37
3.2 Zeichnerisches Lösungsverfahren	38
3.3 Anzahl der Lösungen	40
3.4 Rechnerische Lösungsverfahren	42
– Einsetzungsverfahren	43
– Gleichsetzungsverfahren	45
– Additionsverfahren	46
3.5 Vergleich der Lösungsverfahren	48
3.6 Anwendungen	48
Test	52
4 Reelle Zahlen (Marcus Löffler)	53
4.1 Quadratwurzeln	53
4.2 Näherungsweise Bestimmung von Quadratwurzeln	56
4.3 Anordnung reeller Zahlen	57
4.4 Rechnen mit Quadratwurzeln	59
4.5 Terme und Gleichungen mit Quadratwurzeln	61
Test	63

5	Satzgruppe des Pythagoras (<i>Maïke Finnern</i>)	64
5.1	Wiederholung Dreiecke	64
5.2	Satz des Pythagoras	65
5.3	Pythagoras in der Ebene	68
5.4	Pythagoras im Raum	70
5.5	Kathetensatz und Höhensatz	71
5.6	Anwendungen	75
	Test	77
6	Prisma und Kreiszylinder (<i>Markus Holm</i>)	78
6.1	Grundbegriffe	78
6.2	Netze und Abwicklungen	80
6.3	Schrägbilder verstehen und zeichnen	82
6.4	Oberflächeninhalt und Volumen	87
	Test	90
7	Zentrische Streckung, Strahlensätze, Ähnlichkeit (<i>Markus Holm</i>)	92
7.1	Zentrische Streckung	92
7.2	Flächeninhalte und Volumina bei zentrischen Streckungen	97
7.3	Strahlensätze	99
7.4	Ähnliche Figuren – Anwendungen	104
	Test	108
	Stichwortverzeichnis	110
	Verzeichnis der Abkürzungen	112

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Band der Reihe „Besser in Mathematik“ hilft dir, deine Kenntnisse im Fach Mathematik zu verbessern. Du kannst gezielt Stoff nachholen und wiederholen, um sicherer zu werden! Zu allen Bereichen des Mathematikunterrichts werden kleine Aufgaben angeboten, mit denen du selbstständig arbeiten kannst.

Die Schwerpunkte sind:

- ▷ Definitionen und Regeln kennen und anwenden,
- ▷ Aufgaben strukturieren und strategisch bearbeiten,
- ▷ Diagramme und Formeln erstellen und interpretieren,
- ▷ Zusammenhänge begründen und überprüfen.

Die Texte und die Aufgaben in diesem Buch sind so ausgewählt und zusammengestellt, dass dir die Bearbeitung möglichst leichtfällt.

TIPPS UND INFOS

Zum Arbeiten mit diesem Buch

- ▶ Lege dir ein **eigenes Arbeitsheft** zu, in das du schreibst.
- ▶ Bist du dir beim Lösen der Übungsaufgaben nicht ganz sicher, sieh dir die Beispiele noch einmal genau an.
- ▶ Vergleiche deine Ergebnisse mit dem Lösungsheft.
Überprüfe bei Fehlern immer genau, was du falsch gemacht hast. Korrigiere deine Fehler.
- ▶ Am Ende eines jeden Kapitels kannst du in einem kleinen Test überprüfen, ob du den Stoff nun beherrschst. Wenn nicht, bearbeite die entsprechenden Aufgaben in einigen Tagen noch einmal.

Viel Spaß und Erfolg beim Lernen!

WAS DU SCHON KÖNNEN MUSST

- Die Begriffe Summe, Differenz, Produkt, Faktor und Potenz kennen

DAS MUSST DU WISSEN

Terme und Variable

- **Terme** sind Rechenvorschriften, in denen die Rechengesetze der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division gelten und den Vorrang von Rechenoperationen regeln.
- Eine **Variable** steht stellvertretend für eine noch unbekannte Zahl und wird mit Buchstaben (oft: a, b, c, x, y, z) bezeichnet.

1.1 Terme mit mehreren Variablen

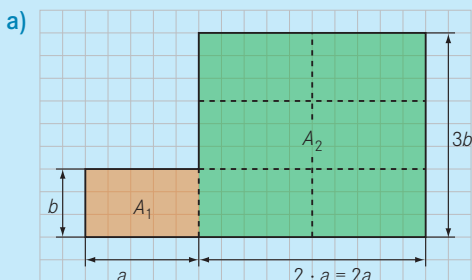
DARUM GEHT ES

Terme vereinfachen und gleichartige Terme erkennen

DAS MUSST DU WISSEN

Summen und Differenzen

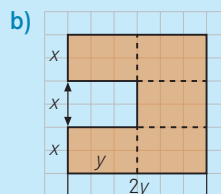
In Summen und Differenzen fasst man **gleichartige Terme** zusammen. **Beispiele:**



$$A_1 = a \cdot b$$

$$A_2 = 2a \cdot 3b = 6ab$$

$$\begin{aligned} A_G &= A_1 + A_2 = ab + 6ab \\ &= 7ab \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= 3x \cdot 2y - x \cdot y \\ &= 6xy - xy \\ &= 5xy \end{aligned}$$

Terme sind gleichartig, wenn sie gleiche Teilprodukte (hier: ab bzw. xy) aufweisen. Beim Addieren (Subtrahieren) von gleichartigen Termen addierst (subtrahierst) du die entsprechenden Zahlen.

1.1 Terme mit mehreren Variablen

Tipp: Übersichtlicher wird es, wenn du bei gleichartigen Termen das Malzeichen weglässt.

Beispiel: Vereinfache den Term $3 \cdot a + 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b - 4 \cdot a - 2 \cdot a \cdot b$

$$\begin{aligned} & 3a + 3ab + 2b - 4a - 2ab && \text{(Malzeichen weggelassen)} \\ = & 3a - 4a + 3ab - 2ab + 2b && \text{(Teilterme vertauscht)} \\ = & (3 - 4)a + (3 - 2)ab + 2b && \text{(Teilterme zusammengefasst)} \\ = & -1a + 1ab + 2b \\ = & -a + ab + 2b && \text{(1 kann weggelassen werden)} \end{aligned}$$

DAS MUSST DU WISSEN

Produkte

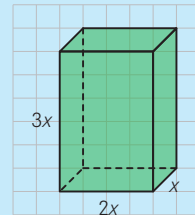
In Produkten fasst man gleiche Faktoren zu Potenzen zusammen.

Beispiel 1: Der nebenstehende Quader hat die Seitenlängen x , $2x$ und $3x$. Der Term zur Berechnung des Volumens (Breite \cdot Länge \cdot Höhe) ist

$$V = x \cdot 2x \cdot 3x.$$

Die Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} V &= x \cdot 2x \cdot 3x && \text{(Vertauschen/Kommutativgesetz)} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x && \text{(Zahlen miteinander multiplizieren,} \\ &&& \text{Variablen zur Potenz zusammenfassen)} \\ &= 6x^3 \end{aligned}$$



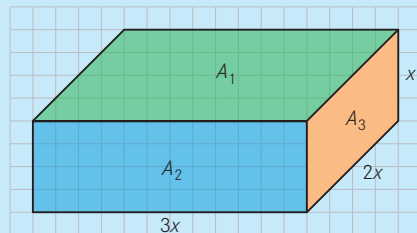
Beispiel 2: Die Oberfläche des Quaders besteht aus sechs Flächen, wobei jeweils zwei Flächen doppelt auftreten.

$$A_1 = 3x \cdot 2x = 6x^2$$

$$A_2 = 3x \cdot x = 3x^2$$

$$A_3 = 2x \cdot x = 2x^2$$

$$\begin{aligned} A_G &= 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 \\ &= 2 \cdot 6x^2 + 2 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x^2 \\ &= 12x^2 + 6x^2 + 4x^2 \\ &= 22x^2 \end{aligned}$$



Das Ergebnis zeigt Dir, dass sich die Oberfläche aus genau 22 Quadraten mit der Seitenlänge x und somit der Fläche x^2 zusammensetzt.

1 Fasse die Terme zusammen.

a) $2xy + 7ab + 3ab + 10xy$

c) $3a^2b + a + 7a^3b + 3a$

b) $3a + 7b - 2a - 11b$

d) $13ab^2 - 11ab^2 + 10b - 11b$

2 Vereinfache die Produktterme.

a) $3x \cdot 5y$

b) $2x \cdot 3x \cdot 0,5x$

c) $4x \cdot x \cdot 3y$

d) $(-2)x \cdot 7x$

3 Vereinfache und fasse zusammen.

a) $a \cdot 3b + 7ab + 2b \cdot 3b + 4b^2$

c) $4xy - 12x + 6xy - 12y - 8$

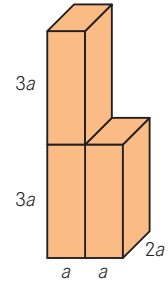
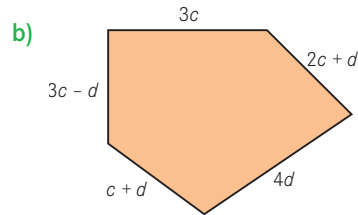
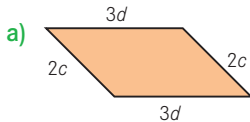
b) $-a \cdot 2a + b \cdot 2b + a \cdot 3a - b \cdot 3b$

d) $2(a + b) - 3(e - f) - 3(a + b) + 4(e - f)$

4 Terme

a) Stelle einen möglichst einfachen Term für das Volumen des nebenstehenden Körpers auf.

b) Stelle einen möglichst einfachen Term für die Oberfläche des nebenstehenden Körpers auf.

c) Wie oft passt ein Würfel mit dem Volumen a^3 in den Körper?d) Welche Größe hat die Oberfläche für $a = 2 \text{ cm}$?5 Gib den Umfang U in Abhängigkeit von c und d an.

1.2 Terme mit Klammern – Ausmultiplizieren und Ausklammern

DARUM GEHT ES

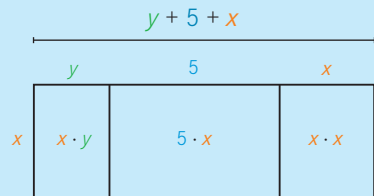
- ▷ Klammern auflösen
- ▷ Terme miteinander multiplizieren, binomische Formeln anwenden
- ▷ Terme in Produkte umwandeln

DAS MUSST DU WISSEN

Summen mit einem Faktor multiplizieren

Ein Faktor wird mit einer Summe multipliziert, indem man den Faktor mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert (Distributivgesetz).

Beispiel: $x \cdot (y + 5 + x) = xy + 5x + x^2$



1.2 Terme mit Klammern – Ausmultiplizieren und Ausklammern

BEISPIEL

Klammern ausmultiplizieren

- ▶ Eine Zahl x wird mit einer weiteren, um drei vergrößerten Zahl y multipliziert. Der Term dafür lautet: $x \cdot (y + 3)$. Das Distributivgesetz wendest du folgendermaßen an:
 $x \cdot (y + 3) = x \cdot y + x \cdot 3 = xy + 3x$.
- ▶ Bei einer „Minusklammer“ multiplizierst du ebenfalls aus, dabei entspricht das Minuszeichen „-“ dem Faktor „- 1“.
 - Der Term $x \cdot (-y - 1)$ wird durch Ausmultiplizieren zu $x \cdot (-y) + x \cdot (-1) = -xy - x$.
 - $x \cdot (y + 3) = x + (-1) \cdot (y + 3) = x + (-1 \cdot y) + (-1 \cdot 3) = x - y - 3$.
- ▶ An den Tankstellen I, II und III werden an einem Tag die Gesamtmengen A , B und C an Gas getankt. Der Preis für ein Kilogramm Gas variiert täglich und wird deswegen mit x bezeichnet.
Der Term $Ax + Bx + Cx$ beschreibt die Einnahmen eines Tages für den Verkauf von Gas aller Tankstellen zusammen.
Der Faktor x (Preis für 1 kg Gas) tritt in jedem der drei Produkte auf. Deswegen kannst du das x ausklammern und die Faktoren A , B , C addieren: $(A + B + C) \cdot x$.
In der Klammer steht nun die Summe der Gasmengen. Das Produkt liefert dir den Gesamtpreis.

Tipp: Steht vor dem gemeinsamen Faktor kein weiterer Wert, dann denke dir eine 1.

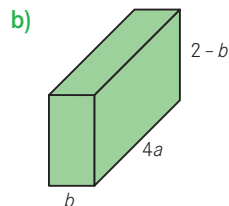
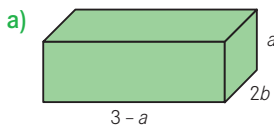
1 Löse die Klammern auf und verwandle in eine Summe.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| a) $3 \cdot (x + y)$ | b) $7x \cdot (6 + 2y)$ | c) $-2 \cdot (u + v)$ |
| d) $5 \cdot (11 - y)$ | e) $x \cdot (-y + 13)$ | f) $uv \cdot (u + v)$ |

2 Schreibe als Produkt.

- | | | |
|---------------|-----------------------|------------------------|
| a) $8x + ax$ | b) $9r^2 + 9s^2$ | c) $y + 13y + by$ |
| d) $11u - uv$ | e) $3xy + c \cdot xy$ | f) $7xy - 14xs + 49ax$ |

3 Gib den Oberflächeninhalt des Quaders in Abhängigkeit von a und b an. Vereinfache den Term so weit wie möglich.



1.3 Produkte von Summen – binomische Formeln

DARUM GEHT ES

Wie in den beiden vorhergehenden Kapiteln geht es bei Produkten von Summen um die Vereinfachung oder Umformung von Termen. Du wirst erfahren, wie du solche Terme umwandeln kannst. Für spezielle Produkte von Summen lernst du Regeln kennen, um Terme schneller umformen zu können.

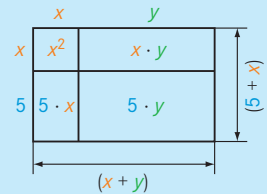
DAS MUSST DU WISSEN

Summen miteinander multiplizieren

Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert.

Beispiel a:

$$(x + 5) \cdot (x + y) = x^2 + xy + 5x + 5y$$



Beispiel b: Eine um zwei vergrößerte Zahl wird mit einer weiteren, um 5 vergrößerten Zahl multipliziert. Der Term hierfür lautet: $(x + 2) \cdot (y + 5)$. Du wendest nun zweimal das Distributivgesetz an. Multipliziere die zweite Klammer zunächst mit der Variablen x . Du erhältst dadurch den Term $x \cdot y + x \cdot 5$. Nun multiplizierst du den zweiten Term mit der Zahl 2 und erhältst den Term $2 \cdot y + 2 \cdot 5$. Anschließend addierst du beide Terme und vereinfachst diese:

$$x \cdot y + x \cdot 5 + 2 \cdot y + 2 \cdot 5 = xy + 5x + 2y + 10.$$

DAS MUSST DU WISSEN

Binomische Formeln

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Die binomischen Formeln sind Spezialfälle der Multiplikation zweier Summen.

Beispiel a:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

1. binomische Formel

$$(2u - v)^2 = (2u)^2 - 2 \cdot 2uv + v^2 = 2^2 u^2 - 4uv + v^2 = 4u^2 - 4uv + v^2$$

2. binomische Formel

$$(3t + 7)(3t - 7) = (3t)^2 - 7^2 = 9t^2 - 49$$

3. binomische Formel

Beispiel b: Die binomischen Formeln kannst du auch verwenden, um Summen in Produkte zu verwandeln.

$$u^2 + 12x + 36 = u^2 + 2 \cdot 6x + 6^2 = (u + 6)^2$$

1. binomische Formel (rückwärts)

$$9y^2 - 121 = (3y)^2 - 11^2 = (3y + 11)(3y - 11)$$

3. binomische Formel (rückwärts)

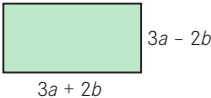
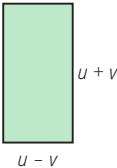
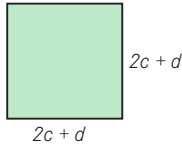
1 Wende die binomischen Formeln an.

- a) $(x + y)^2$ b) $(5u + v)^2$ c) $(xy + 8)^2$ d) $(x - 9)^2$
 e) $(4a - b)^2$ f) $(-s + k)^2$ g) $(x + y)(x - y)$ h) $(4u + 12)(4u - 12)$

2 Verwandle die Terme mithilfe der binomischen Formeln in ein Produkt.

- a) $y^2 + 50y + 625$ b) $x^2 - 12x + 36$ c) $4 - v^2$
 d) $a^2b^2 - 2ab + 1$ e) $196u^2 - 1$ f) $72by + 81b^2 + 16y^2$

3 Gib den Umfang U und den Flächeninhalt A durch die gegebenen Variablen an.

- a)  b)  c) 

1.4 Gleichungen

DARUM GEHT ES

Gleichungen mit einer Variablen durch Termumformungen bzw. äquivalente Umformungen lösen

Was ist eine Gleichung?

Verbindet man einen Term mit einer Zahl, einer Variablen oder einem anderen Term durch das Gleichheitszeichen „=“, so spricht man von einer **Gleichung**.

Beispiel: Eine einfache Gleichung ergibt sich aus dem Term $2x + 4$ und der Zahl 8. Die Gleichung lautet dementsprechend $2x + 4 = 8$.

Bei einer Gleichung wird der Wert für die Variable gesucht, sodass die Gleichung auf beiden Seiten den gleichen Wert annimmt. In unserem Beispiel muss die Variable x den Wert 2 annehmen: $2 \cdot 2 + 4 = 8$, $x = 2$ oder $L = \{2\}$ nennt man **Lösung** einer Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen verändern nicht die Lösungsmenge einer Gleichung.

Beispiel a: Die Gleichung $2x + 4 = 10 + x$ kann man durch beidseitiges Addieren und Subtrahieren äquivalent umformen, bis die Variable x allein steht:

$$\begin{aligned}
 2x + 4 &= 10 + x & | -x \\
 2x - x + 4 &= 10 + x - x \\
 x + 4 &= 10 & | -4 \\
 x + 4 - 4 &= 10 - 4 \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $L = \{6\}$.

Zur Kontrolle ist es sinnvoll, eine **Probe** durchzuführen, das heißt, du setzt die Lösung in die Ausgangsgleichung ein. Die linke Seite der Gleichung ergibt dann $2 \cdot 6 + 4 = 16$. Die rechte Seite ergibt $10 + 6 = 16$. Beide Seiten stimmen überein, also stimmt die Lösung.

Beispiel b: Die Gleichung $\frac{4}{x} = 2$; $x \neq 0$ kann man durch beidseitiges Multiplizieren und Dividieren umformen, bis die Variable x allein steht:

$$\frac{4}{x} = 2 \quad | \cdot x$$

$$\frac{4 \cdot x}{x} = 2x \quad | : 2$$

$$4 = 2x \quad | : 2$$

$$2 = x$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $L = \{2\}$.

Beispiel c:

$$7(x + 2,5) = 4x + 13$$

$$7x + 17,5 = 4x + 13 \quad | - 4x$$

$$3x + 17,5 = 13 \quad | - 17,5$$

$$3x = -4,5 \quad | : 3$$

$$x = -1,5$$

$$\text{Probe: } 7 = 7$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $L = \{-1,5\}$.

DAS MUSST DU WISSEN

Besondere Gleichungen

Beispiel a: Die Gleichung $x(x + 4) = 0$ besitzt die Faktoren x und $x + 4$. Die Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 0$ oder $x + 4 = 0$ ist:

$$x + 4 = 0 \quad | - 4$$

$$x = -4$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $L = \{-4; 0\}$.

Beispiel b: Die Gleichung $(x - 2)(x + 4) = 0$ besitzt die Faktoren $x - 2$ und $x + 4$.

Die Gleichung ist erfüllt, wenn $x - 2 = 0$ oder $x + 4 = 0$ ist:

$$x - 2 = 0 \quad | + 2$$

$$x = 2$$

$$x + 4 = 0 \quad | - 4$$

$$x = -4$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $L = \{-4; 2\}$.

1 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.

a) $12x + 7 = 31$

b) $9x - 2 = 4x + 13$

c) $2(3x + 9) = -3$

d) $\frac{3}{x} + 2 = \frac{15}{x}$

e) $5(9 - 11y) = -40y$

f) $x(4x - 6) = (2x - 2)^2$

2 Bestimme die Lösungen der Gleichung.

a) $x(x + 3) = 0$

b) $3(x - 3)(x + 4) = 0$

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $x^2 - 81 = 0$

3 Preissenkung

Im Schlussverkauf wird der Preis eines T-Shirts um ein Zehntel seines Preises und um weitere 2 € gegenüber dem Anfangspreis vermindert. Nun kostet es 16 €. Erkläre den Term $0,9t - 2 = 16$ und berechne den Ausgangspreis.

4 Das Produkt zweier gebrochener Zahlen, die sich um $\frac{2}{3}$ voneinander unterscheiden, ist Null. Welche Zahlen sind das?**Test****1 Vereinfache und fasse so weit wie möglich zusammen.**

| 8 |

a) $x \cdot x + 4x^2$

b) $ef + fe - f + 5f$

c) $3a - (7 \cdot ab + a^2) - b$

d) $yz + yx - 3xy - zy + 13xz$

2 Multipliziere und fasse zusammen.

| 12 |

a) $(1,5x - 2,25) \cdot 4x$

b) $(-3a + c)(-1 + 2c)$

c) $(-d + 7f)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}r + \frac{2}{3}t\right)\left(\frac{1}{2}r - \frac{2}{3}t\right)$

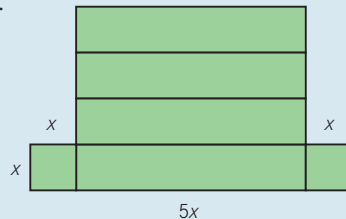
3 Terme zur Oberflächen- und Volumenberechnung eines Quaders

| 10 |

Betrachte das nebenstehende Netz eines Quaders.

a) Stelle den Term zur Berechnung der Oberfläche des Netzes des Quaders auf.

b) Wie groß ist das Volumen für $x = 3$ cm.
Stelle zunächst einen Term zur Berechnung des Volumens auf.

**4 Löse die Gleichung und überprüfe die Lösung durch Einsetzen.**

| 10 |

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 8$

b) $5a - 2 \cdot (a + 3) = a + 8$

5 Berechne Oberfläche und Volumen eines Quaders.

Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat eine Kantenlänge von 60 cm. Die Länge der Kante, welche die Grundfläche begrenzt, ist dreimal so lang wie die Höhe des Quaders. Berechne O und V dieses Quaders.

| 10 |

| 50 |

Wie viele Punkte hast du? Erreichst du mehr als 39 Punkte, beherrscht du den Inhalt des Kapitels wirklich gut. Erreichst du weniger als 20 Punkte, dann solltest du dieses Kapitel wiederholen.